ANATOLIE HRISTEV

PROBLEME DE FIZICĂ

MECANICĂ

ANATOLIE HRISTEV

PROBLEME DE FIZICĂ

MECANICĂ

Lucrarea conţine probleme din fizica predată în liceu. Se adresează elevilor din liceu, celor care se pregătesc pentru treapta a II-a de liceu, pentru examenul de bacalaureat şi pentru examenul de admitere în învăţămîntul superior.

Pe lîngă problemele „obişnuite" rezolvabile cu ajutorul algebrei şi trigonometriei, care se învaţă în prima treaptă de liceu, lucrarea conţine probleme de fizică de nivel mediu (notate cu asterisc *), rezolvabile cu ajutorul calculului diferenţial şi integral, care se învaţă în treapta a doua de liceu. Elevii din clasele terminale de liceu ştiu să deriveze şi să integreze funcţii chiar mult mai complicate decît cele necesare pentru fizica de liceu, dar *nu ştiu să aplice aceste cunoştinţe la rezolvarea problemelor de fizică*. De aceea autorul dă rezolvări foarte amănunţite pentru aceste probleme. Astfel de probleme vor învăţa pe elevi să aplice acest minunat instrument matematic la rezolvarea problemelor de fizică de nivel mediu, învăţîndu-i să facă raţionamentul de bază, fizic şi matematic, pentru scrierea relaţiilor diferenţiale ale proceselor sau fenomenelor fizice studiate. Această parte poate fi folosită şi de studenţi la cursurile de fizică generală. Breviarele se referă în special la aceste probleme.

La sfîrşitul cărţii se dau **Tabele** utile de constante fizice.

* — probleme rezolvate amănunţit cu ajutorul derivatelor (cl. XI).

** — respectiv cu ajutorul integralelor (cl. XII).

(*), (**) — probleme care conţin şi o rezolvare fără derivate, respectiv fără integrale.

Vol. I. **Mecanică** : 556 + 37* + 98** = 691 probleme.

Urmează vol. II. **Termodinamică**, vol. III. **Electricitate**, vol. IV. **Optică şi Fizică atomică**.

AUTORUL

La realizarea acestei cărţi a contribuit prof. Ryurick Marius Hristev.

INTRODUCERE

Cîteva observaţii generale privind rezolvarea problemelor notate cu asterisc * (unele din ele, notate cu asterisc în paranteze, se pot rezolva cu matematici elementare).

Mărimile fizice sînt de obicei variabile în spaţiu, de la punct la punct, şi în timp, de la un moment la altul, adică sînt funcţii de coordonate şi timp : $f(x, y, z, t)$. Pentru a scrie relaţii „globale" pentru fenomene şi procese avînd loc într-un volum oarecare şi într-un interval de timp oarecare ar trebui folosite valori medii – mediate pe volumul şi intervalul de timp respective. Dar însuşi calculul acestor valori medii implică folosirea calculului integral. De aceea se studiază întîi procesele „local", adică într-un anumit punct (x, y, z) şi într-un anumit moment t, mai exact într-un *element de volum* dV situat în punctul considerat (x, y, z) (adică într-un volum ΔV *infinit de mic – infinitezimal* – care tinde către zero, restrîngîndu-se la punctul considerat) şi într-un interval de timp infinitezimal dt în jurul momentului considerat t (adică într-un interval Δt infinit mic – infinitezimal – care tinde către zero, restrîngîndu-se la momentul considerat t). Se stabilesc apoi relaţii „diferenţiale" între diferenţialele mărimilor interesate şi însfîrşit se integrează („sumează") ecuaţiile diferenţiale obţinute pe volumul şi intervalul de timp dorite.

În locul cuvintelor : „mărime infinit mică" („infinitezimală"), diferenţiala unei mărimi, vom folosi cuvintele : „element de ... " sau „ ... elementar(ă)", de exemplu : *element* de arie dS sau *element* de volum dV, deplasarea *elementară* $d\vec{r}$, lucrul mecanic *elementar* $dL = \vec{F}d\vec{r}$ sau $dL = pdV$ efectuat într-o deplasare *elementară* sau într-un proces *elementar* de destindere a unui gaz, etc.

Iată cîteva exemple simple :

a) Fie o substanţă distribuită *neuniform* într-un vas. Raportul

$$\bar{\rho} = m/V \tag{0.1}$$

dă densitatea *medie* pe volumul V. Pentru a obţine densitatea într-un punct dat considerăm un *element de volum* dV situat în punctul dorit, avînd masa dm. Atunci raportul

$$\rho = \frac{dm}{dV} = \rho(x, y, z) \tag{0.2}$$

ne dă densitatea în *acel punct*. Luînd diferite puncte obţinem densitatea $\rho(x, y, z)$ ca funcţie de punct. Invers, cunoscînd densitatea $\rho(x, y, z)$ cu care este distribuită substanţa, putem calcula masa oricărui element de volum :

$$dm = \rho\, dV = \rho(x, y, z)\, dV \tag{0.3}$$

şi prin integrare (sumare) pe volumul dorit, găsim masa totală:

$$m = \int dm = \int_V \rho dV = \int_V \rho(x, y, z)\, dV. \qquad (0.4)$$

b) Să calculăm lucrul mecanic efectuat de un gaz perfect într-o transformare izotermă. Să considerăm întîi un proces *elementar* de destindere, adică un proces în care parametrii (p, V) de stare se schimbă *infinit de puţin* (presiunea p se schimbă cu dp, volumul V cu dV). Lucrul mecanic *elementar* efectuat într-un proces *elementar* de destindere este

$$dL = p\, dV, \qquad (0.5)$$

de unde într-un proces finit de destindere de la volumul iniţial V_1 pînă la volumul final V_2 (fig. 0.1):

$$L = \int dL = \int_{V_1}^{V_2} p dV. \qquad (0.6)$$

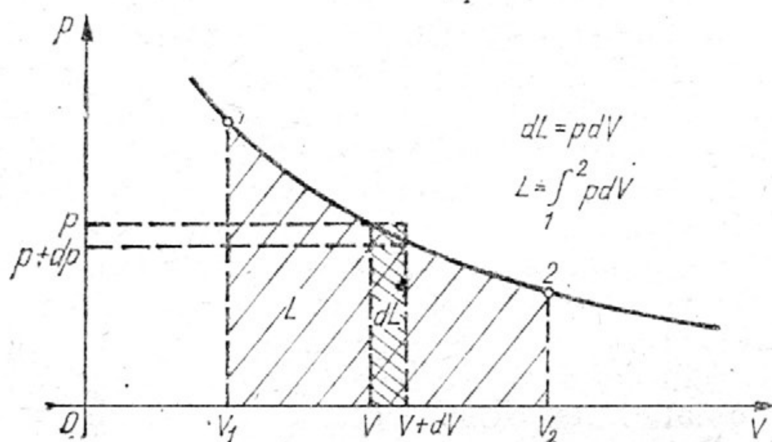


Fig. 0.1

Nu avem voie să scoatem presiunea p de sub semnul integralei decît dacă p ar fi *constantă*. Pentru a face integrarea trebuie să exprimăm presiunea p în funcţie de volumul V. Din ecuaţia de stare avem

$$p = \nu RT/V, \qquad (0.7)$$

deci

$$L = \int_{V_1}^{V_2} \frac{\nu RT}{V} dV = \nu RT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \nu RT \ln \frac{V_2}{V_1} \qquad (0.8)$$

(am scos de sub semnul integralei mărimile *constante* ν, R, T).

c) Fluxul magnetic îmbrăţişat de un circuit variază după legea:

$$\Phi = \Phi_0 \sin(\omega t + \alpha). \qquad (0.9)$$

Să aflăm t.e.m. indusă ca funcţie de timp. Formula

$$\bar{\mathcal{E}} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \qquad (0.10)$$

ne dă t.e.m. indusă *medie* şi anume mediată pe intervalul de timp Δt în care fluxul a variat cu $\Delta\Phi$. T.e.m. instantanee la un moment t se obţine luînd un interval Δt *infinit de mic* în jurul lui t (care descreşte, *tinde* către zero în jurul lui t) şi calculînd variaţia infinitezimală corespunzătoare a fluxului, cu alte cuvinte făcînd *trecerea la limită:*

$$\mathcal{E} = -\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\Phi'(t) = -\frac{d\Phi}{dt} = -\dot{\Phi}, \qquad (0.11)$$

deoarece limita raportului dintre creșterea (variația) funcției și creșterea (variația) variabilei independente reprezintă *derivata* acelei funcții în raport cu variabila respectivă. Punctul deasupra unei litere înseamnă *derivata* acelei mărimi în raport cu *timpul* (notația lui Newton folosită mai ales în mecanică).

Pentru funcțiile de o singură variabilă:

$$\mathrm{d}f = \mathrm{f}'(x)\,\mathrm{d}x, \tag{0.12}$$

adică derivata se reprezintă ca *raport de diferențiale:*

$$\mathrm{f}'(x) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}. \tag{0.13}$$

În cazul nostru derivăm ca funcție de funcție:

$$\mathscr{E} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}(\omega t + \alpha)}\cdot\frac{\mathrm{d}(\omega t + \alpha)}{\mathrm{d}t} = \Phi_0 \cos(\omega t + \alpha)\cdot\omega \tag{0.14}$$

d) Numărul de nuclee care se dezintegrează într-un interval de timp *infinit de mic* $\mathrm{d}t$ este proporțional cu numărul de nuclee nedezintegrate N existente în acel moment t și cu intervalul de timp *infinitezimal* $\mathrm{d}t$ considerat:

$$\mathrm{d}N = -\lambda N \mathrm{d}t,\ \lambda \text{ — constanta radioactivă} \tag{0.15}$$

(pentru intervale Δt mari nu mai există proporționalitatea amintită), minusul se datorește faptului că numărul nucleelor nedezintegrate scade în timp, deci $\mathrm{d}N < 0$. Am obținut o *ecuație diferențială*, adică o relație între funcția (necunoscută), variabila (independentă) și diferențialele lor. Un caz frecvent și important este cazul *separării variabilelor*. Transcriem ecuația diferențială astfel încît într-un membru să apară funcția și diferențiala sa, iar în celălalt membru — variabila independentă și diferențiala sa (constantele pot fi lăsate în oricare membru), pentru a putea integra separat fiecare membru în raport cu variabila sa (*Metoda separării variabilelor*).

Separăm deci variabilele în ecuația (0.15) și integrăm de la $t = 0$ cînd numărul nucleelor nedezintegrate este N_0, pînă la un moment t oarecare cînd numărul nucleelor nedezintegrate este N:

$$\frac{\mathrm{d}N}{N} = -\lambda \mathrm{d}t,\quad \int_{N_0}^{N}\frac{\mathrm{d}N}{N} = -\int_0^t \lambda \mathrm{d}t = -\lambda\int_0^t \mathrm{d}t, \tag{0.16}$$

$$\ln\frac{N}{N_0} = -\lambda t,\ \text{de unde } N = N_0 \mathrm{e}^{-\lambda t}. \tag{0.17}$$

Se poate face integrarea *nedefinită* (cele două constante de integrare aditive se restrîng la una singură):

$$\ln N = -\lambda t + C, \tag{0.18}$$

unde constanta de integrare C se determină din *condiția inițială*: la momentul $t = 0$ numărul nucleelor era N_0, deci

$$\ln N_0 = -\lambda\cdot 0 + C,\ \text{de unde } C = \ln N_0, \tag{0.19}$$

$$\ln N = -\lambda t + \ln N_0, \quad \ln \frac{N}{N_0} = -\lambda t, \quad N = N_0 e^{-\lambda t}. \qquad (0.20)$$

De multe ori este preferabilă integrarea nedefinită în care constanta de integrare se determină din condițiile inițiale sau la limită.

Amintim două teoreme utile:

1. Dacă *suma* a două mărimi variabile este *constantă*, atunci *produsul* lor este *maxim* cînd ele sînt egale. *Geometric* : Dintre toate dreptunghiurile izoperimetrice aria maximă o are pătratul.

2. Dacă *produsul* a două mărimi variabile este *constant*, atunci *suma* lor este *minimă* cînd ele sînt egale. *Geometric* : Dintre toate dreptunghiurile de aceeași arie perimetrul minim îl are pătratul.

Vol. 1. MECANICA

BREVIAR

Vectorul deplasare $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ are drept componente deplasările pe axele de coordonate: $\Delta x = x_2 - x_1$, $\Delta y = y_2 - y_1$. Raportîndu-le la intervalul de timp Δt obţinem viteza *medie* şi trecînd la limita $\Delta t \to 0$, obţinem viteza *instantanee* (tangentă la traiectorie):

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r}'(t) = \dot{\vec{r}},$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = x'(t) = \dot{x}, \quad v_y = \frac{dy}{dt} = y'(t) = \dot{y}. \tag{1.1}$$

Componentele vectorului viteză pe axele de coordonate *ortogonale* sînt egale cu *derivatele* coordonatelor respective în raport cu timpul.

Analog, componentele vectorului acceleraţie pe axele de coordonate ortogonale sînt egale cu *derivatele* componentelor respective ale vitezei, în raport cu timpul, sau cu *derivatele de ordinul doi* ale coordonatelor respective în raport cu timpul:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{v}'(t) = \dot{\vec{v}},$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = v_x'(t) = \dot{v}_x = x''(t) = \ddot{x}, \tag{1.2}$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = v_y'(t) = \dot{v}_y = y''(t) = \ddot{y}.$$

Derivata de ordinul doi se scrie cu ajutorul diferenţialelor astfel:

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx} f \text{ sau } (\ldots)_x' = \frac{d}{dx}(\ldots), \tag{1.3}$$

deci $\frac{d}{dx}$ este „operatorul" de derivare în raport cu x.

$$f''(x) = [f'(x)]_x' = \frac{d}{dx}[f'(x)] = \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right) = \frac{d^2f}{dx^2}. \tag{1.4}$$

În cazul unidimensional vom omite indicii:

$$v = \frac{dx}{dt} = x'(t) = \dot{x}, \quad a = \frac{dv}{dt} = v'(t) = \dot{v} = x''(t) = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}, \tag{1.5}$$

de unde

$$dx = v\,dt, \quad dv = a\,dt \tag{1.6}$$

şi prin integrare:

$$x = \int dx = \int v dt, \quad v = \int dv = \int a dt \tag{1.7}$$

*

În cazul mişcării circulare neuniforme viteza liniară şi cea unghiulară sînt

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = s'(t) = \dot{s},$$
$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} = \theta'(t) = \dot{\theta}, \tag{1.8}$$

$$s = \theta R, \quad s'(t) = \theta'(t) R \quad \text{sau} \quad v = \omega R, \tag{1.9}$$

de unde

$$ds = v dt, \quad s = \int ds = \int v dt, \quad d\theta = \omega dt, \quad \theta = \int d\theta = \int \omega dt. \tag{1.10}$$

Acceleraţia se descompune în componentele normală şi tangenţială:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}, \quad a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R, \quad a_t = \frac{dv}{dt} = s''(t) = \frac{d^2 s}{dt^2} = \varepsilon R, \tag{1.11}$$

unde ε este acceleraţia unghiulară:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \omega'(t) = \dot{\omega} = \theta''(t) = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \ddot{\theta}. \tag{1.12}$$

Mai general, într-o mişcare *curbilinie oarecare* acceleraţia se descompune în componentele tangenţială şi normală:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}, \quad a_t = \frac{dv}{dt} = s''(t) = \frac{d^2 s}{dt^2} = \ddot{s}, \quad a_n = \frac{v^2}{R}, \tag{1.13}$$

unde R este *raza de curbură* a traiectoriei, care se defineşte prin elementul de arc de curbă ds raportat la unghiul $d\theta$ (în radiani) subîntins, definit de normalele marginale la arcul ds (sau unghiul dintre tangentele marginale), ca în fig. 1.1.:

$$R = \frac{ds}{d\theta}, \quad (ds = R\, d\theta), \tag{1.14}$$

adică arcul ds este aproximat cu un element de arc de *cerc* (cercul de curbură) de rază R cu centrul de curbură C care subîntinde un unghi la centru $d\theta$.

*

Lucrul mecanic elementar dL efectuat într-o deplasare *elementară* $d\vec{r}$ de o forţă $\vec{F}$ este definit prin produsul scalar:

$$dL = \vec{F}\, d\vec{r} = F_t\, ds, \quad (|d\vec{r}| = |ds|), \tag{1.15}$$

unde F_t este componenta tangenţială a forţei şi ds deplasarea *elementară* pe traiectorie. În cazul unidimensional:

$$dL = F\, dx, \quad L = \int F\, dx. \tag{1.16}$$

Din principiul II al mecanicii rezultă *teorema variaţiei impulsului* pentru punctul material:

$$\vec{F}\, dt = m\, d\vec{v}, \quad \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\, dt = \int_{v_1}^{v_2} m\, d\vec{v} = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1, \tag{1.17}$$

care proiectată pe axe dă ecuațiile algebrice :

$$\int_{t_1}^{t_2} F_x \,\mathrm{d}t = mv_{2x} - mv_{1x}, \quad \int_{t_1}^{t_2} F_y \,\mathrm{d}t = mv_{2y} - mv_{1y}. \tag{1.18}$$

Energia potențială a unei particule supuse la forțe *conservative* se definește prin lucrul mecanic al acestor forțe :

$$\mathrm{d}E_p = -\,\mathrm{d}L, \quad \int \mathrm{d}E_p = \Delta E_p = -\int \mathrm{d}L = -\,L. \tag{1.19}$$

Alegînd un punct de referință P_0 (de obicei, la infinit) în care considerăm $E_p = 0$, avem pentru un punct P:

$$E_p = -\int_{P_0}^{P} \mathrm{d}L = -\,L_{P_0 \to P}. \tag{1.20}$$

De exemplu, energia potențială de interacțiune gravitațională a două particule (sau sfere omogene) :

$$\begin{aligned} E_p &= -\int_{\infty}^{r} \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{r} = -\int_{\infty}^{r} -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}\,\mathrm{d}r\gamma = m_1 m_2 \int_{\infty}^{r} \frac{\mathrm{d}r}{r^2} = \\ &= \gamma m_1 m_2 \left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_{\infty}^{r} = -\,\gamma \frac{m_1 m_2}{r}. \end{aligned} \tag{1.21}$$

Teorema variației energiei mecanice a unei particule supuse la forțe conservative și la forțe *neconservative* :

$$\Delta E = \Delta(E_c + E_p) = L_{\text{necons.}} \tag{1.22}$$

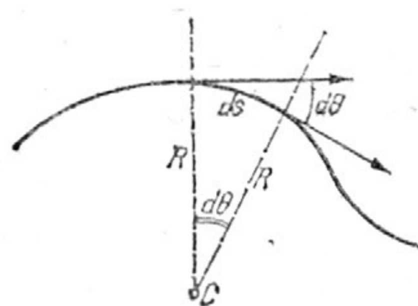


Fig. 1.1

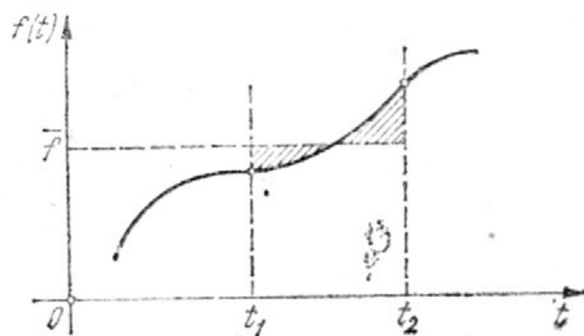


Fig. 1.2

*

Momentul de inerție al unui sistem de particule față de o axă :

$$I = \sum_k m_k R_k^2, \tag{1.23}$$

unde R_k sînt distanțele particulelor respective m_k pînă la axă.
În cazul distribuției *continue* în locul particulei m_k avem *elementul de masă* $\mathrm{d}m = \rho \mathrm{d}V$ cu distanța R pînă la axă :

$$I = \int R^2 \mathrm{d}m = \int R^2 \rho \,\mathrm{d}V, \tag{1.24}$$

unde ρ poate fi scos în afara integralei numai dacă este constant, adică pentru corpuri omogene, cînd integrala devine pur geometrică.

Teorema lui Steiner. Momentul de inerție I al unui corp față de o axă oarecare este egal cu momentul de inerție I_0 al corpului față de o axă

paralelă cu cea dată dar trecînd prin CM plus masa corpului înmulţită cu pătratul distanţei CM pînă la axa dată :

$$I = I_0 + mR_0^2. \tag{1.25}$$

În cazul rotaţiei în jurul axei fixe :

$$M = I\varepsilon,\ P = M\cdot\omega,\ P\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}L = M\omega\,\mathrm{d}t = M\,\mathrm{d}\theta,\ L = \int M\,\mathrm{d}\theta, \tag{1.26}$$

unde P este puterea şi M momentul forţelor *în raport cu axa de rotaţie.*

★

Valoarea medie a unei mărimi $f(t)$ pe un interval (t_1, t_2) este acea valoare constantă $\bar{f}$ care dă aceeaşi arie de sub grafic ca şi mărimea variabilă însăşi (fig. 1.2) :

$$\bar{f}\cdot(t_2 - t_1) = \int_{t_1}^{t_2} f(t)\mathrm{d}t = \bar{f}\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t,\ \bar{f} = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} f(t)\,\mathrm{d}t. \tag{1.27}$$

Valoarea medie depinde de intervalul pe care se mediază. Pentru mărimi *periodice* valoarea medie se ia de obicei pe o *perioadă* (dacă nu se specifică altfel).

Proprietăţile valorilor medii :

$$\overline{\mathrm{const}} = \mathrm{const},\ \overline{\mathrm{const}\cdot f} = \mathrm{const}.\bar{f},\ \overline{f+g} = \bar{f} + \bar{g}, \tag{1.28}$$

dar în general:

$$\overline{f\cdot g} \neq \bar{f}\cdot\bar{g}, \tag{1.29}$$

unde avem semnul egal numai dacă mărimile f, g sînt *independente* (statistic necorelate sau necoerente).

Dacă o mărime variază *liniar* în funcţie de un parametru, atunci valoarea sa medie în raport cu acel parametru este egală cu media aritmetică dintre valorile iniţială şi finală ale acelei mărimi. De exemplu în mişcarea uniform variată $v = v_0 + at$ şi atunci $\bar{v} = \frac{1}{2}(v_1 + v_2)$,

Exemple :

$$\overline{\sin(\omega t + \alpha)} = \frac{1}{T}\int_t^{t+T}\sin(\omega t + \alpha)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{\omega T}\cos(\omega t + \alpha)\Big|_t^{t+T} =$$

$$= -\frac{1}{\omega T}[\cos(\omega t + \omega T + \alpha) - \cos(\omega t + \alpha)] = 0,\ (\omega T = 2\pi),$$

$$\overline{\cos(\omega t + \alpha)} = 0, \tag{1.30}$$

ceea ce era evident din interpretarea grafică a valorii medii.

$$\overline{\sin^2(\omega t + \alpha)} = \overline{\frac{1 - \cos(2\omega t + 2\alpha)}{2}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\overline{\cos(2\omega t + 2\alpha)} = \frac{1}{2},$$

$$\overline{\cos^2(\omega t + \alpha)} = \frac{1}{2}. \tag{1.31}$$

$$\overline{\sin(\omega t + \alpha)\sin(\omega t + \beta)} = \overline{\cos(\omega t + \alpha)\cos(\omega t + \beta)} = \frac{1}{2}\cos(\alpha - \beta),$$

$$\overline{\sin(\omega t + \alpha)\cos(\omega t + \beta)} = \frac{1}{2}\sin(\alpha - \beta). \tag{1.32}$$

Media unei bucle („alternanțe") de sinusoidă :

$$\overline{\sin \omega t}^{(0,\ T/2)} = \frac{1}{T/2}\int_0^{T/2} \sin \omega t\, dt = \frac{1}{T/2}\left.\frac{-\cos \omega t}{\omega}\right|_0^{T/2} = \frac{2}{\pi}. \qquad (1.33)$$

*

Pentru un oscilator armonic :

$$E_c = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \alpha), \quad \overline{E}_c = \frac{1}{4} m\omega^2 A^2 = \frac{E}{2},$$

$$E_p = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} kA^2 \sin^2(\omega t + \alpha), \quad \overline{E}_p = \frac{1}{4} kA^2 = \frac{E}{2}, \qquad (1.34)$$

$$k = m\omega^2, \ E = E_c + E_p = \frac{1}{2} kA^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 = \text{const.}$$

Scriind $F = -kx = ma = m\ddot{x}$, obținem *ecuația diferențială a oscilatorului armonic* :

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad \text{sau} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0. \qquad (1.35)$$

* * *

1.1. PRINCIPIILE MECANICII

1.1.1. Un fir rezistă la un corp atîrnat de masă maximă $m_1 = 8,0$ kg în cazul ridicării corpului cu o anumită accelerație și la masă maximă $m_2 = 12,0$ kg în cazul coborîrii cu aceeași (în modul) accelerație. Care este tensiunea de rupere a firului?

1.1.2. Un camion de masă $m_1 = 3,0$ t tractează accelerat o remorcă de masă $m_2 = 2,0$ t. Forța de tracțiune dezvoltată de camion $F = 2,5$ kN. Considerînd că forțele de rezistență sînt proporționale cu greutățile, aflați forța de tensiune din cablul orizontal de remorcare.

1.1.3. Două corpuri de mase $m_1 = 0,100$ kg, $m_2 = 0,300$ kg, legate printr-un fir, sînt trase în jos cu o accelerație $a = 19,8$ m/s^2, ca în figură. Aflați forța de tracțiune F și tensiunea din fir.

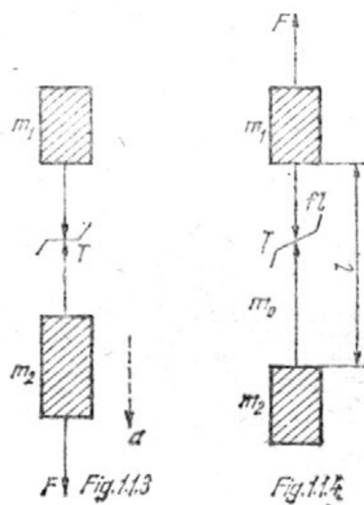


Fig.1.1.3 Fig.1.1.4

1.1.4. Un corp de masă m_1 este tras în sus cu o forță F. De acest corp este prins un alt corp de masă m_2 prin intermediul unui lanț de masa m_0, ca în figură. Aflați tensiunea din lanț la o distanță de m_1 egală cu o fracțiune f din lungimea lanțului.

1.1.5. Două baloane meteorologice sferice de diametre egale dar de mase diferite: $m_1 = 3,00$ kg, $m_2 = 1,00$ kg sînt legate între ele printr-un fir lung și coboară liber vertical în atmosferă liniștită de la o înălțime mare. Care va fi tensiunea din fir după un timp suficient de lung?

1.1.6. Ciutura unei fîntîni, umplută cu apă de volum $V = 10,0$ L, are un orificiu prin care curge apă cu debitul $q = 0,100$ L/s. Ciutura este ridicată uniform la suprafață în timpul $\tau = 10,0$ s, dar imediat se rupe sfoara și ciutura cade înapoi în fîntînă de adîncime $h = 4,9$m. Cîtă apă

va conține ciutura în momentul cînd ajunge în fundul fîntînii? (Se neglijează frecările cu aerul).

1.1.7. Un dinamometru este format din doi cilindri coaxiali legați printr-un resort de masă neglijabilă. Trăgînd de cîrlige cu forța $F_1 = 13,0$ N, respectiv $F_2 = 4,0$ N, dinamometrul arată forța $F = 10,0$ N. Aflați raportul maselor cilindrilor.

1.1.8. De tavanul unui vagon este suspendat un corp de masă $m = 2,00$ kg prin intermediul a două fire de aceeași lungime așezate simetric în planul vertical al mișcării, cu unghiul de deschidere $2\alpha = 60^0$. Care vor fi tensiunile din fire atunci cînd vagonul frînează cu accelerația $a = 10,0$ m/s²?

1.1.9. Într-un vagon, de două puncte de pe tavan, situate pe direcția orizontală de deplasare a vagonului, se află suspendat un fir ideal trecut printr-un inel greu care lunecă fără frecări pe fir. Cînd vagonul este în repaus unghiul dintre firele de suspensie a inelului este $\alpha = 60°$. Ce accelerație trebuie să aibă vagonul pentru ca inelul să se găsească în echilibru relativ chiar pe verticala unuia din punctele de suspensie ale firului?

1.1.10. În schema din figură se dau: $m = 0,200$ kg, $\alpha = 30°$. Sistemul se mișcă cu accelerația $a = 2,20$ m/s² în sus. Se neglijează frecările. Aflați forța de apăsare pe planul înclinat și tensiunea din fir.

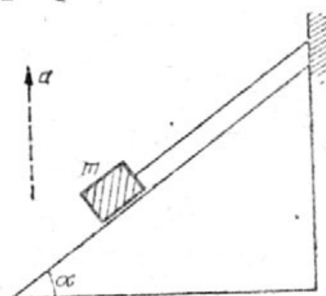


Fig. 1.1.10

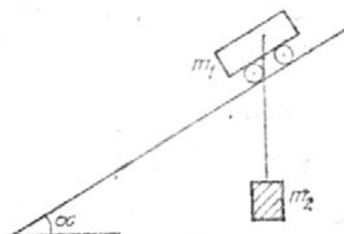


Fig. 1.1.11

1.1.11. Pe un plan înclinat de unghi $\alpha = 30°$ poate luneca fără frecare un cărucior de masă $m_1 = 10,0$ kg. De cărucior este suspendat printr-un fir un corp de masă $m_2 = 40,0$ kg ca în figură. Căruciorul este ținut în repaus. Care va fi tensiunea din fir imediat după ce i se dă drumul căruciorului?

1.1.12. În sistemul din figură se cunosc masele $m_{1,2}$ și forța F. Scripeții sînt ideali și frecările sînt neglijabile. Aflați viteza relativă la momentul t a unui corp față de altul, dacă vitezele inițiale au fost nule.

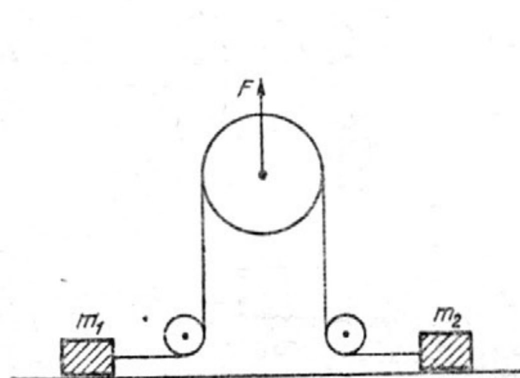


Fig. 1.1.12

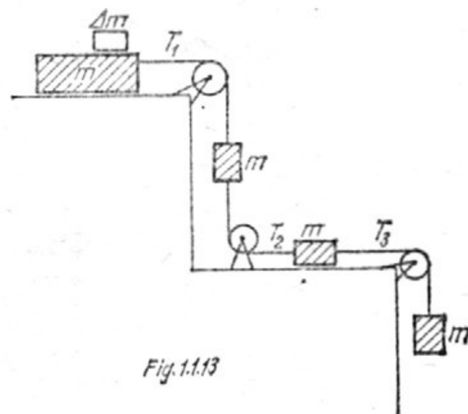


Fig. 1.1.13

1.1.13. În sistemul din figură, fără frecări, aflați T_2. Se dau: $m = 2,00$ kg, $\Delta m = 1,80$ kg.

1.1.14. Două seturi de corpuri de mase egale $M = 1,00$ kg (inclusiv masa talerului) sînt legate (talerele) printr-un fir trecut peste un scri-

pete ideal. De pe un taler se scoate un corp de masă $m_1 = 100$ g, iar pe celălalt se așează un corp de masă m_2. Calculați m_2 astfel ca tensiunea din fir să fie cea inițială.

1.1.15. Peste un scripete ideal, fixat de tavan, este trecută o sfoară avînd la un capăt un corp de masă $M = 1,50$ kg, iar la celălalt o bară de care este agățată o pisică de masă $m = 1,00$ kg, totul fiind în repaus. Cu ce accelerație (față de Pămînt) trebuie să coboare pisica pentru ca scripetele să nu apese asupra lagărelor sale?

1.1.16. In sistemul din figură scripeții sînt ideali, $m_1 = 1,50$ kg, $m_2 = 2,00$ kg. Aflați accelerația a_1 și tensiunea T_1.

1.1.17. Ce relație trebuie să existe între masele $m_{1,2,3}$ pentru ca în sistemul din figură (cu scripeți ideali) corpul m_3 să rămînă în repaus față de Pămînt?

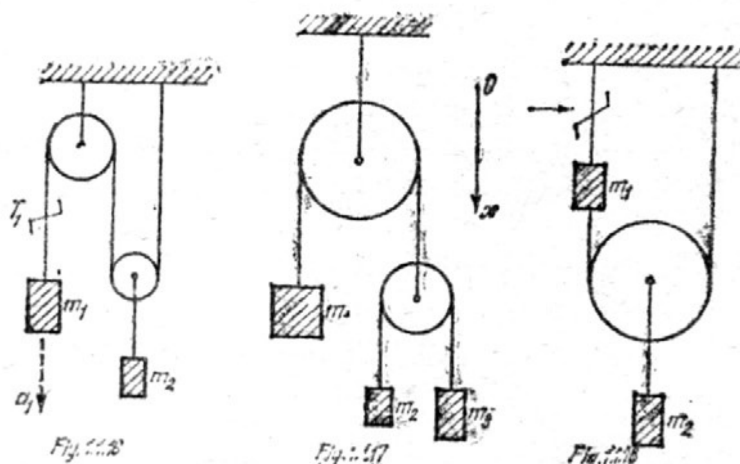


Fig. 1.1.16 Fig. 1.1.17 Fig. 1.1.18

1.1.18. Două corpuri de mase $m_1 = 2,00$ kg și $m_2 = 1,80$ kg sînt suspendate prin fire și printr-un scripete ideal ca în figură. Unul din fire este tăiat la locul indicat. Care vor fi accelerațiile corpurilor?

1.1.19. a) Peste un scripete care coboară vertical cu accelerația a_s este trecut un fir ideal avînd la capete două corpuri de mase $m_{1,2}$ avînd accelerațiile $a_{1,2}$ față de Pămînt. Stabiliți relația dintre accelerații.

b) Aflați accelerațiile corpurilor din figură (scripeții sînt ideali) și tensiunea din firul trecut peste cei trei scripeți.

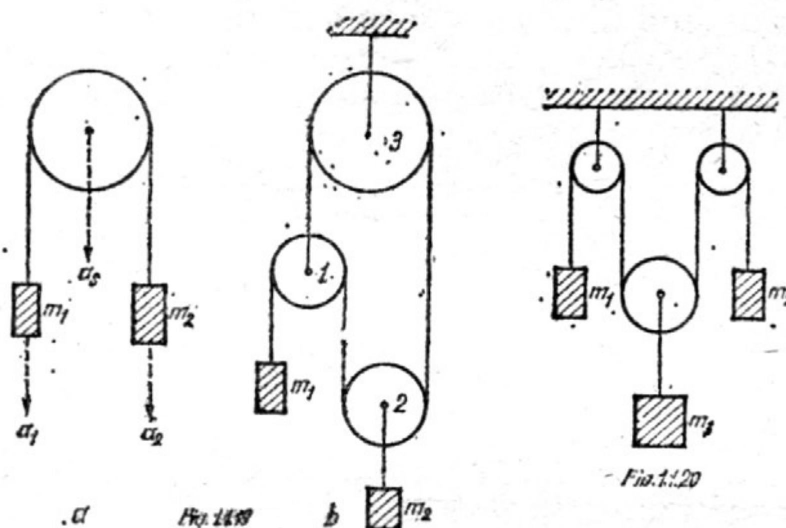


Fig. 1.1.19 Fig. 1.1.20

1.1.20. În sistemul din figură scripeții sînt ideali și masele $m_1 = 1,00$ kg, $m_2 = 1,00$ kg, $m_3 = 2,00$ kg. Aflați tensiunea din firul care înfășoară cei trei scripeți.

1.1.21. Pe un semicilindru sînt așezate două corpuri mici de mase $m_1 = 2,00$ kg, $m_2 = 6,00$ kg legate între ele printr-un fir, ca în figură.

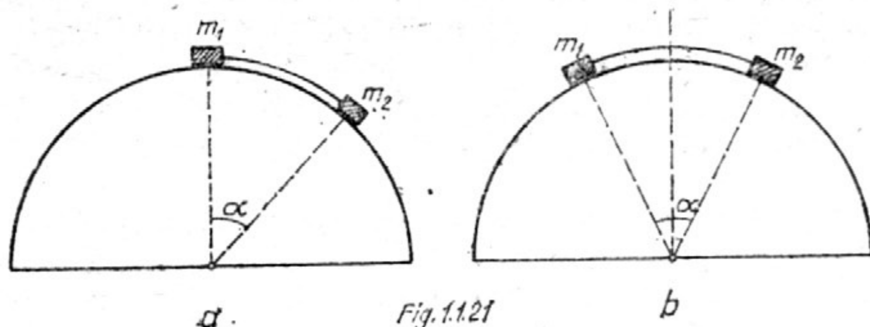


Fig. 1.1.21

Lăsînd corpurile libere accelerația în acest moment este $a = 6{,}00\ m/s^2$. Care va fi accelerația inițială dacă așezăm corpurile simetric? (Frecările sînt neglijabile).

1.1.22. O picătură de ploaie cade vertical. Ea întîmpină din partea aerului o forță de rezistență proporțională cu viteza. În momentul cînd viteza picăturii era $v_1 = 2{,}5\ m/s$, accelerația ei era $a_1 = 4{,}9\ m/s^2$. Lîngă suprafața Pămîntului picătura nimerește pe geamul lateral al unui vagon lăsînd o urmă înclinată cu unghiul $\alpha = 60°$ față de verticală. Aflați viteza vagonului.

1.2. CINEMATICA ȘI DINAMICA PUNCTULUI MATERIAL

Mișcarea rectilinie uniformă

1.2.1. Un tren se mișcă cu viteza $v = 54\ km/h$ spre Vest. Un călător de pe platforma vagonului simte vîntul suflînd dinspre Nord. Cînd viteza trenului se dublează, călătorul simte vîntul suflînd dinspre Nord-Vest. Care este viteza și direcția vîntului față de Pămînt?

1.2.2. Două trenuri merg paralele în sensuri opuse cu vitezele $v_1 = 18\ km/h$, $v_2 = 36\ km/h$. Din primul tren se aruncă spre al doilea un pachet cu viteza relativă $v' = 8{,}0\ m/s$, orizontal și perpendicular față de primul tren. Aflați viteza relativă și unghiul ei față de al doilea tren.

1.2.3. Un călător aflat într-un tren de lungime $l_1 = 900\ m$, care se mișcă cu viteza $v_1 = 54\ km/h$, vede un timp $t_1 = 60\ s$ un tren vecin de lungime $l_2 = 600\ m$ care merge paralel cu primul tren și în același sens. Cît timp va vedea fiecare călător trenul celălalt, dacă trenul al doilea se va mișca în sens opus cu aceeași viteză?

(*) **1.2.4.** Un elev înoată cu viteza $v_0 = 0{,}50\ m/s$. În ce direcție față de normala la țărm trebuie să înoate spre celălalt mal pentru ca apa care curge cu viteza $v_a = 1{,}00\ m/s$ să-l deplaseze cît mai puțin la vale?

1.2.5 a) Cum trebuie orientată o barcă pentru a ajunge la malul opus al unui rîu, indiferent în ce punct dar în timpul *minim*?

b) Ce viteză minimă a bărcii este necesară și cum trebuie orientată pentru a ajunge pe malul opus al rîului într-un anumit punct fix dat?

1.2.6. Steagul de pe catargul unei nave formează un unghi $\alpha_1 = 60°$ cu direcția navei, cînd nava are viteza $v = 20\ km/h$. Dublînd viteza navei, unghiul devine $\alpha_2 = 30°$. Aflați viteza vîntului. La ce viteză a navei steagul va sta perpendicular pe direcția navei?

1.2.7. În gara Ploiești ($s_0 = 60$ km de București) se află în repaus un tren. Din gara București pleacă în direcția Ploiești-Brașov un tren cu viteza $v_1 = 50$ km/h. După $t_0 = 1,5$ h de la plecarea acestuia, pleacă și trenul din Ploiești spre Brașov cu viteza $v_2 = 60$ km/h. După cît timp și unde se vor întîlni trenurile. Reprezentați pe aceeași diagramă legile mișcării.

1.2.8. O barcă cu motor parcurge pe un rîu distanța de la portul A la portul B în $\tau_1 = 1,5$ h și înapoi în $\tau_2 = 3,0$ h, avînd aceeași viteză față de apă. Cu cît timp mai tîrziu trebuie să plece această barcă din A spre a întîlni o barcă identică care pleacă din B spre A astfel încît după întîlnire cele două bărci să se întoarcă înapoi fiecare și să meargă pe apă durate egale?

1.2.9. Din două localități A și B pleacă simultan, rectiliniu uniform, unul spre celălalt, doi bicicliști. După întîlnire, primul biciclist după $t_1 = 10$ min ajunge în B, iar al doilea parcurgînd $s = 6,0$ km în $t_2 = 40$ min ajunge în A. Aflați viteza primului biciclist.

1.2.10. Undeva la mijlocul Mării Negre, pe fund, s-a instalat un microfon. În apropierea microfonului, pe fundul mării, considerat plan, s-a produs o explozie. Intervalul dintre primul și al doilea semnal înregistrat de microfon a fost $T_1 = 1,00$ s, iar între primul și al treilea (slab) $T_2 = 3,00$ s. Știind viteza sunetului în apă $c = 1,5$ km/s, aflați la ce distanță de microfon s-a produs explozia și la ce adîncime.

1.2.11. Un om aflat la distanță de o șosea observă la un moment dat, sub un unghi $\alpha = 75°$ față de normala la șosea, un camion venind cu viteza $v_0 = 10,0$ m/s, ca în figură. Sub ce unghi β față de normala la șosea

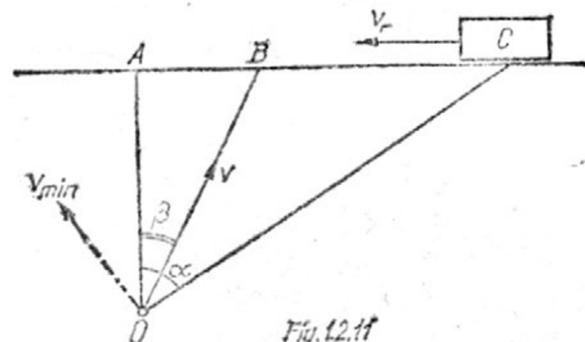


Fig. 1.2.11

trebuie să alerge rectiliniu omul cu viteza $v = 3,0$ m/s pentru a putea întîlni camionul? Cu ce viteză minimă trebuie să alerge omul pentru a putea întîlni camionul?

1.2.12. Un autoturism se mișcă cu viteza $v_1 = 22$ m/s în spatele unui autocamion care are viteza $v_2 = 15$ m/s. Cînd distanța dintre autoturism și autocamion devine $d_1 = 30$ m, conducătorul autoturismului se angajează în depășirea autocamionului, dar observă în același timp un autobuz venind din sensul opus cu viteza $v_3 = 18$ m/s. Ce distanță minimă d_3 trebuie asigurată între autobuz și autoturism pentru a efectua în siguranță manevra de depășire, astfel ca, după depășire, autoturismul să fie la distanța $d_2 = 40$ m în fața autocamionului?

1.2.13. O coloană de sportivi de lungime l aleargă cu viteza v. În întîmpinarea lor fuge un antrenor cu viteza u. La întîlnirea fiecărui sportiv cu antrenorul, sportivul o ia imediat înapoi cu aceeași viteză v. Ce lungime va avea coloana după ce antrenorul ajunge la ultimul sportiv? Discuție. Care SC este mai convenabil? Caz particular : $u = v$.

1.2.14. Pe o șosea merge o coloană de automobile cu viteza $v = 72$ km/h fiecare automobil avînd lungimea $l = 4,0$ m și păstrînd distanța $d = 20$

m între automobile. La întîlnirea cu o mașină a Poliției venind în întîmpinare cu viteza $u = 54$ km/h, fiecare șofer reduce viteza la $v' = 36$ km/h. Care va fi noua distanță d' dintre automobile? Care SC este mai convenabil pentru rezolvare? Care trebuie să fie distanța d minimă necesară, respectiv viteza v' minimă? Dacă lungimea coloanei era $L = 460$ m, care este noua lungime L' a coloanei?

1.2.15. Două avioane zboară unul spre celălalt cu aceeași viteză $v = 504$ km/h fiecare. Care va fi distanța dintre avioane în momentul cînd un semnal sonor ($c = 340$ m/s), emis de un avion și reflectat de celălalt, se întoarce înapoi la primul după un timp $T = 68$ s?

1.2.16. Într-un tren care merge cu viteza $v_1 = 72$ km/h loviturile unui ciocan se succed la un interval $T_1 = 1{,}00$ s. Ce interval de repetiție a loviturilor va înregistra un călător dintr-un alt tren care merge cu viteza $v_2 = 90$ km/h în sens opus primului, apropiindu-se, respectiv depărtîndu-se de primul tren? (Viteza sunetului $c = 340$ m/s).

1.2.17. Lîngă un perete vertical stau doi oameni la distanțele $l_1 = 50$ m, $l_2 = 63$ m de perete și la distanța $r = 20$ m între ei, ca în figură. Ce durată maximă τ trebuie să aibă un cuvînt pronunțat de primul om pentru ca cel de-al doilea să nu audă cuvîntul suprapus peste ecou? Viteza sunetului în aer $c = 340$ m/s.



Fig. 1.2.17

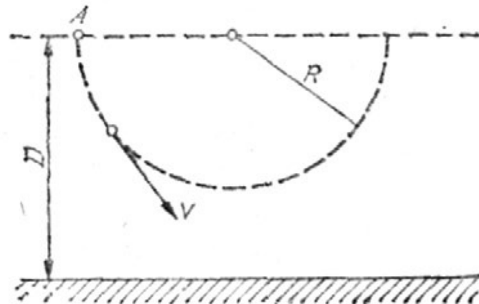


Fig. 1.2.20

(*) **1.2.18.** Două camioane se mișcă uniform pe două șosele rectilinii care se intretaie sub unghi drept, cu vitezele $v_1 = 60$ km/h, $v_2 = 50$ km/h. Cînd distanța dintre camioane este *minimă*, primul camion se află la distanța $s_1 = 5{,}0$ km de intersecția șoselelor. La ce distanță s_2 de intersecție se găsește în acest moment cel de-al doilea camion?

1.2.19. Într-un rîu care curge uniform cu viteza $u = 0{,}50$ m/s cade o piatră la distanța $d = 10{,}0$ m de țărm. După cît timp valurile ajung, cu viteza $v = 1{,}0$ m/s, la țărm în dreptul pietrei?

1.2.20. La distanța $D = 200$ m de țărm o barcă cu motor descrie pe lac un cerc de rază $R = 100$ m pornind din punctul A, cu viteza $v = 2{,}00$ m/s, ca în figură. După cît timp ajung primele valuri la țărm, viteza valurilor fiind $u = 0{,}50$ m/s?

Mișcarea rectilinie uniform variată

1.2.21. Se dă graficul forței în mișcarea rectilinie, viteza și coordonata inițiale fiind nule. Desenați graficul vitezei și graficul coordonatei în funcție de timp.

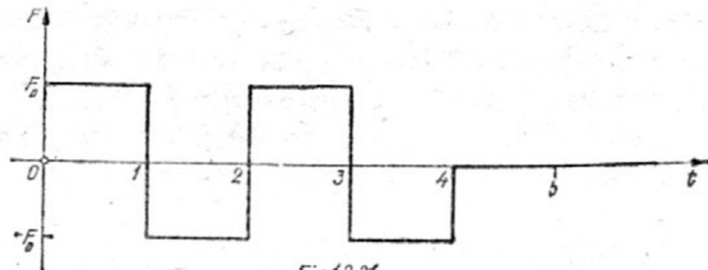


Fig. 1.2.21

1.2.22. O particulă pleacă din repaus din originea axei Ox sub acţiunea forţei reprezentate în figură. Reprezentaţi grafic viteza şi coordonata particulei în funcţie de timp.

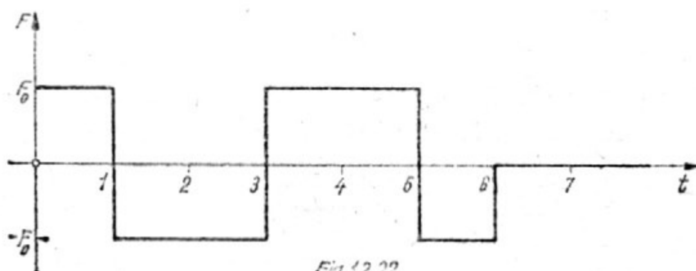


Fig. 1.2.22

1.2.23. Pentru o mişcare rectilinie pe axa Ox se dă graficul vitezei. Desenaţi graficul acceleraţiei şi al coordonatei, ştiind că $x = 0$ la $t = 0$.

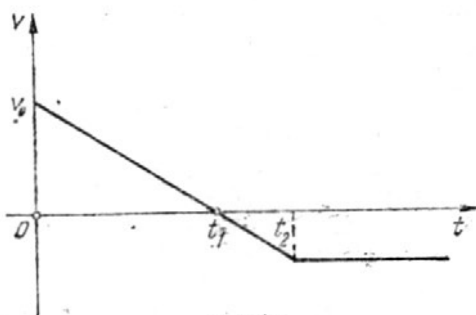


Fig. 1.2.23

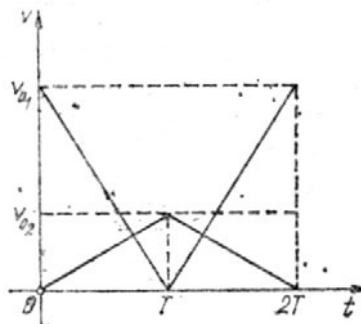


Fig. 1.2.24

*) **1.2.24.** Două particule pleacă la momentul $t = 0$ din originea axei Ox avînd vitezele reprezentate în figură. Aflaţi distanţele maximă şi minimă dintre ele.

1.2.25. Un corp porneşte din repaus uniform accelerat şi după parcurgerea unei distanţe atinge viteza $v = 14{,}1$ m/s. Ce viteză a avut corpul cînd a parcurs jumătate din distanţă?

1.2.26. Un motociclist frînează uniform. În timpul $t = 2{,}0$ s el parcurge jumătate din distanţa de frînare. În cît timp parcurge întreaga distanţă de frînare?

1.2.27. Un vagon frînat uniform a parcurs distanţa $s_m = 400$ m pînă la oprire. Ce distanţă a parcurs vagonul în prima jumătate a timpului de frînare?

1.2.28. Un vagon frînat uniform s-a oprit în timpul $t_m = 141$ s. În cît timp a parcurs prima jumătate din distanţa de frînare?

1.2.29. Un camion porneşte din repaus uniform accelerat şi după un timp atinge viteza $v = 10$ m/s. După aceasta motorul este decuplat şi camionul se mişcă uniform încetinit pînă la oprire. Aflaţi viteza medie a camionului pe întregul parcurs.

1.2.30. Un corp porneşte din repaus uniform accelerat şi parcurge o anumită distanţă. De cîte ori viteza medie din a doua jumătate a drumului este mai mare decît cea din prima jumătate?

1.2.31. Un tren începe să frîneze uniform și parcurge distanța $s = 75$ m pînă la oprire. În intervalul de timp de la $t_2 = 2,0$ s la $t_1 = 1,00$ s *înainte de oprire* trenul parcurge o distanță $d = 2,25$ m. Aflați viteza inițială a trenului.

1.2.32. Un vagonet parcurge distanța $s = 18$ km dintre două stații în $t = 20$ min și anume în primele $t_1 = 5,0$ min pornește uniform accelerat și apoi uniform încetinit pînă la oprire. Aflați accelerația pe prima porțiune.

1.2.33. Un vagonet pornește uniform accelerat fără viteză inițială și parcurge astfel o distanță $d_1 = 60$ m, după care merge uniform încetinit și parcurge astfel o distanță $d_2 = 40$ m pînă la oprire. Știind durata totală $T = 100$ s a mișcării, calculați accelerațiile în cele două mișcări.

1.2.34 Un mobil pornește uniform variat din originea axei Ox cu viteza inițială $v_0 = 15,0$ m/s. După un timp t' în punctul $x' = 10$ m viteza mobilului este $v' = -10,0$ m/s. Aflați distanța parcursă de mobil în acest timp și vitezele medii $\langle v \rangle$, $\langle |v| \rangle$.

1.2.35. Printr-o gară trece un tren marfar cu viteza constantă $v' = 3,0$ m/s, iar după $\tau = 10,0$ s trece prin gară un tren accelerat cu viteza $v_0 = 20,0$ m/s și care începe să frîneze cu accelerația $a = -2,00$ m/s². După cît timp se vor întîlni trenurile. Reprezentați pe aceeași diagramă legile mișcării trenurilor.

(*) **1.2.36.** Un camion parcurge o distanța $l = 400$ m cu viteză constantă v_0, după care frînează cu accelerația $|a| = 1,0$ m/s². Pentru ce viteză constantă v_0 timpul *total* de mișcare va fi minim?

1.2.37. Un copil coboară cu sania un plan înclinat de lungime $l_1 = 40$ m în timpul $t_1 = 10$ s, apoi parcurge pe planul orizontal încă $l_2 = 20$ m pînă la oprire. Aflați: a) viteza la baza planului, b) accelerațiile, c) timpul total de mișcare, d) viteza medie (în modul).

1.2.38. Un paralelipiped de lungime $l = 49$ cm lunecă fără frecare pe un plan înclinat de unghi $\alpha = 30°$. El eclipsează două surse punctiforme în timpul $t_1 = 0,20$ s, respectiv $t_2 = 0,10$ s, ca în figură. În cît timp fața frontală a paralelipipedului străbate distanța dintre surse?

1.2.39. De o parte și de alta a unui dublu plan înclinat (unghi diedru) cu unghiurile $\alpha_1 = 30°$ și $\alpha_2 = 60°$ față de orizontală, sînt așezate două corpuri de masă m_1, respectiv m_2, legate printr-un fir trecut peste un scripete ideal din vîrful planului. Se neglijează frecările. Diferența de nivel dintre corpuri este inițial $h = 1,00$ m. După $\tau = 0,53$ s cele două corpuri ajung la același nivel. Aflați raportul maselor.

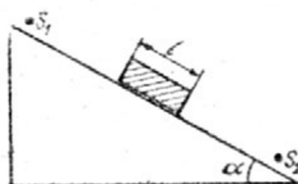


Fig. 1.2.38

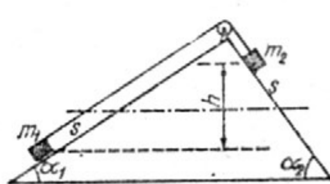


Fig. 1.2.39

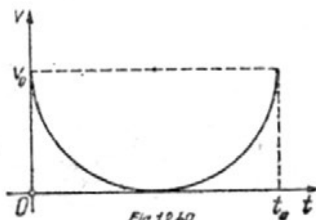


Fig. 1.2.40

1.2.40. Viteza unui corp variază după graficul din figură care reprezintă o semielipsă. Distanța parcursă de acest corp în timpul t_0 este egală cu distanța parcursă uniform în același timp de un alt corp cu viteza $v' = 8,6$ m/s. Aflați viteza inițială a primului corp.

1.2.41. De un tren de masă $M = 110$ t, care merge rectiliniu uniform, se desprinde la un moment dat ultimul vagon de masă $m = 10,0$ t. Acesta parcurge o distanță $d = 3,0$ km pînă se oprește. La ce distanță de vagon se va găsi în acest moment trenul, dacă forța de tracțiune a locomotivei

a rămas aceeași? Toate forțele de rezistență sînt proporționale cu greutatea.

1.2.42. De un tren care se mișcă rectiliniu uniform se desprinde la un moment dat ultimul vagon care parcurge uniform încetinit o distanță $d = 2{,}0$ km pînă se oprește. a) Știind că din momentul desprinderii trenul se mișcă cu accelerația $a_1 = 0{,}010$ m/s², iar vagonul cu accelerația $a_2 = -0{,}10$ m/s², aflați distanța s parcursă de tren de la desprindere pînă în momentul opririi vagonului. b) Știind masa trenului $M = 110$ t și a vagonului $m = 10{,}0$ t și considerînd că forțele de rezistență sînt proporționale cu greutatea, iar forța de tracțiune a locomotivei a rămas constantă aflați s.

1.2.43. Un tren de masă $M = 110$ t se mișcă orizontal rectiliniu uniform cu viteza $v_0 = 72$ km/h. La un moment dat se desprinde ultimul vagon de masă $m = 10{,}0$ t. După $t = 3{,}0$ min mecanicul pune frînă astfel încît după alte $t' = 20$ s se oprește simultan cu vagonul. Considerînd că toate forțele de rezistență sînt proporționale cu greutatea, aflați cu ce accelerație a frînat trenul.

Mișcarea sub acțiunea greutății

1.2.44. Dintr-un turn înalt se aruncă vertical în sus un corp cu viteza inițială $v_0 = 7{,}0$ m/s (în vid). Ce distanță parcurge corpul în timpul $t = 3\,v_0/g$? Care va fi distanța sa pînă la punctul de lansare?

1.2.45. O rachetă pornește vertical în sus cu accelerația $a = 4{,}9$ m/s². După $t = 5{,}0$ s motorul este oprit. Cu ce viteză cade racheta pe Pămînt?

1.2.46. Sunetul de la ciocnirea unei pietre de fundul unei prăpăstii se aude după $t = 10{,}0$ s de la începutul căderii pietrei. Aflați adîncimea prăpastiei, știind viteza sunetului $c = 340$ m/s.

1.2.47. Un corp în cădere liberă parcurge în ultimul interval de timp $\tau = 1{,}0$ s o distanță $l = 19{,}6$ m. De la ce înălțime a căzut corpul?

1.2.48. În ultimele secunde τ înainte de atingerea Pămîntului un corp în cădere liberă parcurge o fracțiune $f = 0{,}36 = 36\,\%$ din înălțimea totală de la care cade. Aflați ce fracțiune din timpul total de cădere reprezintă intervalul τ.

1.2.49. Un corp aruncat vertical în sus de pe sol trece printr-un punct de două ori: la momentul $t_1 = 1{,}0$ s, respectiv $t_2 = 2{,}0$ s de la lansare. Aflați înălțimea acestui punct.

1.2.50. Să se împartă înălțimea $h = 100$ m de la care cade liber un corp în $n = 10$ intervale de lungimi $s_i (i = 1, 2, \ldots, 10)$ parcurse în același timp fiecare.

1.2.51. Picăturile de pe streașina unui bloc cad la un interval de timp τ una după alta. Știind că după timpul $t = 2{,}0$ s de la desprinderea unei picături, distanța sa pînă la picătura precedentă este $l = 24{,}5$ m aflați intervalul τ.

1.2.52. De la o înălțime h cad liber fără viteză inițială două corpuri unul după altul, al doilea cade în momentul cînd primul a parcurs $d = 16{,}0$ m. În momentul cînd primul atinge suprafața Pămîntului, cel de-al doilea se află la înălțimea $h' = 104$ m de suprafața Pămîntului. Aflați înălțimea h.

1.2.53. Un corp cade liber de la o înălțime $h = 4{,}9$ m. De la ce înălțime trebuie aruncat simultan cu viteza $v_0 = 6{,}0$ m/s vertical în jos un al doilea corp pentru ca cele două corpuri să ajungă simultan pe Pămînt?

1.2.54. Două corpuri sînt aruncate vertical în sus cu aceeași viteză inițială $v_0 = 19,6$ m/s, la un interval de timp τ unul după altul. Determinați τ astfel ca cele două corpuri să se întîlnească la o înălțime egală cu o fracțiune $f = 0,64$ din înălțimea maximă la care ele pot ajunge.

1.2.55. De la o înălțime $h = 19,6$ m cade liber un corp. Cu ce viteză inițială v_0 trebuie aruncat în jos de la aceeași înălțime un al doilea corp, la un interval de timp $\tau = 1,00$ s după primul, pentru ca cele două corpuri să se întîlnească chiar la suprafața Pămîntului?

1.2.56. Două corpuri sînt aruncate vertical în sus cu vitezele inițiale $v_{01} = 29,4$ m/s și $v_{02} = 19,6$ m/s, corpul 2 la un interval de timp τ după primul. Între ce limite trebuie să fie cuprins τ pentru ca cele două corpuri să se întîlnească în *aer*. Reprezentați pe aceeași diagramă legea mișcării.

1.2.57. Un corp este aruncat vertical în sus cu viteza inițială $v_{01} = 9,8$ m/s. După un timp $\tau = 1,00$ s se aruncă după el un al doilea corp. Determinați viteza inițială v_{02} a acestuia astfel ca cele două corpuri să se întîlnească în momentul cînd corpul 2 este la înălțimea sa maximă. Reprezentați legea mișcării.

1.2.58. O rachetă pornește din repaus vertical în sus de pe suprafața unei planete. În timpul $\tau = 3,0$ s de la pornire toate obiectele din rachetă apăsau pe platane sau întindeau resorturile cu forțe de $n = 1,8$ ori mai mari decît în racheta în repaus. După timpul τ și pînă la căderea rachetei pe planetă toate obiectele din rachetă se aflau în stare de imponderabilitate. Cît timp s-a aflat în zbor racheta? (Se consideră $g =$ const)

(*) **1.2.59.** Două bile sînt aruncate vertical în sus cu vitezele inițiale $v_{01,2}$ la un interval de timp τ una după alta. Determinați τ astfel ca bilele să se întîlnească după un timp minim de la aruncarea primei bile.

1.2.60. Un corp este aruncat dintr-un turn cu viteza orizontală $v_0 = 9,8$ m/s. Aflați raza de curbură a traiectoriei în punctul unde ajunge corpul după $\tau = 1,00$ s.

1.2.61. Ce viteză orizontală poate avea un titirez conic cu $h = 4,9$ cm, $r = 2,5$ cm, astfel încît sărind de pe masă (fără frecări) să nu se lovească de marginea mesei? (Vd. figura).

(*) **1.2.62.** Un schior intră cu viteza $v_0 = 12$ m/s pe o trambulină al cărei capăt este orizontal. Neglijînd frecările, aflați pentru ce înălțime h a trambulinei „bătaia" b (distanța orizontală) după părăsirea trambulinei va fi maximă.

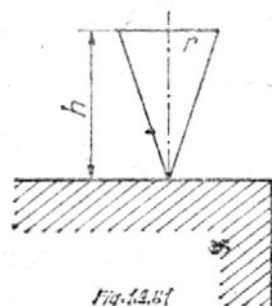


Fig. 1.2.61

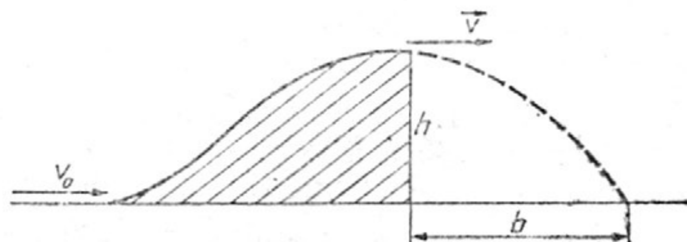


Fig. 1.2.62

1.2.63. Dintr-un turn se aruncă simultan, orizontal, în sensuri opuse, două corpuri cu vitezele $v_1 = 4,0$ m/s, respectiv $v_2 = 25$ m/s. După cît timp unghiul dintre vitezele celor două corpuri devine egal cu 90°?

1.2.64. Dintr-un furtun iese (la nivelul solului) apă cu viteza $v_0 = 10,0$ m/s. Ce arie maximă poate fi udată? ($g = 10$ m/s²).

1.2.65. Un elev aruncă spre vîrful unui copac de înălţime $h=10,0$ m, situat la distanţa $b = 30$ m, o piatră care cade la rădăcina copacului. Ce viteză i-a imprimat pietrei?

1.2.66. Un corp este lansat cu viteza v_0 în sus de-a lungul planului înclinat din figură. Se cunosc: $v_0 = 10$ m/s, $\alpha = 45°$, $h = 4,0$ m. Aflaţi înălţimea maximă la care se ridică corpul (frecările sînt neglijabile).

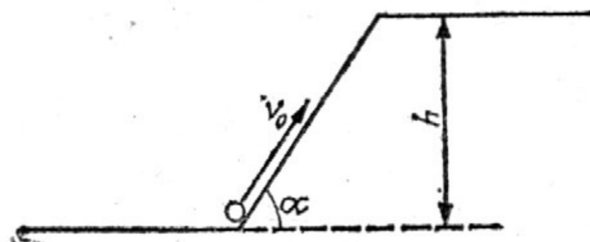


Fig.1.2.66

1.2.67. Un elev aruncă o piatră de la înălţimea $h = 2,00$ m peste un dig de înălţime $H = 6,4$ m şi lăţime $b = 1,00$ m. Cu ce viteză minimă trebuie să arunce, sub ce unghi şi la ce distanţă de dig?

1.2.68. Două corpuri sînt aruncate cu aceeaşi viteză iniţială, sub acelaşi unghi faţă de orizontală, unul liber în aer (vid), celălalt de-a lungul unui plan înclinat fără frecări. Care corp se va ridica mai sus?

1.2.69. O particulă de masă $m = 0,40$ kg are la $t = 0$ viteza $v_0 = 4,0$ m/s. Cum trebuie aplicată particulei o forţă constantă $\vec{F}$ de modul $F = 3,2$ N (alte forţe nu există) astfel ca vectorul viteză să se rotească cu un unghi $\alpha = 30°$ fără să-şi schimbe modulul? Care va fi modulul vectorului deplasare pentru acest interval de timp?

(**) **1.2.70.** O particulă are traiectoria plană $y = kx - bx^2$, unde $k = 3,0$, $b = 2,0$ m^{-1}. Ştiind că particula are acceleraţia constantă paralelă cu axa Oy şi în sens opus $|\vec{a}| = a = 10$ m/s^2, aflaţi viteza particulei în originea axelor de coordonate.

(*) **1.2.71.** Dintr-un turn de înălţime $h = 4,9$ m se aruncă o bilă cu viteza $v = 9,8$ m/s. Sub ce unghi trebuie aruncată pentru ca bătaia, măsurată de la baza turnului să fie maximă? Cît este această bătaie? Cît timp durează mişcarea?

1.2.72. Un corp este aruncat (în vid) cu viteza iniţială $v_0 = 19,6$ m/s sub un unghi $\alpha_0 = 45°$ faţă de orizontală. După cît timp şi la ce înălţime vectorul viteză formează un unghi $\alpha = 30°$ cu orizontala?

1.2.73. Două corpuri sînt aruncate din acelaşi punct cu aceeaşi viteză iniţială $v_0 = 10,0$ m/s sub unghiurile $\alpha_1 = 30°$, respectiv $\alpha_2 = 60°$. Care este distanţa dintre corpuri după $t = 1,00$ s?

1.2.74. O ţintă de pe un deal se vede sub unghiul $\beta = 6°17'$ faţă de orizontală. Distanţa pe orizontală pînă la ţintă este $d = 4,00$ km. Ştiind viteza iniţială $v_0 = 280$ m/s a obuzului, aflaţi unghiul α de tragere. Care este viteza minimă necesară pentru a atinge ţinta?

(**) **1.2.75.** Un corp de masă $m = 1,00$ kg este aruncat vertical în sus cu viteza $v_0 = 10,8$ m/s şi se întoarce înapoi pe Pămînt cu viteza $v' = 8,8$ m/s. Forţa de frecare cu aerul este proporţională cu viteza. Aflaţi: a) timpul de mişcare al corpului, b) puterea medie disipată prin frecare.

(*) **1.2.76.** Într-o sală de sport, de înălţime $H = 7,0$ m, respectiv 4,6 m, se aruncă o bilă cu viteza $v_0 = 14$ m/s, de la o înălţime $h = 2,1$ m. La ce distanţă maximă pe podea se poate arunca bila? Dar într-un coş situat la înălţimea $h' = 4,0$ m?

1.2.77. Dintr-un punct de pe suprafaţa Pămîntului se aruncă simultan o mulţime de bile identice, cu aceeaşi viteză $v_0 = 4{,}0$ m/s, simetric în toate părţile. Care este raza b a cercului situat pe suprafaţa Pămîntului în exteriorul căruia cad $f = 25$ % din numărul total de bile?

1.2.78. De la o înălţime $H = 17{,}3$ m cade liber un corp. Simultan de pe Pămînt, la o distanţă $d = 30$ m de verticala de cădere a primului corp, se aruncă un alt corp, astfel încît cele două corpuri să se întîlnească în aer. Aflaţi viteza şi unghiul de lansare.

1.2.79. Din cauza rotaţiei Pămîntului corpurile nu cad după direcţia forţei de greutate (a firului cu plumb). Evaluaţi deviaţia unui corp care cade de la o înălţime $h = 98$ m la latitudinea $\varphi = 45°$.

Forţe de frecare

1.2.80. Poate o forţă de frecare să accelereze un corp? Argumentaţi!

1.2.81. O bară uniformă şi omogenă de lungime l, lunecă accelerat pe un plan orizontal rugos, trasă fiind la capete de forţele orizontale longitudinale $F_{1,2}$ de sensuri opuse. Aflaţi tensiunea din bară la distanţa x de primul capăt.

1.2.82. Două corpuri de mase $m_1 = 6{,}0$ kg, $m_2 = 4{,}0$ kg sînt aşezate pe un plan orizontal şi legate între ele printr-un fir orizontal care rezistă pînă la o tensiunea de rupere $T_r = 80$ N. Coeficientul de frecare la lunecare este acelaşi pentru ambele corpuri. Cu ce forţă orizontală maximă putem trage corpul m_1 pentru a nu se rupe firul în timpul mişcării?

1.2.83. Un tren de masă $M = 1000$ t se mişcă rectiliniu uniform. De tren se desprinde o garnitură de masă $m = 100$ t. Considerînd un coeficient de frecare echivalent $\mu = 5{,}0 \cdot 10^{-3}$ şi că forţa de tracţiune a locomotivei rămîne neschimbată, aflaţi acceleraţia relativă a locomotivei faţă de garnitură (pînă la oprirea acesteia).

1.2.84. De un tren care merge orizontal rectiliniu uniform cu viteza $v_0 = 80$ km/h se desprinde o garnitură cu masă egală cu o fracţiune $f = 1/3$ din masa trenului. După un anumit timp viteza garniturii desprinse se micşorează de $n = 2{,}0$ ori. Aflaţi viteza locomotivei în acest moment, dacă forţa de tracţiune a rămas neschimbată, iar forţele de rezistenţă sînt proporţionale cu greutatea.

1.2.85. Două corpuri 1 şi 2 sînt legate printr-un fir orizontal şi aşezate pe un plan orizontal avînd acelaşi coeficient de frecare. Dacă de corpul 1 se trage orizontal cu o forţă $F = 100$ N, corpurile se mişcă accelerat şi tensiunea din fir este $T_1 = 30$ N. Care va fi tensiunea din fir dacă tragem cu aceaşi forţă de corpul 2?

1.2.86. Pe platforma orizontală a unui vagonet de masă $M = 40{,}0$ kg se află o ladă de masă $m = 10{,}0$ kg de care se trage orizontal cu o forţă F. Între vagonet şi şine frecarea este neglijabilă, iar între ladă şi platformă $\mu = 0{,}40$. Pentru ce valoare a forţei F începe lunecarea lăzii?

1.2.87. O forţă $F = 60$ N este aplicată unei sănii de masă $m = 40$ kg sub unghiul $\alpha = 30°$ faţă de orizontală, o dată în sus, o dată în jos. Coeficientul de frecare la alunecare $\mu = 0{,}10$. De cîte ori acceleraţia în primul caz este mai mare decît în al doilea?

1.2.88. O ladă este tîrîtă uniform accelerat în sus pe un plan înclinat. Forţa necesară este minimă cînd unghiul dintre forţă şi planul înclinat este $\beta = 15°$. Aflaţi unghiul de frecare dintre ladă şi plan.

1.2.89. Pe un plan orizontal stă o scîndură de masă $M = 10{,}0$ kg peste care este așezat un corp de masă $m = 7{,}3$ kg. Unghiul de frecare la alunecare între scîndură și plan este $\varphi_1 = 15°$, iar între corp și scîndură $\varphi_2 = 30°$. Cu ce forță minimă trebuie trasă scîndura pentru ca m să lunece pe scîndură?

1.2.90. În figură se dau: $l = 2{,}00$ m, $\mu = 0{,}20$. Scîndura începe să se miște orizontal cu accelerația $a = 3{,}0$ m/s². În cît timp corpul cade de pe scîndură?

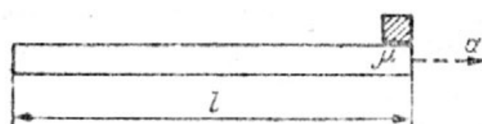


Fig. 1.2.90

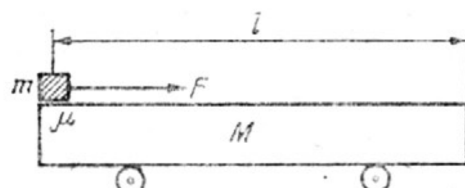


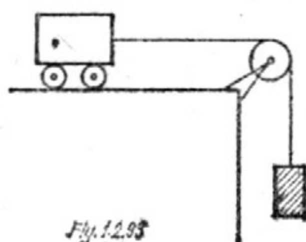
Fig. 1.2.91

1.2.91. Pe platforma orizontală a unui vagonet de masă $M = 20$ kg care se poate mișca orizontal fără frecare, se așează o ladă de masă $m = 2{,}0$ kg de care se trage orizontal cu o forță F. Lungimea platformei în direcția tragerii este $l = 1{,}00$ m, iar coeficientul de frecare la lunecare între ladă și platformă este $\mu = 0{,}25$.

a) Pentru ce valoare a forței F lada începe să lunece pe platformă?
b) După cît timp lada cade de pe platformă dacă $F = 20$ N?

1.2.92. Trei corpuri de mase egale $m = 1{,}00$ kg sînt așezate pe un plan orizontal unul după altul și legate între ele prin fire orizontale, care rezistă pînă la o tensiune de rupere $T_r = 4{,}0$ N. Coeficienții de frecare la lunecare sînt respectiv $\mu_1 = 0{,}30$, $\mu_2 = 0{,}20$, $\mu_3 = 0{,}10$. De corpul 3 se trage orizontal pe direcția corpurilor cu o forță lent crescătoare. Care dintre cele două fire de legătură se va rupe mai întîi și la ce valoare a forței F? Dar dacă tragem de corpul 1?

1.2.93. Un cărucior este legat printr-un fir de o greutate ca în figură. Scripetele este ideal și frecarea la rostogolire este neglijabilă. Dînd drumul căruciorului acesta se mișcă cu o anumită accelerație. Dacă blocăm o osie cu roți căruciorul se mișcă cu o accelerație de $k = 1{,}5$ ori mai mică. De cîte ori se micșorează accelerația dacă blocăm toate roțile căruciorului?


Fig. 1.2.93

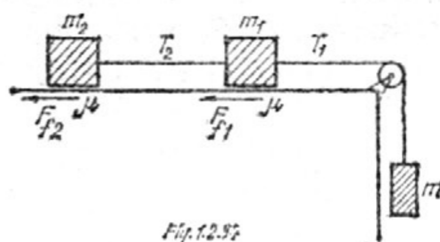


Fig. 1.2.94

1.2.94. În figură $m_1 = 7{,}0$ kg, $m_2 = 5{,}0$ kg, $m = 1{,}0$ kg. Scripetele este ideal, iar coeficientul de frecare între corpuri și masă $\mu = 0{,}10$. Inițial înainte de a lăsa sistemul liber, $T_{2in} = 0$. Aflați tensiunile din fire și forțele de frecare.

1.2.95. Pe o masă orizontală stă o lădiță de masă $M = 3{,}00$ kg și coeficientul de frecare la lunecare $\mu = 0{,}30$. De lădiță este prinsă o sfoară orizontală, trecută peste un scripete ideal și celălalt capăt atîrnînd liber. La un moment dat de capătul liber se agață o pisică de masă $m = 1{,}50$ kg, în același moment lădița începe să lunece și pisica se cațără pe sfoară astfel încît rămîne la același nivel față de Pămînt. Aflați accelerația lădiței.

1.2.96. Un corp de masă $m_1 = 8,0$ kg stă pe o scîndură de masă $m_2 = 2,0$ kg, care la rîndul ei stă pe o masă orizontală fără frecări. Coeficientul de frecare între corp și scîndură este $\mu = 0,50$. Scîndura este trasă de o forță orizontală $F = c \cdot t$, unde $c = 9,8$ N/s. În ce moment începe lunecarea corpului și la ce moment accelerația scîndurii devine de $n = 3,0$ ori mai mare decît a corpului?

1.2.97. La capătul unei scînduri de lungime $l = 2,00$ m și masă $m_2 = 2,00$ kg este așezat un mic corp de masă $m_1 = 0,50$ kg. Coeficientul de frecare la lunecare între scîndură și planul orizontal este $\mu_2 = 0,30$, iar între corp și scîndură este $\mu_1 = 0,20$. Ce viteză trebuie imprimată scîndurii pentru ca ea să iasă de sub corp?

1.2.98. O săniuță coboară liber, fără viteză inițială, pe un plan înclinat după care intră pe un plan orizontal (racordat cu cel înclinat) și se oprește undeva. Știind că din punctul de oprire vîrful planului înclinat se vede sub unghiul $\beta = 6,0°$ față de orizontală, aflați unghiul de frecare dintre săniuță și zăpadă.

1.2.99. Pentru a menține în repaus un corp pe un plan înclinat de unghi $\alpha = 45°$ trebuie aplicată o forță minimă în sus de-a lungul planului de $n = 2,0$ ori mai mică decît pentru a-l trage uniform în sus de-a lungul planului. Aflați coeficientul de frecare la lunecare.

1.2.100. Pentru a menține în echilibru un corp pe un plan înclinat de unghi $\alpha = 30°$ trebuie aplicată corpului o forță minimă normală pe plan de $n = 2,5$ ori mai mare decît o forță minimă orizontală. Aflați coeficientul de frecare dintre corp și plan.

1.2.101. O pană cu unghi de deschidere $\alpha = 30°$ este bătută într-un butuc de lemn. Determinați coeficientul de frecare minim între pană și butuc pentru ca pana să nu sară înapoi (greutatea panei este neglijabilă).

1.2.102. Un corp de masă $m = 20$ kg este tras cu forța $F = 120$ N pe un plan orizontal. Dacă forța face unghiul $\alpha_1 = 60°$ cu orizontala, corpul se mișcă uniform. Aflați accelerația corpului dacă forța face unghiul $\alpha_2 = 30°$ cu orizontala.

1.2.103. Un corp este tras de o forță dată sub un unghi α față de orizontală. Unghiul de frecare este $\varphi = 18°$. Pentru ce unghi α accelerația va fi maximă?

1.2.104. Un lanț este așezat pe zidul din figură, unde $\alpha = 30°$, $\mu = 0,27$. Aflați raportul lungimilor l_2/l_1 în momentul cînd lanțul începe să lunece spre dreapta.

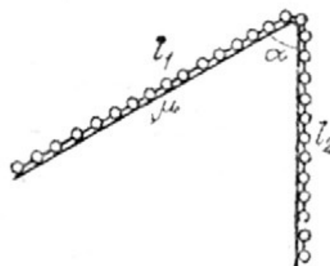


Fig. 1.2.104

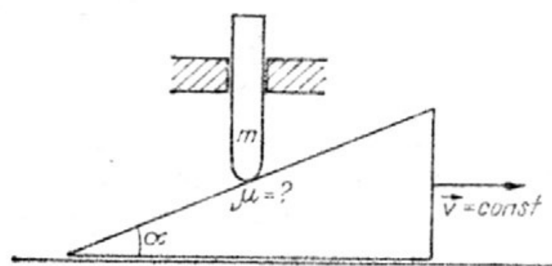


Fig. 1.2.106

1.2.105. Un corp este lansat de-a lungul unui plan înclinat cu viteza inițială v_0. Unghiul de frecare dintre corp și plan este $\varphi = 30°$. Ce unghi de înclinare trebuie să aibă planul pentru ca corpul să parcurgă pe el o distanță minimă?

1.2.106. În figură tija de masă $m = 0,50$ kg se mişcă fără frecare în ghidajele sale. Ştiind că prisma de unghi $\alpha = 15°$ se mişcă rectiliniu uniform pe masă fără frecare, aflaţi coeficientul de frecare la lunecare dintre tijă şi prismă, precum şi forţa cu care tija apasă pe prismă.

1.2.107. Un corp lansat în sus de-a lungul unui plan înclinat de unghi $\alpha = 45°$ revine înapoi la baza planului astfel încît timpul de coborîre este cu $f = 50\ \%$ mai mare decît timpul de urcare. Care este coeficientul de frecare? De cîte ori este mai mare viteza de lansare decît viteza de sosire? Dar acceleraţia de urcare faţă de cea de coborîre?

1.2.108. Pe faţa unei prisme cu unghiul $\alpha = 30°$ cu orizontala se pune un corp care are unghiul de frecare cu faţa prismei $\varphi = 15°$. Cu ce acceleraţie orizontală putem mişca prisma pentru ca corpul să nu lunece?

1.2.109. În sistemul din figură se dau $m = 10,0$ kg, $M = 10,0$ kg, $\alpha = 30°$, $\varphi = 15°$ (unghi de frecare). Cu ce forţă orizontală F trebuie

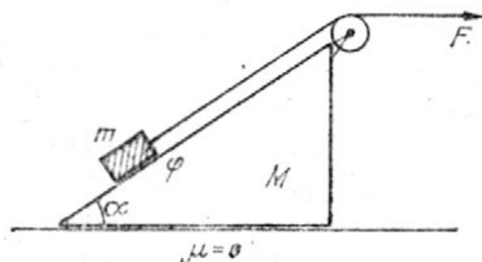


Fig. 1.2.109

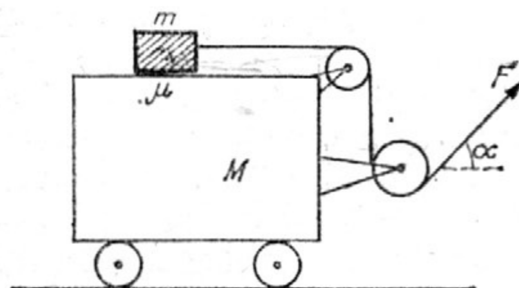


Fig. 1.2.110

tras pentru ca corpul m să urce pe plan şi să nu se desprindă de plan? (Scripetele este ideal).

1.2.110. Pe platforma unui vagonet de masă $M = 3,0$ kg (care se mişcă fără frecări) este aşezat un corp de masă $m = 2,0$ kg care are coeficientul de frecare $\mu = 0,40$ cu platforma. Care este forţa minimă necesară, sub unghiul $\alpha = 30°$, pentru ca m să lunece pe platformă?

1.2.111. Cu ce acceleraţie orizontală trebuie deplasat blocul din figură pentru ca cele două corpuri identice să *nu* lunece pe bloc, coeficientul de frecare la lunecare fiind $\mu = 0,60$? (Scripetele este ideal).

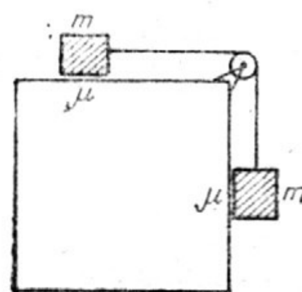


Fig. 1.2.111

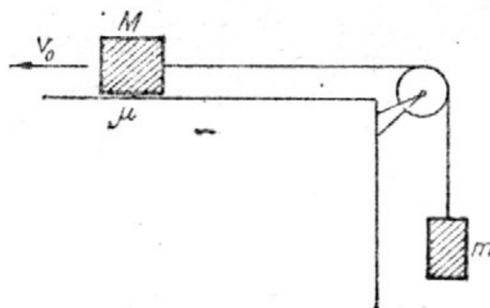


Fig. 1.2.112

1.2.112. În sistemul din figură se cunosc $m = 1,00$ kg, $M = 1,00$ kg, $\mu = 0,50$ şi viteza iniţială $v_0 = 4,9$ m/s. Aflaţi ce distanţă parcurge corpul M în timpul $t = 2t_m$, unde t_m este timpul pînă la oprire.

1.2.113. Se dă sistemul din figură pentru care coeficientul de frecare între corpuri $\mu = 0,20$, iar planul orizontal este fără frecări. Aflaţi pentru ce raport m_1/m_2 corpurile $m_{1,2}$ se vor mişca cu aceeaşi acceleraţie.

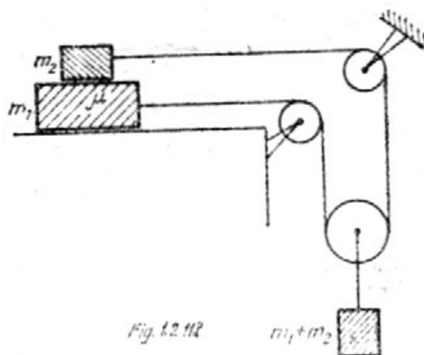


Fig. 1.2.112

1.2.114. Un creion rotund lunecă uniform într-o carte deschisă formînd un unghi diedru cu deschiderea $\beta = 60°$ și cu muchia înclinată cu $\alpha = 30°$ față de orizontală. Aflați coeficientul de frecare la alunecare.

1.2.115. Pe o șosea, înclinată cu $\alpha = 0{,}10$ rad, acoperită cu polei, coboară un camion, avînd coeficientul de frecare la lunecare $\mu = 0{,}020$. Cu ce accelerație trebuie să coboare pentru ca roțile să nu patineze? (Toate roțile sînt motoare.)

1.2.116. Pe un drum rectiliniu orizontal de lungime $l = 100$ m situat pe un plan înclinat de unghi $\alpha = 15°$ circulă un cărucior. Coeficientul de frecare între roți și teren $\mu = 0{,}30$. Care este timpul minim posibil de parcurgere?

1.2.117. Un corp este tras accelerat în sus de-a lungul unui plan înclinat de unghi $\alpha = 30°$ cu o forță F care face unghiul β cu planul înclinat. Unghiul de frecare cu planul $\varphi = 15°$. Pentru ce unghi β forța F va fi minimă?

1.2.118. Un schior atinge la coborîre pe panta de $\alpha = 20°$ a unui munte o viteză limită $v_0 = 72$ km/h, unghiul de frecare cu zăpada fiind $\varphi = 5{,}0°$, iar forța de rezistență din partea aerului fiind proporțională cu pătratul vitezei. Ce viteză limită poate atinge schiorul pe o pantă cu $\alpha' = 35°$?

1.2.119. Pe un plan înclinat de unghi $\alpha = 6{,}0°$ stă o scîndură de masă $m = 35$ kg avînd unghiul de frecare $\varphi = 11°28'$ cu planul. Cu ce accelerație trebuie să alerge un om de masă $M = 70$ kg pe scîndură pentru ca scîndura să lunece uniform?

1.2.120. Într-o sanie este suspendat un corp printr-un fir prins de tavan. Sania lunecă liber pe un plan înclinat, unghiul de frecare cu zăpada fiind $\varphi = 5{,}0°$. Care va fi unghiul de deviere al firului față de normala la planul înclinat?

1.2.121. La ce înălțime maximă poate urca un automobil cu motor funcționînd permanent și cu toate roțile motoare, pe un plan înclinat de unghi α, acoperit cu polei avînd coeficientul de frecare $\mu < \operatorname{tg} \alpha$, dacă la baza planului viteza era v_0? *Aplicație* : $v_0 = 20$ m/s, $\alpha = 6{,}0°$, $\varphi = 3{,}0°$.

1.2.122. Pe un plan înclinat de unghi $\alpha = 45°$ stă o scîndură de masă $M = 1{,}00$ kg, lungime $l = 1{,}40$ m, și coeficient de frecare la lunecare cu planul înclinat $\mu = 0{,}70$. Peste scîndură se pune la capătul superior un cub neted de masă $m = 0{,}50$ kg, cu frecare neglijabilă față de scîndură. Inițial sistemul este în repaus. Aflați timpul de lunecare a cubului peste scîndură.

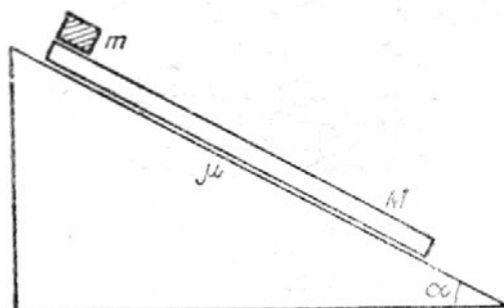


Fig. 1.2.122

1.2.123. Se consideră sistemul din figură în care se cunosc : $m_1 = 2,00$ kg, $m_2 = 6,00$ kg, $\alpha = 30°$, $\mu = 0,26$. Scîndura orizontală este suficient de lungă și lunecă fără frecare pe planul orizontal. Forța F crește proporțional cu timpul : $F = c \cdot t$, unde $c = 2,0$ N/s ; forța începe să acționeze în momentul $t = 0$. Să se reprezinte grafic accelerația scîndurii în funcție de timp.

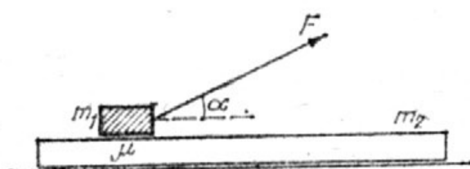


Fig. 1.2.123

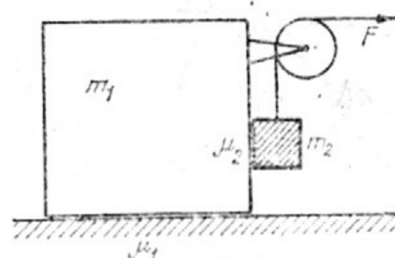


Fig. 1.2.124

1.2.124. Se consideră sistemul din figură în care $m_1 = 2,00$ kg $m_2 = 1,00$ kg și coeficienții de frecare $\mu_1 = 0,20$, $\mu_2 = 0,40$. Scripetele este ideal și corpul m_1 nu se răstoarnă. Pentru diferite valori ale forței F sistemul pornește din repaus. Reprezentați grafic accelerația $a_1 = f(F)$.

1.2.125. Peste un scripete ideal este trecut un fir ideal avînd la un capăt un corp de masă $m_1 = 2,00$ kg, iar de-a lungul celuilalt capăt lunecă cu frecare un inel de masă $m_2 = 3,00$ kg cu accelerația relativă $w = 9,8$ m/s² față de fir, orientată în jos. Aflați forța de frecare dintre inel și fir și accelerațiile corpurilor față de Pămînt. Care va fi tensiunea din firul de suspensie a scripetelui ?

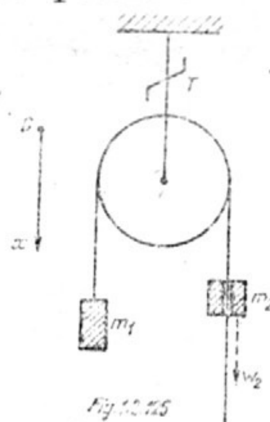


Fig. 1.2.125

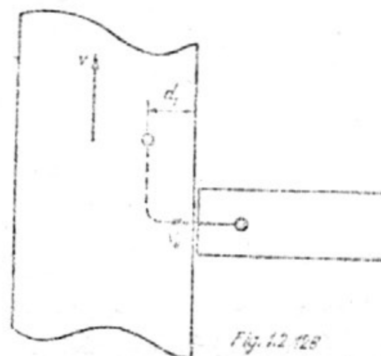


Fig. 1.2.126

1.2.126. Un automat împinge piesele cu viteza $v_0 = 1,00$ m/s transversal peste o bandă rulantă care merge cu viteza $v = 2,00$ m/s. Piesele se opresc la distanța d_1 de marginea benzii, ca în figură. Ce viteză trebuie să aibă banda pentru ca piesele să se oprească la distanța $d_2 = nd_1$, $n = 1,50$, de marginea benzii ?

1.2.127. Un corp de masă $m = 500$ g așezat pe un plan orizontal este fixat de capătul inferior al unui resort vertical de constantă elastică $k = 10,0$ N/m, capătul superior fiind prins de tavan la înălțimea $l_0 = 10$ cm cînd resortul este nedeformat. Trăgînd orizontal planul, resortul deviază în noua poziție de echilibru cu $\alpha = 60°$ față de verticală. Aflați coeficientul de frecare la lunecare.

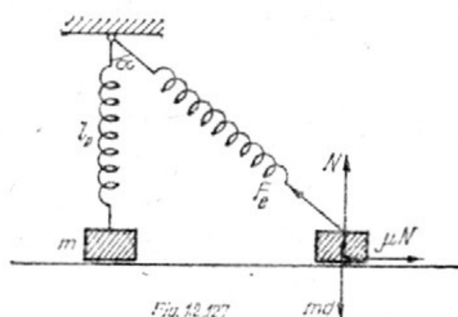


Fig. 1.2.127

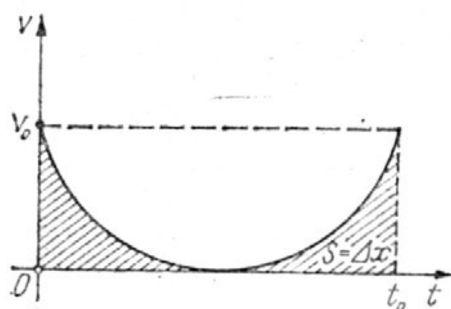


Fig. 1.2.128

** **1.2.128.** Viteza unui corp variază după graficul din figură care reprezintă o jumătate de elipsă. Cunoscînd viteza medie în această mișcare $\bar{v} = 8,6$ m/s, aflați viteza inițială v_0 a corpului.

* **1.2.129.** Două mobile pleacă simultan din originea axei Ox și se mișcă respectiv după legea $x_1 = At + Bt^2$, $x_2 = Ct + Dt^2 + Et^3$. Aflați viteza relativă a primului mobil față de al doilea.

* **1.2.130.** Un mobil se mișcă după legea $x = At^4 - Bt^2$, A, B — constante pozitive. Aflați viteza extremă pe care o atinge mobilul. Faceți graficul calitativ $v = v(t)$.

* **1.2.131.** Legea vitezei unui mobil pentru intervalul de timp $t \in [0, \tau]$ este $v = At + Bt^2$, A, B — constante. Aflați viteza medie a mobilului în acest interval de timp.

* **1.2.132.** În intervalul $t \in (t_1, t_2)$, $t_{1,2} > 0$ legea mișcării unui mobil este descrisă satisfăcător de o funcție iperbolică $x = b/t$, $b > 0$. Aflați legea vitezei și legea accelerației.

** **1.2.133.** Accelerația unei rachete crește proporțional cu pătratul timpului : $a = At^2$. La momentul $t = 0$ avem $v = 0$ și $x = 0$ (condițiile inițiale). Aflați legea vitezei și legea mișcării.

** **1.2.134.** O particulă pornește cu viteza inițială v_0 avînd accelerația $a = \omega^2 x$. Aflați legea vitezei și legea mișcării.

** **1.2.135.** Cunoscînd accelerația $a = f(t)$ și timpul pînă la oprire t_m al unui mobil, a) scrieți legea vitezei în funcție de timp și b) exprimați distanța pînă la oprire x_m printr-o singură integrală.

* **1.2.136.** Un vehicul începe să frîneze astfel încît legea mișcării încetinite este $x = At - Bt^3$. Știind valoarea forței de frînare în momentul opririi F_0, aflați legea forței de frînare.

* **1.2.137.** Un corp începe să lunece din vîrful unui plan înclinat a cărui bază este b, iar coeficientul de frecare este μ. Pentru ce unghi al planului timpul de coborîre este minim și cît este acest timp?

* **1.2.138.** Un vehicul de masă m pornește la un moment dat astfel, încît legea mișcării sale este $x = At^2 - Bt^3$. Aflați : a) timpul și distanța pînă la oprire, b) forța de tracțiune F, c) reprezentați grafic pe aceeași diagramă x, v, F.

** **1.2.139.** Asupra unei particule de masă m acționează forța $F = F_0 \cos \omega t$. Știind condițiile inițiale : la $t = 0$ avem $v = 0$ și $x = 0$ (particula pornește din repaus din originea axei Ox), deduceți legea vitezei și legea mișcării.

** **1.2.140.** Un şlep porneşte din repaus tras de o forţă orizontală constantă F. El întîmpină din partea apei o forţă de rezistenţă proporţională cu: a) viteza, $F_r = -kv$, b) pătratul vitezei, $F_r = -kv^2$. Aflaţi legea vitezei şi legea mişcării.

** **1.2.141.** Un glonţ porneşte cu viteza iniţială v_0. El întîmpină din partea aerului o forţă de rezistenţă proporţională cu cubul vitezei: $F_r = -kv^3$. Neglijînd gravitaţia, aflaţi legea vitezei şi legea mişcării.

** **1.2.142.** Variind înclinarea unui plan înclinat s-a găsit că un corp aşezat pe acest plan lunecă uniform la un unghi $\varphi = 30°$. Fixînd înclinarea la un unghi $\alpha = 45°$ s-a găsit că viteza limită de lunecare liberă a corpului în jos pe plan atinge valoarea $c = 4{,}0$ m/s, forţa de rezistenţă a aerului fiind proporţională cu pătratul vitezei corpului. Lansînd acum corpul cu viteza iniţială $v_0 = 2{,}0$ m/s în sus de-a lungul planului înclinat (cu $\alpha = 45°$), aflaţi cu ce viteză se întoarce corpul înapoi la baza planului.

(*) **1.2.143.** Un punct material execută oscilaţii foarte mici pe o curbă netedă (fără frecări) situată în planul vertical, în jurul minimului curbei, sub acţiunea greutăţii. Aflaţi perioada micilor oscilaţii, ştiind raza de curbură a curbei în punctul de minim R_0.

** **1.2.144.** O barcă de masă m întîmpină din partea apei o forţă de rezistenţă proporţională cu pătratul vitezei, cu constanta de proporţionalitate k. După cît timp viteza iniţială v_0 a bărcii se micşorează de n ori?

** **1.2.145.** O barcă cu motor întîmpină din partea apei o forţă de rezistenţă proporţională cu pătratul vitezei. În momentul cînd viteza bărcii este $v_0 = 10$ m/s motorul este oprit şi după un timp $\tau = 17{,}2$ s viteza bărcii devine de e ori mai mică (e — baza logaritmilor naturali). Calculaţi distanţa parcursă de barcă în acest timp.

** **1.2.146.** O barcă de masă $m = 100$ kg întîmpină din partea apei o forţă de rezistenţă proporţională cu viteza. În momentul cînd viteza bărcii este $v_0 = 1{,}00$ m/s motorul este oprit şi după un timp $\tau = 10$ s viteza bărcii se micşorează de e ori (e — baza logaritmilor naturali). Aflaţi: a) coeficientul de proporţionalitate din legea forţei de rezistenţă, b) distanţa parcursă în timpul indicat, c) distanţa parcursă pînă la oprire.

** **1.2.147.** O particulă cade liber în aer fără viteză iniţială. Ea întîmpină din partea aerului o forţă de rezistenţă proporţională cu viteza. Aflaţi după cît timp particula atinge $f = 99\%$ din viteza sa *limită* de cădere liberă, care este $c = 4{,}9$ cm/s.

** **1.2.148.** O particulă cade în aer fără viteză iniţială şi întîmpină din partea aerului o forţă de rezistenţă proporţională cu viteza. Ştiind viteza limită de cădere liberă c, exprimaţi viteza şi coordonata particulei în funcţie de timp.

** **1.2.149.** Un corp cade în aer fără viteză iniţială şi întîmpină din partea aerului o forţă de rezistenţă proporţională cu *pătratul* vitezei. Ştiind viteza limită de cădere liberă c, exprimaţi: a) legea vitezei, b) legea mişcării, c) coordonata în funcţie de viteză.

** **1.2.150.** Un corp este aruncat vertical în sus în aer cu viteza iniţială v_0. Corpul întîmpină din partea aerului o forţă de rezistenţă proporţională cu pătratul vitezei. Cunoscînd viteza limită de cădere liberă c, aflaţi: a) timpul de urcare t_m şi înălţimea maximă h_m la care urcă corpul, b) timpul de coborîre t' şi viteza v' cu care corpul ajunge înapoi pe Pămînt.

** **1.2.151.** Un corp de masă m este tras orizontal de o forţă F orientată sub unghiul α faţă de orizontala. Coeficientul de frecare la lunecare este μ şi forţa de rezistenţă din partea aerului $\vec{F}_r = -k\vec{v}$. Aflaţi: a) viteza limită, maximă posibilă, b) legea mişcării (viteza iniţială este nulă).

** **1.2.152.** O sanie de masă m și de lungime l intră cu viteza v_0 pe un drum asfaltat cu coeficientul de frecare la lunecare μ. Aflați distanța parcursă de sanie pînă la oprire și timpul pînă la oprire.

** **1.2.153.** Un glonț intră cu viteza $v_0 = 600$ m/s într-un perete de grosime $h = 40$ cm și iese cu viteza $v' = 150$ m/s. Considerînd forța de rezistență proporțională cu cubul vitezei, aflați timpul de traversare a peretelui.

** **1.2.154.** Peste un cilindru orizontal fix este trecut un fir (ideal) astfel încît unghiul la centru al porțiunii înfășurate este α, iar coeficientul de frecare la lunecare dintre fir și cilindru este μ. a) Aflați tensiunea din fir în momentul lunecării firului în funcție de unghiul la centru θ și tensiunea T_0 cu care se trage de un capăt. b) Care este raportul tensiunilor de la capete T_0/T' în momentul lunecării? c) Considerînd că $\theta = (2n + 1)\pi$ și că la capetele firului atîrnă două corpuri de mase $m_{1,2}$, aflați condiția de lunecare a firului și accelerația cu care se vor mișca în acest caz corpurile.

** **1.2.155.** O rachetă în cosmos pornește din repaus, are masa inițială m_0 și expulzează continuu gazele de ardere în direcția mișcării cu viteza relativă $\vec{v}_{rel}$ constantă față de rachetă. Aflați viteza rachetei în funcție de masa ei.

** **1.2.156.** Fie o rachetă lansată de pe Pămînt. Considerînd viteza relativă v_{rel} de ejectare a gazelor constantă și neglijînd frecarea cu aerul și variația accelerației gravitaționale g, aflați viteza rachetei și condiția de desprindere de Pămînt.

** **1.2.157.** O navă cosmică cu masa m_0 se mișcă cu viteza $\vec{v}_0 = \text{const}$ în absența forțelor exterioare. Pentru a-i modifica direcția de mișcare se acționează un motor cu reacție care ejectează gazele cu viteza relativă $|\vec{v}_{rel}| = \text{const}$ față de navă și perpendiculară pe viteza navei. a) Aflați unghiul de deviere θ a direcției navei în funcție de masa navei. b) Cum trebuie să scadă masa navei pentru a putea descrie un cerc de rază R?

—— Mișcarea circulară

1.2.158. În mecanismul din figură bara AB de lungime $l = 1,00$ m se rotește uniform cu viteza unghiulară $\omega = 5,0$ rad/s. În A este o articulație, iar capătul C culisează pe tija BC. Aflați viteza și accelerația maximă a capătului C.

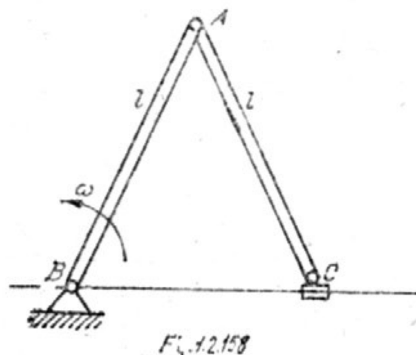


Fig. 1.2.158

1.2.159. Globul terestru are perioada de rotație proprie $T = 23$ h 56 min 4 s. De ce atunci ceasornicele noastre sînt prevăzute pentru 24 h — durata unei zile și nopți?

1.2.160. Planeta Venus se rotește în jurul axei sale cu perioada $T_1 = 243$ zile terestre (față de stele) în sens opus revoluției în jurul Soarelui care are perioada $T_2 = 225$ zile terestre. Aflați durata unei zile și nopți venusiene.

1.2.161. Cum vede un observator aflat la Polul Nord mișcarea diurnă aparentă a Soarelui pe bolta cerească? În particular, în zilele de solstițiu și echinocțiu? (Axa polilor Pămîntului este înclinată cu 23° 30′ față de normala la planul revoluției Pămîntului în jurul Soarelui).

1.2.162. Cum vede un observator aflat la Cercul Polar mișcarea diurnă aparentă a Soarelui pe bolta cerească în zilele de echinocțiu și solstițiu? (Axa polilor Pămîntului este înclinată cu 23° 30′ față de normala la planul revoluției Pămîntului în jurul Soarelui).

1.2.163. Direcția firului cu Plumb nu trece prin centrul Pămîntului din cauza rotației Pămîntului. Evaluați distanța maximă posibilă dintre centrul Pămîntului și dreapta suport a firului cu plumb. Raza Pămîntului $R = 6400$ km.

1.2.164. Un aviator, zburînd la altitudinea $h = 10$ km vede exact Soarele răsărind. După cît timp un observator aflat pe Pămînt sub avion va vedea Soarele răsărînd? Raza Pămîntului $R = 6400$ km.

1.2.165. O planetă are perioada rotației proprii $T_0 = 24$ h, iar perioada de revoluție în jurul stelei $T = 1{,}00$ an. Satelitul planetei are perioada de revoluție în jurul planetei $T' = 28$ zile. Considerînd că toate corpurile se rotesc în același plan, aflați a) perioada de repetiție a eclipsei satelitului, observată de pe planetă b). Dar observată dintr-un anumit loc al planetei?

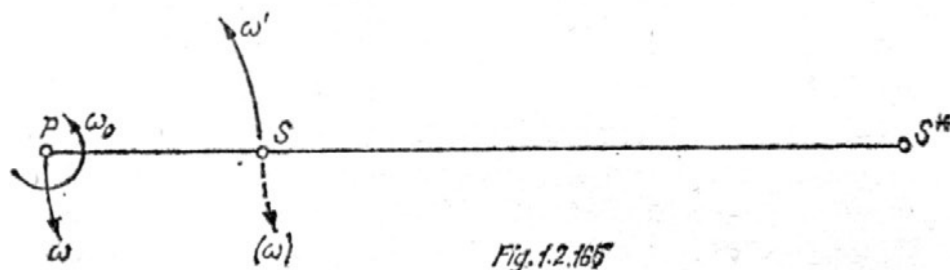


Fig. 1.2.165

1.2.166. De un stîlp vertical cu secțiune pătrată de latură $b = 20$ cm este legat un fir orizontal de lungime $l = 1{,}90$ m cu o bilă la capăt, așezată pe planul orizontal fără frecări cu $\alpha = 30°$ ca în figură. I se imprimă bilei o viteză $v = 10{,}0$ m/s orizontal și perpendicular pe fir. După cît timp firul se va înfășura pe stîlp?

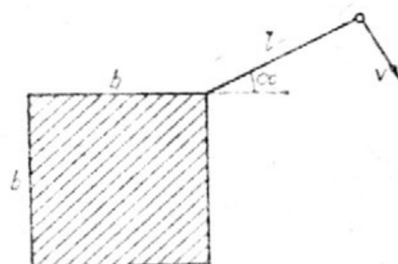


Fig. 1.2.166

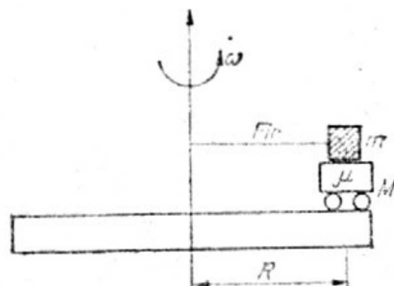


Fig. 1.2.171

1.2.167. Roțile motoare de rază $r = 20$ cm ale unui tractor cu șenile se mișcă în același sens cu vitezele unghiulare $\omega_1 = 6{,}0$ rad/s, $\omega_2 = 8{,}0$ rad/s. Lățimea tractorului este $l = 1{,}60$ m. Aflați raza cercului pe care se mișcă centrul tractorului și viteza unghiulară a acestei mișcări.

(*) **1.2.168.** Un elev învîrte o piatră cu turația $n = 1,00$ rot/s în planul vertical, pe un fir de lungime $l = 1,00$ m. Ce unghi cu orizontala trebuie să formeze firul astfel încît lăsîndu-l liber piatra să urce la înălțimea maximă?

1.2.169. Un camion virează spre stînga pe un teren orizontal. La care din roți, stînga sau dreapta, forța de frecare dintre anvelope și teren este mai mare?

1.2.170. Cu ce turație minimă trebuie rotit un cilindru de rază $R = 2,0$ m în jurul axei sale verticale pentru ca un om sprijinit de peretele interior al cilindrului să nu lunece în jos? Coeficientul de frecare $\mu > 0,20$.

1.2.171. În sistemul din figură se dau $m = 5,0$ kg, $M = 9,8$ kg, $R = 0,50$ m, $\mu = 0,40$, frecarea între căruciorul M și disc este neglijabilă. Aflați viteza unghiulară ω pentru care căruciorul lunecă.

1.2.172. Un biciclist face un viraj pe un drum orizontal de rază $R = 19,6$ m. Coeficientul de frecare între anvelope și asfalt este $\mu = 0,32$. Aflați viteza maximă pe care o poate avea.

1.2.173. Un camion se mișcă pe un pod convex de rază $R = 45$ m. Ce accelerație tangențială maximă poate dezvolta în vîrful podului dacă are viteza $v = 54$ km/h, iar coeficientul de frecare anvelope-asfalt este $\mu = 0,50$? Dar pe un pod concav?

1.2.174. Un camion poate dezvolta o forță de tracțiune maximă $F_{max} = 15$ kN pe un drum orizontal. Ce forță de tracțiune maximă poate dezvolta camionul dacă merge cu viteza $v = 72$ km/h pe un pod convex, respectiv concav, cu raza $R = 40$ m?

1.2.175. Cu ce viteză *constantă* (în modul) *maximă* se poate mișca un camion pe un pod convex de rază $R = 90$ m și de lungime $l = 31,4$ m, dacă coeficientul de frecare între anvelope și șosea este $\mu = 0,20$?

1.2.176. Un motociclist descrie un cerc orizontal de rază $R = 100$ m cu viteza $v = 36$ km/h pe suprafața exterioară a unui con circular (cu vîrful în sus) cu deschiderea $2\alpha = 150°$. Care trebuie să fie coeficientul de frecare pentru ca motociclistul să nu lunece?

1.2.177. La un viraj de rază $R = 70,7$ m șoseaua este înclinată (adică partea opusă „supraînălțată") cu unghiul $\alpha = 20°$. Din cauza poleiului unghiul de frecare dintre anvelope și polei a devenit mai mic decît unghiul de înclinare α, iar viteza maximă posibilă a unui camion, pentru a nu derapa la viraj (nu există pericol de răsturnare), a devenit $v_{max} = 72$ km/h. Care este unghiul de frecare pe polei și care va fi viteza minimă posibilă a camionului?

1.2.178. De cîte ori crește viteza maximă posibilă la viraj a unui motociclist pe o șosea cu supraînălțare de unghi $\beta = 6,0°$ în comparație cu viteza maximă posibilă pe șosea orizontală, la aceeași rază de viraj și același coeficient de frecare $\mu = 0,40$?

1.2.179. O sferă de rază $R = 39,2$ cm se rotește o dată cu viteza unghiulară $\omega_1 = 4,0$ rad/s, apoi cu $\omega_2 = 7,1$ rad/s, în jurul diametrului său vertical. În interiorul sferei sînt presărate mai multe fire de nisip. Considerînd frecările foarte mici, unde vor sta firele de nisip?

1.2.180. Firul de suspensie de lungime $l = 1,00$ m al unui pendul simplu gravitațional descrie pînza unui con cu frecvența de rotație $\omega = 4,0$ rad/s (pendul conic). Aflați raza cercului descris de bilă.

1.2.181. Un pendul conic aflat într-un lift în repaus are perioada $T_1 = 1,00$ s și unghiul firului cu verticala $\alpha_1 = 45°$. Cît devine perioada dacă liftul coboară cu accelerația $a = 4,9$ m/s² și unghiul de deviere devine $\alpha_2 = 60°$?

1.2.182. Un cărucior avînd viteza $v = 1{,}00$ m/s cade într-o prăpastie de adîncime $h = 19{,}6$ m. Evaluați cîte rotații face căruciorul în timpul căderii.

1.2.183. În spațiul cosmic departe de alte corpuri se află o pătură sferică de masă $M = 900$ kg în interiorul căreia de-a lungul ecuatorului se rotește uniform o bilă de masă $m = 100$ kg cu perioada $T = 3{,}00$ s. Distanța dintre centrele corpurilor este $d = 10{,}0$ m. Aflați forța cu care bila apasă asupra sferei.

1.2.184. O bilă de rază $r = 4{,}0$ cm, suspendată de un fir de lungime $l = 96$ cm, se sprijină pe un cilindru de rază $R = 56$ cm, ca în figură. La ce turație a sistemului, bila se desprinde de cilindru?

1.2.185. În camera unei roți de automobil a pătruns o pietricică. La ce viteză minimă a automobilului pietricica va participa la mișcarea roții fără să lunece? Se dau: unghiul de frecare la lunecare dintre pietricică și cauciucul camerei $\varphi = 11°32'$, raza roții $R = 49$ cm. Dacă viteza automobilului scade, în ce punct de pe periferia roții va începe lunecarea pietricelei? Dați unghiul razei vectoare cu orizontala.

1.2.186. Două perechi de bile de mase $m = 410$ g, respectiv $M = 2{,}00$ kg, sînt fixate în colțurile unui pătrat care se poate deforma liber, masele

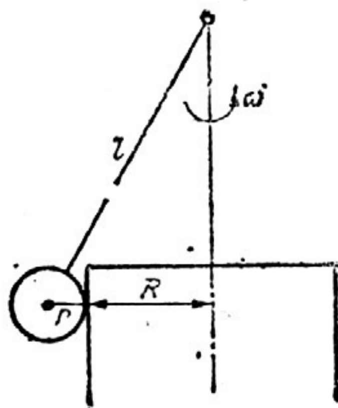


Fig. 1.2.184

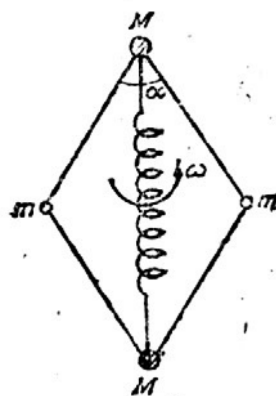


Fig. 1.2.186

M fiind legate și printr-un resort inițial nedeformat de constantă elastică $k = 8{,}66$ N/m. Sistemul se așează pe o masă orizontală netedă fără frecări și se pune în rotație în jurul axei verticale proprii. Pătratul devine romb cu unghiul ascuțit $\alpha = 60°$, ca în figură. Aflați viteza unghiulară de rotație.

1.2.187. Pe filetul (ghiventul) dreptunghiular interior al unei piulițe cu ax vertical lunecă un mic corp. Se cunosc: raza interioară a piuliței $R = 3{,}0$ cm, unghiul filetului față de planul transversal al piuliței $\alpha = 15°$ și unghiul de frecare dintre corp și piuliță $\varphi = 5{,}0°$. Aflați viteza limită constantă în modul cu care va luneca corpul.

1.2.188. Aflînd că la viteze mari forța de rezistență a aerului este proporțională cu pătratul vitezei, un elev a luat o bilă de masă $m = 100$ g și legînd-o de un fir a început s-o învîrtă repede deasupra capului pe un cerc de rază $R = 1{,}00$ m (pumnul descriind un cerc mai mic). A constatat atunci că raza vectoare a bilei (raza cercului R) face un unghi $\alpha = 6{,}0°$ cu direcția firului în planul orizontal. Neglijînd forța de greutate (față de tensiunea din fir), aflați coeficientul de proporționalitate din legea forței.

1.2.189. Un atomobil pornește uniform accelerat pe un arc de cerc orizontal de lungime $s = 50$ m și rază de curbură $R = 100$ m. Ce viteză

maximă *finală* poate atinge dacă coeficientul de frecare între anvelope și șosea este $\mu = 0,28$?

1.2.190. Un camion, pornind din repaus, face un viraj de rază $R = 100$ m, descriind un arc de cerc de unghi $\alpha = 30°$. Coeficientul de frecare între anvelope și asfalt este $\mu = 0,30$. Dacă viteza sa crește uniform în modul, ce valoare maximă poate atinge?

1.2.191. Pentru a creea greutatea artificială două părți ale unei nave cosmice, de mase $m_1 = 4,0$ t, $m_2 = 8,0$ t au fost despărțite la distanța $L = 29,4$ m dintre ele și puse în rotație în jurul CM comun. Aflați perioada de rotație a sistemului, știind că un ceasornic cu pendul din cabina m_2 merge de $n = 2,00$ ori mai încet decît pe Pămînt.

1.2.192. Un camion accelerînd cu o accelerație maximă posibilă pe o șosea rectilinie își mărește viteza $v_0 = 20,0$ m/s cu $\Delta v = 0,5$ m/s într-un timp $\Delta t = 0,10$ s. În ce interval de timp $\Delta t'$ minim poate face el același lucru pe o șosea orizontală curbă de rază $R = 100$ m? Pentru ce rază R' nu-și poate mări viteza v_0?

1.2.193. Un camion de masă $m = 1000$ kg virează cu accelerația tangențială constantă $a_t = 1,00$ m/s^2 pe o șosea orizontală de rază $R = 100$ m, avînd coeficientul de frecare $\mu = 0,30$. Ce viteză maximă dezvoltă pînă la apariția lunecării? Ce putere va avea motorul în acest moment?

1.2.194. O locomotivă merge cu viteza constantă $v_0 = 1,00$ m/s și trage printr-un cablu de lungime $l = 32$ m un vagon de masă $m = 9,0$ t ca în figură. Cunoscînd unghiurile $\alpha = 45°$, $\beta = 15°$ (frecări neglijabile), aflați tensiunea din cablu în acest moment.

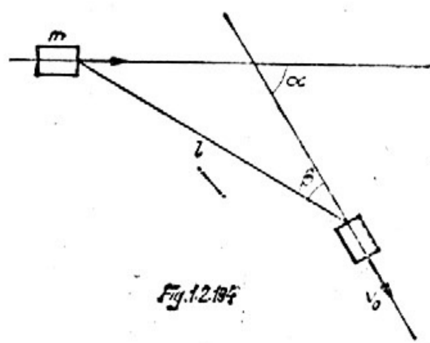


Fig. 1.2.194

1.2.195. În anvelopa de rază R a unui automobil care merge cu viteza constantă v_0 a intrat un cui de masă m. Aflați forța de reacțiune asupra cuiului și raza de curbură a traiectoriei sale în funcție de unghiul θ format de raza vectoare cu verticala.

1.2.196. Un pahar tronconic are diametrul bazei $D = 7,0$ cm și unghiul de înclinare al pereților $\alpha = 30°$ (față de verticală). La ce turație a paharului în jurul axei sale verticale, apa (30 cm^3) aflată pe fundul paharului va fi azvîrlită afară?

1.2.197. Pe suprafața interioară a unei sfere de rază $R = 55$ cm poate aluneca cu frecare foarte mică o bilă de rază $r = 5,0$ cm. Care va fi poziția de echilibru relativ a bilei (unghiul dintre raza vectoare a bilei și verticala) dacă sfera se rotește cu turația $n = 1,00$ rot/s în jurul diametrului vertical?

(*) **1.2.198.** Peste suprafața exterioară a unui con cu deschiderea $2\alpha = 90°$ și cu vîrful în sus este așezat orizontal un lănțișor de masă $m = 314$ g și rază $R = 20$ cm cu capetele legate între ele, astfel încît el se rotește o dată cu conul cu viteza unghiulară $\omega = 9,0$ rad/s în jurul axei sale verticale. Ce tensiune va fi în lănțișor?

1.2.199. O tijă verticală are prinse la capete două fire de același fel sub unghiurile α, respectiv β, astfel încît la capătul comun este prinsă o bilă de masă m la distanța R de tijă, ca în figură. Sistemul se pune în rotație cu viteze unghiulare din ce în ce mai mari. Care din fire se rupe primul?

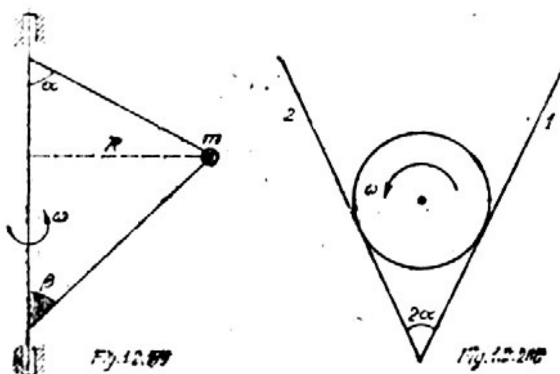


Fig. 1.2.199 Fig. 1.2.200

1.2.200. Un cilindru de masă $m = 1{,}00$ kg, adus în mișcare de rotație, este așezat într-un unghi diedru $2\alpha = 90°$, ca în figură. Cunoscînd unghiul de frecare cu planele $\varphi = 15°$, aflați forțele de apăsare asupra planelor.

1.2.201. Aflați de cîte ori crește viteza maximă realizabilă fără derapare la o șosea datorită „supraînălțării" părții exterioare cu unghiul $\alpha = 6{,}0°$, unghiul de frecare fiind $\varphi = 15°$.

1.2.202. Ce viteză minimă trebuie să aibă un motociclist pentru a putea merge pe suprafața interioară a unui cilindru vertical, centrul său de masă descriind un cerc orizontal de rază $R = 10{,}0$ m, știind că pe o șosea oritontală, la același coeficient de frecare raza minimă de viraj la viteza $v_0 = 9{,}8$ m/s este $R_0 = 40$ m. Cu ce unghi față de orizontală se înclină motociclistul dacă merge cu viteza minimă cerută? Dar cu viteza $v' = 22$ m/s?

1.2.203. Două corpuri mici identice sînt legate între ele printr-un fir de lungime $l = 2{,}0$ cm și așezate de-a lungul unui meridian al unei sfere fixe fără frecări, de rază $R = 98$ cm, astfel încît un corp este în pol. Care va fi accelerația inițială a sistemului? Pentru ce coeficient de frecare corpurile vor rămîne în repaus?

1.2.204. La un viraj de rază $R = 100$ m, efectuat cu viteza inițială $v_0 = 10{,}0$ m/s, un camion frînează cu accelerația tangențială *constantă* maximă astfel ca să nu derapeze și parcurge distanța $s = 30$ m pînă la oprire. Aflați coeficientul de frecare.

1.2.205. Un cilindru se rostogolește cu accelerația orizontală $a = 4{,}9$ m/s^2 a centrului de masă. Pe suprafața sa interioară alunecă un mic corp astfel încît raza sa vectoare face un unghi $\alpha = 45°$ cu orizontala. Aflați coeficientul de frecare.

1.2.206. Un acrobat de masă $m = 60$ kg merge uniform pe un cilindru, în timp ce cilindrul se rostogolește uniform în sens opus fără să lunece. Unghiul maxim față de verticală format de raza vectoare spre punctul unde calcă acrobatul este $\theta = 30°$. Aflați unghiul de frecare și forța de frecare în acest caz.

1.2.207. O bilă de masă $m_1 = 100$ g suspendată de un fir este menținută în repaus în poziție deviată cu $\alpha = 60°$ a firului față de verticală. De bila m_1 este suspendată printr-un alt fir o altă bilă de masă $m_2 = 200$ g. Aflați accelerația bilei 2 *imediat* ce i se dă drumul bilei m_1.

** **1.2.208.** Accelerația normală a unui mobil care se mișcă pe un cerc de rază R variază după legea $a_n = A + Bt + Ct^2$. Deduceți legea accelerației tangențiale și legea spațiului.

* **1.2.209.** Un mobil se mișcă pe o traiectorie circulară după legea $s = ct^3$, unde $c = 0{,}10$ m/s³. Aflați accelerația tangențială în momentul cînd viteza este $v = 30$ m/s.

* **1.2.210.** Într-o mișcare circulară $\theta = bt - ct^3$, unde b, c sînt constante pozitive. Calculați viteza unghiulară medie și accelerația unghiulară medie pe durata mișcării, de la pornire pînă la oprire.

** **1.2.211.** Accelerația unghiulară a unei particule în mișcare circulară este $\varepsilon = \dfrac{b}{(t + c)^2}$. Aflați tangenta unghiului dintre accelerație și viteză.

* **1.2.212.** O bandă de magnetofon de grosime h se înfășoară cu viteză constantă v_0 pe o bobină de rază inițială R_0. Aflați : a) viteza cu care crește raza bobinei, b) accelerația unghiulară a bobinei.

(*) **1.2.213.** În timpul oscilațiilor unui pendul simplu gravitațional accelerația maximă a bilei este de n ori mai mare decît accelerația minimă a bilei. Aflați amplitudinea unghiulară a oscilațiilor. Ce valori poate lua n?

** **1.2.214.** O roată se rotește astfel încît accelerația sa unghiulară variază după legea $\varepsilon = A - B\omega$. Știind că la momentul inițial $t = 0$, $\omega = \omega_0$, aflați legea de variație a vitezei unghiulare. Care este viteza unghiulară staționară și în cît timp se atinge?

* **1.2.215.** O particulă se mișcă pe un cerc de rază R după legea $s = A \sin(\omega t + \alpha)$, s — lungimea arcului de cerc. Aflați valorile extreme ale accelerației.

** **1.2.216.** Un mobil se mișcă pe un cerc de rază R astfel, încît unghiul α dintre viteză și accelerație este constant. Exprimați viteza în funcție de timp, viteza inițială fiind v_0.

** **1.2.217.** De un stîlp cilindric vertical de rază R este prins un fir de lungime l (în planul orizontal) avînd la capăt o bilă. I se imprimă bilei o viteză orizontală v perpendicular pe fir. Neglijînd frecările, aflați după cît timp se înfășoară o fracțiune f din lungimea firului.

** **1.2.218.** Pe un stîlp cilindric vertical de rază $R = 10{,}0$ cm este înfășurat un fir de lungime $l = 68{,}6$ cm, avînd la capăt o bilă. I se imprimă bilei o viteză radială $v = 3{,}43$ m/s. În cît timp firul se va înfășura din nou pe stîlp? Frecările sînt neglijabile.

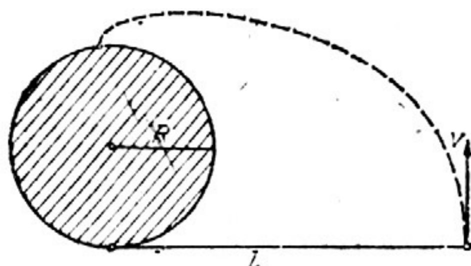


Fig.1.2.217

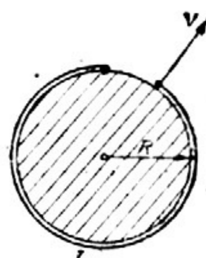


Fig.1.2.218.

** **1.2.219.** Într-un jgheab curbat sub formă de circumferință orizontală de rază $R \gg r$, (r — raza jgheabului) lunecă un mic corp cu coeficientul de frecare μ și viteza inițială v_0. Aflați : a) coordonata curbilinie s în funcție de viteză, b) viteza inițială necesară pentru ca acest corp să înconjoare complet circumferința.

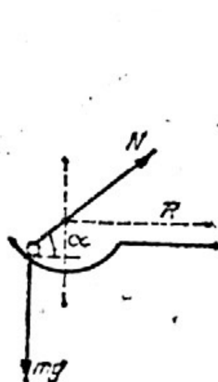


Fig. 1.2.219

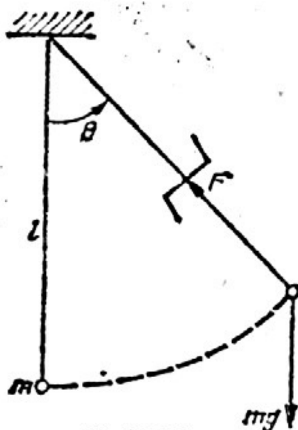


Fig. 1.2.220

* **1.2.220.** Un pendul simplu gravitațional de lungime l și masă m oscilează după legea $\theta = A \sin(\omega t + \alpha)$. Calculați tensiunea din fir.
(*) **1.2.221.** Un lănțișor de masă $m = 100$ g și lungime $l = 1{,}00$ m, cu capetele împreunate, înfășoară periferia unui disc orizontal care se rotește uniform în jurul axei sale verticale și antrenează prin frecare lănțișorul. La ce turație a discului lănțișorul se va rupe, dacă tensiunea sa de rupere este $T_r = 1{,}00$ kN?

Forțe elastice

1.2.222. Ce înălțime maximă poate avea un zid de cărămidă dacă limita de rezistență a cărămizilor la comprimare este $\sigma_r = 6{,}0$ MN/m², iar coeficientul de siguranță este $s = 5{,}0$? Greutatea specifică a cărămizilor $\gamma = 20{,}0$ kN/m³.

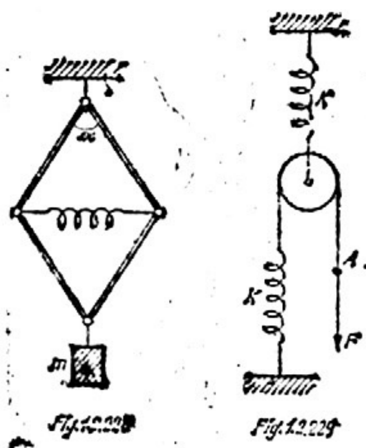
1.2.223. Două sîrme de dimensiuni identice dar din materiale diferite, sînt sudate o dată în serie și apoi în paralel și supuse la o forță de tracțiune. Calculîndu-se apoi modulele de elasticitate ca și cum ar fi din același material s-au găsit, bineînțeles, valori diferite: $E' = 96$ GPa, $E'' = 100$ GPa. Aflați modulele $E_{1,2}$ pentru fiecare sîrmă.

1.2.224. Au fost confecționate baloane de sticlă de diferite raze și de aceeași grosime a pereților. Baloanele sînt supuse unui test de rezistență la presiune. a) Care din baloane se sparge mai întîi? b) Cum trebuie să fie grosimea pereților față de raza balonului pentru ca toate baloanele să reziste la aceeași presiune?
(**) **1.2.225.** Un resort greu de constantă elastică k este așezat pe un plan orizontal fără frecări și tras la capete de forțele orizontale $F_{1,2}$. Aflați alungirea resortului.
(**) **1.2.226.** Un dinamometru este așezat orizontal pe un plan orizontal fără frecări. Resortul are masa m, iar corpul cilindric al dinamometrului în care se află resortul are masa M. De capătul liber al resortului se trage cu o forță orizontală F_1, iar de corpul dinamometrului se trage cu o forță F_2 în sens opus. Ce forță F indică dinamometrul?

1.2.227. Un corp de masă $m = 10{,}0$ g este suspendat de un *fir* elastic de constantă $k = 10{,}0$ N/m. Cu cît trebuie ridicat corpul de la poziția sa de echilibru pentru ca lăsat apoi liber să rupă firul a cărui tensiune de rupere este $T_r = 0{,}40$ N? ($g = 10$ m/s²).

1.2.228. În sistemul din figură barele au masă neglijabilă și articulațiile sînt ideale. Inițial barele formează un pătrat, resortul fiind nedefor-

mat şi de lungime $l_0 = 9,8$ cm. De capătul inferior se agaţă un corp de masă $m = 0,50$ kg şi unghiul superior devine $\alpha = 60^0$. Aflaţi constanta elastică a resortului.


Fig.1.2.228 Fig.1.2.229

1.2.229. În sistemul din figură se cunosc $k = 100$ N/m şi $F = 10,0$ N, resortul şi scripetele fiind ideale. Cu cît coboară punctul A?

1.2.230. Pe un disc orizontal care se poate roti în jurul axei sale verticale se află un mic corp de masă $m = 100$ g prins printr-un resort de centrul discului. Dacă turaţia discului este cel mult $n_1 = 2,0$ rot/s, resortul rămîne nedeformat. Dacă turaţia creşte foarte lent pînă la $n_2 = 5,0$ rot/s, resortul se alungeşte cu o fracţiune $f = 1,0$ din lungimea sa nedeformată. Aflaţi constanta elastică a resortului.

(*) **1.2.231.** Pe un cilindru de rază $R = 20,0$ cm se îmbracă un inel de cauciuc întins *uniform*, de masă $m = 200$ g şi constantă elastică $k = 100$ N/m, avînd în stare nedeformată lungimea $l_0 = 62,8$ cm. Cilindrul este pus în mişcare de rotaţie cu acceleraţia unghiulară constantă $\varepsilon = 1,00$ rad/s^2. După cît timp inelul de cauciuc va începe să lunece faţă de cilindru, dacă coeficientul de frecare la lunecare este $\mu = 0,40$? (Se neglijează gravitaţia).

1.2.232. În punctul superior al unui plan cu înclinaţia $\alpha = 30°$ faţă de orizontală, este prins un capăt al unui resort ideal, cu lungimea nedeformată $l = 9,8$ cm şi constantă elastică $k = 30$ N/m. De celălalt capăt al resortului este prinsă o bilă de masă $m = 100$ g şi de dimensiuni neglijabile, sprijinindu-se de plan fără frecare. Se imprimă sistemului o mişcare de rotaţie cu viteza unghiulară $\omega = 15$ rad/s în jurul unei axe verticale care trece prin punctul superior al planului înclinat. Aflaţi alungirea resortului. Ce viteză unghiulară maximă se poate imprima sistemului?

** **1.2.233.** O tijă omogenă şi uniformă de masă m şi lungime l se roteşte cu viteza unghiulară ω într-un plan orizontal în jurul unei axe verticale trecînd printr-un capăt al tijei. Care va fi tensiunea $T(x)$ în tijă în secţiunea depărtată cu x de axa de rotaţie? Care este reacţiunea articulaţiei?

1.2.234. Un pendul conic are firul de suspensie format dintr-un fir de cauciuc elastic de lungime nedeformată $l_0 = 60$ cm şi constantă elastică $k = 9,8$ N/m. Bila are masa $m = 310$ g. Ce viteză unghiulară are pendulul dacă firul a deviat cu unghiul $\alpha = 60°$?

(*) **1.2.235.** Un fir elastic de lungime $l_0 = 1,00$ m, masă $m = 0,100$ kg şi constantă elastică $k = 2,00$ N/m este închis sub formă de inel şi pus în mişcare de rotaţie cu viteza unghiulară $\omega = 20$ rad/s într-un plan orizontal fără frecări. Aflaţi raza inelului.

** **1.2.236.** Demonstraţi formula generalizată a lui Galilei pentru mişcarea curbilinie oarecare:

$$v^2 = v_0^2 + 2\int_{s_0}^{s} a_t \mathrm{d}s = v_0^2 + 2\bar{a}_t(s - s_0),$$

unde $\bar{a}_t$ este acceleraţia tangenţială medie pe *distanţa* (s_0, s). Aplicaţi formula la oscilatorul armonic (de masă m şi constantă elastică k).

** **1.2.237.** Un corp se mişcă pe o traiectorie curbilinie după legea $s = b^n v^n - c^n$, b, c, n — constante pozitive, la momentul iniţial $t = 0$ coordonata iniţială fiind $s_0 = 0$. Deduceţi legea vitezei în funcţie de timp.

** **1.2.238.** Într-o mişcare încetinită diagrama vitezei în funcţie de timp este reprezentată printr-un sfert de elipsă din primul cadran. Viteza iniţială este $v_0 = 10$ m/s, iar timpul pînă la oprire $t_m = 40$ s. Calculaţi distanţa s parcursă pînă la oprire. Deduceţi legea mişcării.

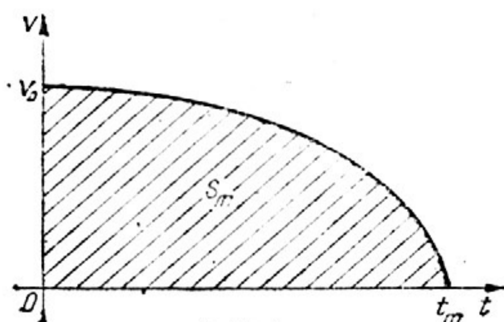


Fig. 1.2.238

** **1.2.239.** Viteza de curgere a unui rîu variază cu distanţa de la ţărm după legea $v = k\sqrt{y}$, $k = \text{const}$, pînă la mijlocul rîului, după care variază invers, simetric, pînă la celălalt mal. Lăţimea rîului este b. O barcă porneşte de pe ţărm cu viteza v_0 constantă: a) orientată permanent perpendicular pe ţărm, aflaţi cu cît o duce la vale apa cînd ajunge la celălalt ţărm; b) orientată astfel încît să înainteze exact perpendicular pe ţărm ($v_0 > v_{max}$ a rîului), aflaţi în cît timp barca traversează rîul. c) Care este semnificaţia constantei k?

* **1.2.240.** O particulă descrie o curbă plană astfel încît dreapta suport a acceleraţiei trece printr-un punct fix O. Arătaţi că acceleraţia se poate exprima astfel:

$$a = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r},\ v \neq \text{const},$$

unde r este distanţa pînă la punctul fix.

(*) **1.2.241.** Un punct material se mişcă într-un plan (Oxy) după legea: $x = bt$, $y = ct - ht^2$, unde b, c, h sînt constante. Aflaţi unghiul dintre vectorii viteză şi acceleraţie în funcţie de timp.

** **1.2.242.** Un elicopter urcă cu viteza $v_y = v_0 = \text{const}$, dar în acelaşi timp suflă vînt orizontal a cărui viteză creşte cu înălţimea: $v_x = A\sqrt{y}$. Deduceţi legile mişcării şi ecuaţia traiectoriei.

* **1.2.243.** Ecuaţiile cinematice ale mişcării unui mobil sînt $x = A\cos\omega t$, $y = B\sin\omega t$, A, B, ω — constante pozitive. Aflaţi: a) ecuaţia implicită a traiectoriei, b) viteza $v(x,y)$, c) acceleraţia $a(x,y)$ şi acceleraţiile tangenţială a_t şi normală a_n, d) raza de curbură a traiectoriei $R(x,y)$.

** **1.2.244.** Un cerc de rază R se rostogoleşte fără lunecare pe o dreaptă Ox. a) Stabiliţi ecuaţiile parametrice ale traiectoriei unui punct de pe cerc în funcţie de unghiul θ al razei sale vectoare cu verticala. Această

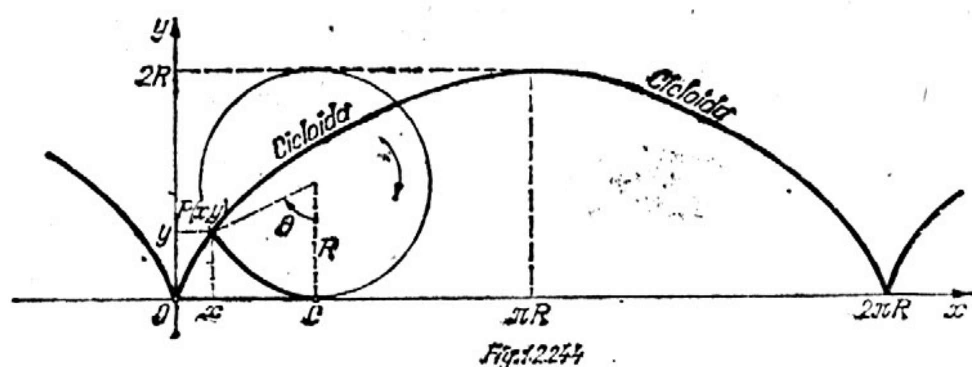


Fig.1.2.244

traiectorie se numește *cicloidă*. b) Un mobil se mișcă cu viteză *constntă* v pe cicloidă. Calculați proiecția a_y a accelerației sale pe axa Oy. c) Calculați lungimea unei bucle de cicloidă.

* **1.2.245.** Un lanț (sau fir greu omogen) suspendat de capetele sale ia sub acțiunea greutății forma unei curbe numită „lănțișor" de ecuație

$$y = \frac{b}{2}(e^{x/b} + e^{-x/b}) = b \operatorname{ch} \frac{x}{b}, \quad b = \text{const},$$

care reprezintă așanumitul *cosinus hiperbolic* (ch).

Un mobil se deplasează uniform pe lanț cu viteza constantă v. Calculați accelerația și raza de curbură a lănțișorului în funcție de coordonatele (x, y) ale mobilului.

(*) **1.2.246.** Un mobil descrie o traiectorie plană astfel, încît $v_x = v_{0x} = \text{const}$. Arătați că atunci accelerația se scrie $a = \dfrac{v^3}{R v_{0x}}$, unde R este raza de curbură a traiectoriei.

* **1.2.247.** Arătați că în cazul unei mișcări plane viteza pe traiectorie v a mobilului se scrie : $v = R\dot{\theta}$, unde R este raza de curbură a traiectoriei, iar θ unghiul dintre viteză (sau tangenta la traiectorie) și o axă fixă (de ex. Ox) din planul mișcării.

** **1.2.248.** Un mobil se mișcă în plan astfel încît unghiul α dintre viteză și accelerație este constant. Arătați că viteza pe traiectorie v a mobilului se scrie

$$v = v_0 e^{(\theta - \theta_0)\operatorname{ctg}\alpha},$$

unde θ este unghiul dintre viteză (sau tangenta la traiectorie) și o axă din plan (de ex. Ox).

* **1.2.249.** Ecuațiile mișcării unui mobil sînt următoarele : $x = r\cos\omega t$, $y = r\sin\omega t$, $z = ct$, unde r, ω, c sînt constante pozitive. Aflați : a) traiectoria, b) viteza, c) accelerația, d) raza de curbură.

* **1.2.250.** Arătați că la mișcarea liberă a unei particule în aer, oricare ar fi forța de rezistență a aerului, avem

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y'' = -\frac{g}{v_x^2},$$

unde $v_x = \dot{x}$ este componenta vitezei pe axa orizontală.

** **1.2.251.** O particulă este aruncată în aer cu viteza inițială v_0 sub unghiul α_0 față de orizontală. Forța de rezistență din partea aerului este proporțională cu viteza. Cunoscînd viteza limită c de cădere liberă, calculați : a) componentele vitezei v_x, v_y în funcție de timp, b) coordonatele x,y în funcție de timp, c) timpul de urcare t_m pînă la înălțimea maximă, d) coordonatele înălțimii maxime, e) ecuația explicită a traiectoriei și asimptota ei, f) obțineți cazul particular al aruncării în vid.

* **1.2.252.** Calculați intensitatea cîmpului gravitațional al unui inel subțire de masă m și rază R la o distanță y de centrul inelului pe axa acestuia. La ce distanță cîmpul este maxim și ce valoare are?

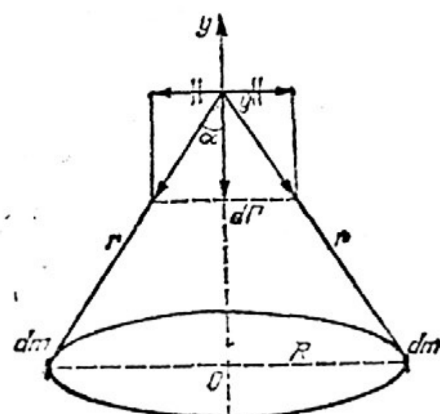


Fig. 1.2.252

1.2.253. La ce altitudine deasupra unui Pol greutatea unui corp este aceeași ca la ecuator dacă accelerațiile gravitaționale sînt:
$g_P = 9{,}83$ m/s², $g_E = 9{,}78$ m/s², iar raza Pămîntului $R = 6370$ km?

1.2.254. La ce altitudine deasupra unui Pol greutatea unui corp este aceeași ca la ecuator pentru o planetă sferică de rază $R = 6400$ km, densitate $\rho = 5{,}5$ g/cm³ și perioada de rotație $T = 24$ h? (Constantă gravitațională $\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N.m²/kg².)

1.2.255. Cunoscînd raza Pămîntului $R = 6370$ km, accelerați gravitațională $g_0 = 9{,}8$ m/s² și constanta gravitațională $\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N.m²/ /kg², aflați densitatea medie a Pămîntului.

1.2.256. La ecuatorul unei Planete corpurile cîntăresc de $n = 3{,}0$ ori mai puțin decît la Poli. Perioada rotației proprii $T = 2$h 17 min. Aflați densitatea medie a Planetei ($\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N.m²/kg²).

1.2.257. Cunoscînd prima viteză cosmică v_I aflați viteza unui satelit pe o orbită circulară de rază $r = n\,R$.

1.2.258. Pe o orbită circulară de rază $r = 6500$ km în jurul unei planete de masă $M = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg zboară un satelit. Aflați perioada ($\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N.m²/kg²).

1.2.259. Aflați perioada minimă de revoluție a unui satelit în jurul unei stele neutronice de densitate $\rho = 1{,}0 \cdot 10^{17}$ kg/m³. Se dă constanta gravitațională $\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N. m²/kg².

1.2.260. Știind durata unui an T, diametrul unghiular al Soarelui $\alpha = 32'$ și constanta gravitațională γ, aflați densitatea materiei solare.

1.2.261. Un satelit artificial al Pămîntului este lansat pe o orbită circulară în planul ecuatorului în sensul de rotație al Pămîntului cu raza orbitei $r = 3R$, (R — raza Pămîntului). După cît timp satelitul revine prima dată deasupra punctului de lansare?

1.2.262. Un satelit artificial este lansat în planul ecuatorial în sensul rotației Pămîntului. Aflați raportul dintre raza orbitei și raza Pămîntului pentru care satelitul va reveni periodic deasupra locului de lansare la interval de n zile. Pentru ce valoare n satelitul va fi geostaționar?

1.2.263 Perioadele a doi sateliți pe orbite circulare din același plan sînt în raportul $T_2/T_1 = 2{,}0$. La momentul $t = 0$ distanța dintre sateliți este minimă. În ce raport crește distanța dintre ei la $t = T_1$?

1.2.264. Două stele de mase $m_1 = 1{,}98 \cdot 10^{30}$ kg, $m_2 = 0{,}99 \cdot 10^{30}$ kg se rotesc avînd distanța $R = 5{,}9 \cdot 10^9$ km între ele. Aflați viteza unghiulară și vitezele lor ($\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N. m^2/kg^2).

1.2.265. Calculați prima viteză cosmică pentru Jupiter, știind că satelitul Hanimede se rotește pe o orbită de rază $r = 1{,}0 \cdot 10^6$ km cu perioada $T = 7{,}15 \cdot 24$ h. Raza planetei Jupiter $R_J = 70 \cdot 10^3$ km.

1.2.266. Aflați accelerația gravitațională de cădere liberă la suprafața Soarelui, cunoscînd durata anului $T = 1{,}0$ ani, distanța Pămînt-Soare $R = 149{,}5 \cdot 10^6$ km și unghiul $\alpha = 32'$ sub care se vede de pe Pămînt discul solar.

1.2.267. Care este perioada unui satelit artificial lansat la altitudine mică pe o planetă sferică omogenă de densitate $\rho = 5\,500$ kg/m^3? ($\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N. m^2/kg^2).

1.2.268. Calculați perioada de revoluție a Lunii în jurul Pămîntului cunoscînd accelerația terestră a căderii libere $g_0 = 9{,}8$ m/s^2, raza Pămîntului $R_0 = 6400$ km și distanța Pămînt-Lună $R = 384000$ km.

1.2.269. Calculați masa Soarelui cunoscînd perioada de revoluție a Pămîntului în jurul Soarelui $T = 1{,}00$ ani, distanța Pămînt-Soare $R = 149{,}5 \cdot 10^6$ km și constanta gravitațională $\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N. m^2/kg^2.

1.2.270. Un cosmonaut cu masa $m = 100$ kg se află în afara navei de masă $M = 5{,}0$ t, legat de navă printr-un cablu de lungime $l = 64$ m. Nava se mișcă pe o orbită circulară în jurul Pămîntului la altitudinea $h = 600$ km. Care este tensiunea din cablu dacă cosmonautul este mereu de partea opusă Pămîntului? (Raza Pămîntului $R = 6400$ km).

1.2.271. Un satelit este lansat de la un pol cu o viteză orizontală. După $\tau = 3$ h 20 min satelitul atinge altitudinea maximă față de Pămînt. Aflați această altitudine.

* **1.2.272.** Luna se depărtează de Pămînt cu viteza radială $v_r = 3{,}3$ cm/an. Aflați accelerația unghiulară a Lunii știind distanța Pămînt-Lună $R = 384 \cdot 10^3$ km și viteza unghiulară a Lunii $\omega = 2{,}56 \cdot 10^{-6}$ rad/s.

** **1.2.273.** Fie un fragment de cerc de butoi, de masă m, de unghi la centru α și de rază de curbură R. Calculați intensitatea cîmpului gravitațional în centrul de curbură.

** **1.2.274.** Calculați intensitatea cîmpului gravitațional al unui disc subțire, omogen și uniform, de masă m și rază R, pe axa de simetrie a acestuia. Deduceți apoi intensitatea cîmpului gravitațional al unui plan infinit, de densitate superficială σ.

** **1.2.275.** Calculați intensitatea cîmpului gravitațional al unui fir rectiliniu de lungime l și masă m, la distanța r de fir pe mediatoarea acestuia. Deduceți apoi cîmpul unui fir infinit cu densitatea liniară λ.

** **1.2.276.** Deduceți expresiile cîmpului și potențialului gravitațional produs de o sferă omogenă de masă m și rază R.

** **1.2.277.** Un corp este aruncat vertical în sus de la suprafața Pămîntului cu viteza inițială v_0. a) Neglijînd rezistența aerului, aflați la ce înălțime maximă se ridică corpul și timpul de urcare (se ține seama de variația lui g cu altitudinea). b) Dacă corpul cade liber de la o înălțime h, aflați cu ce viteză ajunge pe Pămînt și timpul de cădere.

1.3. ENERGIA MECANICĂ

1.3.1. Un corp de masă $m = 1{,}00$ kg urcă vertical uniform accelerat. Pe o anumită distanță $h = 1{,}00$ m el are viteza medie $\langle v \rangle = 5{,}00$ m/s și

viteza sa crește cu $\Delta v = 0,50$ m/s. Aflați lucrul mecanic efectuat asupra corpului pe această distanță.

1.3.2. O lăcustă, îndreptîndu-și picioarele de lungime $l = 5,0$ cm, sare pînă la o înălțime $h = 30$ cm. Evaluați puterea medie dezvoltată pe unitatea de masă (puterea specifică) a lăcustei.

1.3.3. Un vagonet de masă $m = 300$ kg trebuie să parcurgă o distanță $s = 784$ m într-un timp minim, accelerînd uniform și frînînd uniform. Coeficientul de frecare la lunecare între roți și șine $\mu = 0,20$. Aflați timpul minim posibil și puterea minimă necesară a motorului.

1.3.4. De un tren de masă $M = 100$ t care merge rectiliniu uniform se desprinde ultimul vagon de masă $m = 10,0$ t. Ce distanță parcurge acest vagon pînă la oprire, dacă puterea locomotivei este tot timpul constantă $P = 300$ kW, iar după desprindere viteza trenului este constantă $v' = 72$ km/h? Se consideră că toate forțele de rezistență sînt proporționale cu greutățile.

1.3.5. Dacă imprimăm sistemului din figură o anumită viteză, dînd un impuls corpului $m_2 = 20$ g în jos, acesta coboară cu $h_1 = 25$ cm. Dacă imprimăm sistemului aceeași viteză, dînd un impuls corpului $m_1 = 100$ g spre stînga, corpul m_2 urcă cu $h_2 = 5,0$ cm. Aflați coeficientul de frecare μ. (Scripetele este ideal.)

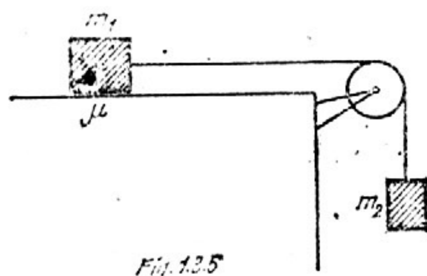


Fig. 1.3.5

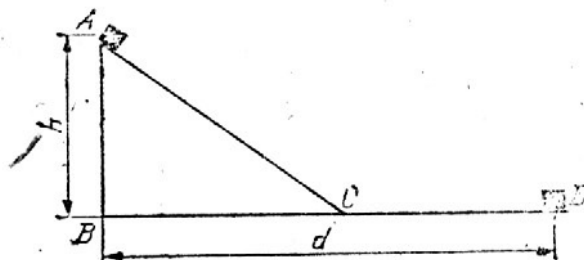


Fig. 1.3.11

** **1.3.6.** Pe o masă este întins un lanț. Un capăt al lanțului, de care este prins un corp greu, atîrnă liber peste marginea mesei. Cînd porțiunea de lanț de pe masă are lungimea l_0, lanțul este în echilibru, dar la o mică trepidație începe să lunece. Aflați viteza lanțului în momentul cînd el părăsește masa, mai general, viteza lanțului în funcție de deplasarea capătului său liber.

1.3.7. O săniuță coboară pe un plan înclinat de înălțime $h = 2,00$ m și bază $b = 5,00$ m, racordat cu un plan orizontal, pe care săniuța se oprește parcurgînd o distanță $s = 35$ m. Aflați coeficientul de frecare la lunecare μ. (Aplicați considerații energetice)

1.3.8. Un corp lunecă liber, fără viteză inițială, din vîrful unui plan înclinat, de unghi $\alpha = 9,0°$, care are jumătatea superioară absolut netedă fără frecări, iar jumătatea inferioară cu coeficientul de frecare μ. Pentru ce valori μ corpul poate ajunge la baza planului? (Aplicați considerații energetice.)

1.3.9. Un motor de putere $P = 4,9$ kW trage uniform în sus de-a lungul unui plan înclinat un corp. Cunoscînd impulsul corpului $p = 1000$ N.s și unghiul de frecare $\varphi = 3,0°$, aflați unghiul planului.

1.3.10. Un corp de masă $m = 200$ g este lansat cu viteza inițială $v_0 = 12$ m/s în sus de-a lungul unui plan înclinat de unghi $\alpha = 30°$. Coeficientul de frecare la lunecare $\mu = 0,30$. Cîtă căldură se degajă prin frecare în timpul $t = 3,5$ s de la lansare?

1.3.11. Ce viteză trebuie să aibă schiorul în punctul D pentru a putea urca liber pînă în punctul A? Se dau: înălțimea $h = 1,00$ m, distanța

orizontală $d = 10$ m și coeficientul de frecare $\mu = 0,10$. Cu ce viteză se întoarce liber înapoi în punctul D?

1.3.12. Un corp de masă $m = 2,00$ kg lunecă liber pe un plan înclinat de unghi $\alpha = 30°$. După o distanță $s = 1,00$ m corpul are viteza $v = 3,7$ m/s. Calculați pierderea de energie mecanică.

(**) **1.3.13.** O sanie de masă $m = 40$ kg este trasă lent în sus pe un deal de zăpadă de înălțime $h = 2,00$ m și lungime pe orizontală $l = 10,0$ m. În fiecare moment sfoara este tangentă la suprafața dealului, iar coeficientul de frecare este $\mu = 0,050$. Aflați lucrul mecanic efectuat de forța de tracțiune.

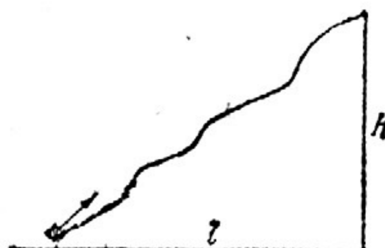


Fig.1.3.13

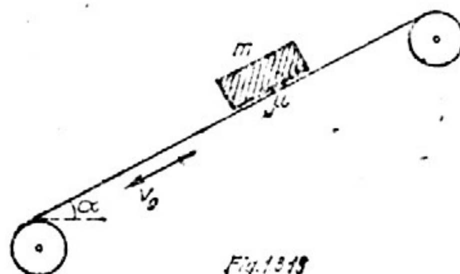


Fig.1.3.18

1.3.14. Un avion de masă $m = 2,5$ t cu motor oprit planează cu viteza $v = 144$ km/h coborînd de la o înălțime $h_1 = 2,0$ km pînă la o înălțime $h_2 = 1,0$ km, parcurgînd o distanță $d = 10$ km. Ce putere trebuie să dezvolte motorul pentru a se întoarce înapoi cu aceeași viteză?

1.3.15. O sanie de masă $m = 200$ kg urcă un deal cu viteza $v = 36$ km/h motorul dezvoltînd o putere $P = 0,80$ kW. Coeficientul de frecare cu zăpada $\mu = 0,010$. Aflați panta dealului.

1.3.16. Un camion de masă $m = 4,0$ t coboară o pantă $p = 5,0$ % cu viteză constantă $v = 54$ km/h cu motor decuplat. Ce putere trebuie să dezvolte motorul pentru a urca înapoi aceeași pantă cu aceeași viteză?

1.3.17. Un camion urcă o pantă mică (sub 5°) cu viteza $v_1 = 30$ km/h și apoi coboară pe aceeași pantă cu viteza $v_2 = 50$ km/h cu aceeași putere a motorului. Ce viteză va avea camionul pe un drum orizontal la aceeași putere a motorului? Toate forțele de rezistență sînt proporționale cu apăsările normale.

1.3.18. Pe o bandă rulantă, înclinată cu unghiul $\alpha = 30°$, care se mișcă în jos cu viteza $v_0 = 0,50$ m/s, se așează ușor o cărămidă de masă $m = 2,0$ kg. Ce lucru mecanic efectuează forța de frecare asupra cărămizii pînă aceasta se oprește față de bandă, coeficientul de frecare fiind $\mu = 0,40$?

1.3.19. Un corp este aruncat sub unghiul $\alpha_0 = 45°$ cu energia cinetică $E_0 = 10,0$ J. Calculați energiile cinetică și potențială la înălțimea maximă.

1.3.20. Sub ce unghi față de orizontală trebuie aruncat un corp, pentru ca energia sa cinetică în punctul de înălțime maximă să fie $f = 25$ % din energia cinetică inițială din punctul de lansare?

(*) **1.3.21.** Pe suprafața orizontală netedă a gheții stă în repaus o scîndură de masă $M = 1,00$ kg și lungime $l = 1,00$ m, la capătul căreia stă o pisică de masă $m = 2,00$ kg. a) Cu ce viteză *minimă* față de gheață trebuie să sară pisica pentru a cădea la celălalt capăt al scîndurii? b) Sub ce unghi față de orizontală trebuie să fie viteza pentru ca energia cheltuită de pisică pentru salt să fie minimă?

1.3.22. Un lanț de lungime $l = 20$ m este trecut simetric peste un scripete ideal ($R \ll l$). Datorită unei trepidații lanțul începe să coboare. Aflați viteza lanțului în momentul cînd părăsește scripetele.

1.3.23. O particulă se mişcă uniform pe un cerc de rază $R = 50$ cm, avînd energia cinetică $E_c = 10,0$ J. Aflaţi forţa care acţionează asupra particulei; puterea dezvoltată de această forţă şi lucrul mecanic efectuat de această forţă la o rotaţie.

1.3.24. Din vîrful O al unui semicilindru fix coboară liber, fără viteză iniţială şi fără frecări un mic corp de masă m. Aflaţi şi reprezentaţi în funcţie de unghiul θ forţa de apăsare exercitată de corp asupra cilindrului.

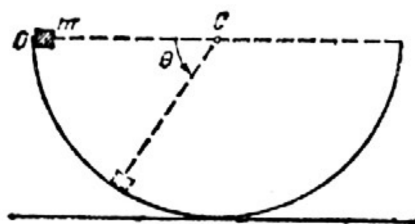


Fig. 1.3.24

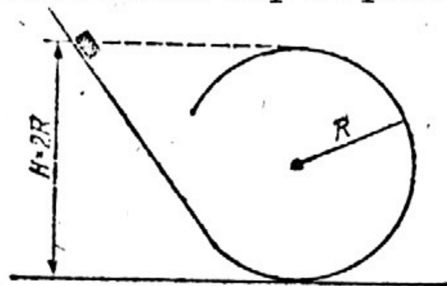


Fig. 1.3.25

1.3.25. De la înălţimea $H = 2R$ lunecă pe un plan înclinat fără frecare un mic corp. Planul înclinat continuă cu o buclă circulară de rază R în planul vertical. La ce înălţime corpul se desprinde de buclă?

1.3.26. Un corp de masă $m = 0,50$ kg alunecă liber de la o înălţime $h = 2,00$ m şi descrie bucla din figură de rază $R = 40$ cm astfel încît în punctul superior al buclei apăsarea este zero. Aflaţi căldura degajată prin frecare de-a lungul traiectoriei pînă la acest punct.

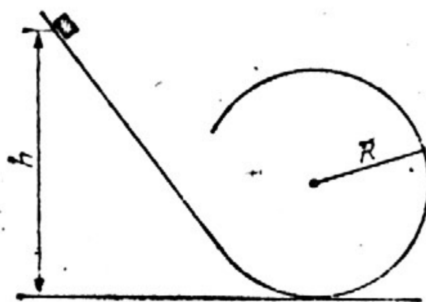


Fig. 1.3.26

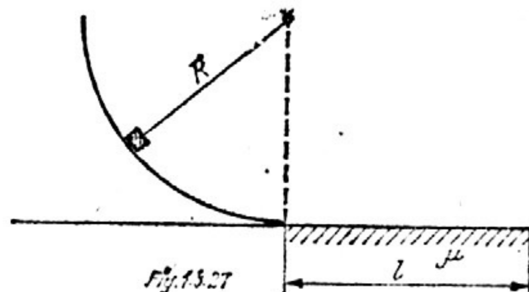


Fig. 1.3.27

1.3.27. Un mic corp lunecă fără frecare pe suprafaţa interioară a unui cilindru de rază $R = 4,00$ m după care intră pe un plan orizontal rugos cu coeficientul de frecare $\mu = 0,20$, oprindu-se după parcurgerea distanţei $l = 30$ m. La ce înălţime h corpul apăsa pe cilindru cu o forţă $N = fmg$, $f = 2,0$?

1.3.28. Un corp de masă m suspendat de un fir oscilează într-un plan vertical sub acţiunea greutăţii cu amplitudinea unghiulară α (pendulul simplu gravitaţional). Care este tensiunea din fir în momentul cînd firul formează unghiul θ cu verticala? Care este tensiunea maximă şi minimă?

1.3.29. Un pendul simplu gravitaţional oscilează cu amplitudinea unghiulară $\alpha = 75°31'$. Pentru ce deviaţie a firului tensiunea din fir este egală în modul cu tensiunea din starea de echilibru static a pendulului?

1.3.30. Un pendul simplu gravitaţional are bila de masă $m = 50$ g suspendată de un fir de lungime $l = 1,00$ m. Ştiind că bila are viteza maximă $v_m = 1,41$ m/s, aflaţi tensiunea minimă din fir.

1.3.31. Într-un tub orizontal oscilează fără frecare un mic corp de masă m pe un arc de cerc de lungime egală cu diametrul tubului. Aflaţi forţa de apăsare pentru o poziţie oarecare a corpului cînd raza vectoare face unghiul θ cu verticala. Cît este apăsarea maximă?

1.3.32. Unei bile suspendate de un fir i se imprimă o viteză orizontală. Cînd firul a deviat cu unghiul $\theta = 30°$ accelerația bilei a fost orizontală. Aflați unghiul de deviație maximă.

1.3.33. La ce tensiune minimă de rupere trebuie să reziste un fir pentru ca o bilă de masă m suspendată de fir să poată descrie un cerc în planul vertical?

1.3.34. De un fir, respectiv tijă imponderabilă, de lungime l este suspendată o bilă. Ce viteză orizontală trebuie imprimată bilei pentru ca ea să urce pînă în punctul superior diametral opus? Aflați tensiunile maxime.

1.3.35. De tavanul unui lift este suspendată printr-un fir de lungime $l = 80$ cm o bilă care oscilează cu amplitudinea unghiulară $\alpha = 60°$ Cînd firul trece prin poziția verticală cablul de susținere a liftului se rupe și sistemul cade liber. Ce viteză față de Pămînt va avea bila atunci cînd lovește tavanul?

(*) **1.3.36.** Un satelit cu masa $m = 200$ kg zboară la altitudinea $h_1 = 100$ km pe o orbită circulară. Datorită frecării cu straturile superioare ale atmosferei, satelitul ajunge pe o orbită circulară la altitudinea $h_2 = 90$ km. Cîtă căldură se dezvoltă prin frecare?

1.3.37. Unei bile suspendate de un fir de lungime $l = 1,00$ m i se imprimă o viteză orizontală $v_0 = 6,0$ m/s. La ce înălțime firul va slăbi și bila va părăsi cercul? Ce viteză va avea bila în acest moment?

1.3.38. O bilă de masă $m = 100$ g suspendată de un fir de lungime $l = 20$ cm este deviată cu $\alpha = 60°$ și i se comunică o viteză $v_0 = 2,0$ m/s perpendicular pe fir în planul vertical conținînd firul. Aflați forța minimă la care trebuie să reziste firul.

1.3.39. Pe o tijă subțire (de masă neglijabilă) ținută orizontal sînt fixate două bile de mase $m_1 = 3,0$ kg, $m_2 = 2,0$ kg la distanțele $r_1 = 1,00$ m, $r_2 = 2,00$ m de axa orizontală transversală în jurul căreia se poate roti tija în planul vertical, ca în figură. Ce viteză va avea bila inferioară cînd tija, lăsată liber, va trece prin poziția verticală?



Fig. 1.3.39

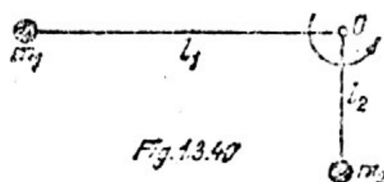


Fig. 1.3.40

1.3.40. Sistemul din figură cu masele $m_1 = 0,50$ kg, $m_2 = 0,50$ kg fixate pe tije de lungime $l_1 = 40$ cm, $l_2 = 30$ cm, este lăsat liber să se rotească în jurul axei orizontale O. Aflați viteza unghiulară cînd tija l_1 devine verticală.

1.3.41. Pe o tijă de masă neglijabilă, avînd la capătul superior o articulație, sînt fixate două corpuri de mase $m_1 = 200$ g, $m_2 = 100$ g la distanțele $l_1 = 40$ cm, $l_2 = 80$ cm de articulație. Tija este deviată cu unghiul $\alpha = 60°$ și lăsată liber. Ce viteză unghiulară va avea tija atunci cînd trece prin poziția verticală?

1.3.42. O halteră formată din două bile identice legate printr-o tijă de masă neglijabilă, oscilează în planul vertical ca în figură cu amplitudinea $\alpha = 60°$, $r = 10$ cm, $R = 30$ cm. Ce viteză unghiulară are haltera cînd trece prin poziția verticală?

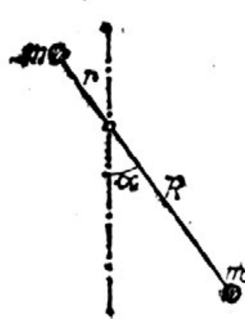


Fig.1.3.42

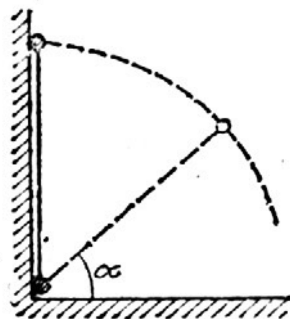


Fig.1.3.43

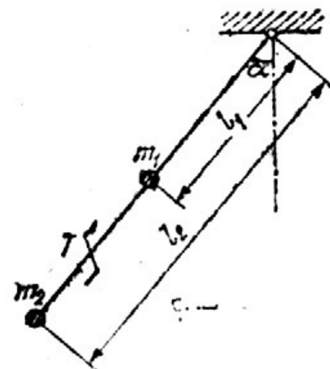


Fig.1.3.47

1.3.43. O halteră formată din două bile mici de masă m fiecare, legate printr-o tijă subţire lungă, este menţinută în poziţie verticală, spirijinită de un perete vertical ca în figură. Cu ce forţă va apăsa bila inferioară asupra peretelui vertical în momentul cînd în căderea sa liberă tija halterei formează unghiul α cu orizontala? (Se neglijează frecările).

1.3.44. Un corp de masă $m = 1{,}00$ kg este coborît uniform cu viteza $v = 2{,}00$ m/s cu ajutorul unui fir elastic de constantă $k = 100$ N/m. Care va fi tensiunea maximă din fir dacă oprim brusc capătul superior al firului?

1.3.45. De un resort de constantă $k = 100$ N/m şi de lungime nedeformată $l = 1{,}00$ m, deviat de la verticală, este atîrnat un corp de masă $m = 1{,}50$ kg. Lăsat liber resortul arată o forţă maximă $F = 30$ N în timpul oscilaţiilor. Cu ce unghi a fost deviat iniţial resortul?

1.3.46. Un fir de lungime $l = 2{,}00$ m rezistă pînă la o tensiune de rupere $T_r = 14{,}7$ N. Un capăt al firului este fixat la înălţimea $h = 4{,}00$ m deasupra solului, iar de celălalt se atîrnă o bilă de masă $m = 1{,}00$ kg. Deviind firul cu bila pînă la orizontală, i se dă drumul. La ce distanţă pe orizontală de punctul de suspensie va cădea bila pe Pămînt?

1.3.47. Un pendul gravitaţional este format dintr-o tijă subţire de greutate neglijabilă şi două corpuri $m_1 = 0{,}60$ kg, $m_2 = 0{,}40$ kg punctiforme la distanţele $l_1 = 0{,}50$ m, $l_2 = 1{,}00$ m de articulaţie ca în figură. Ştiind amplitudinea unghiulară $\alpha = 60°$, aflaţi tensiunea din tijă între cele două corpuri în momentul cînd tija trece prin poziţia verticală.

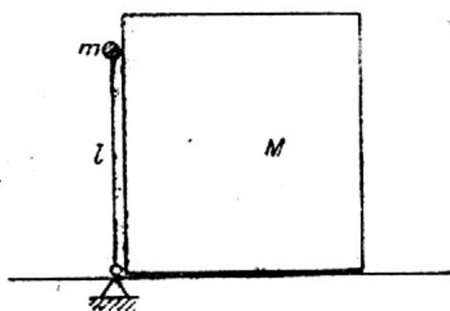
1.3.48. Pe un fir foarte lung este suspendată o bilă de masă $m_1 = 100$ g de care este legată în continuare printr-un fir de lungime $l = 20$ cm o altă bilă de masă $m_2 = 50$ g. Ce viteză orizontală minimă v_0 trebuie imprimată bilei 2 pentru ca să ajungă la acelaşi nivel cu bila 1?

1.3.49. O tijă subţire de masă neglijabilă are la capete două bile de mase $m_1 = 0{,}300$ kg, $m_2 = 0{,}700$ kg şi se poate roti liber în jurul unei axe orizontale perpendiculare pe mijlocul tijei. Iniţial tija este ţinută orizontal şi apoi i se dă drumul. Aflaţi tensiuniie din tijă în momentul cînd tija trece prin poziţia verticală.

1.3.50. Un vagon se mişcă orizontal cu viteza $v_0 = 36$ km/h după care intră pe un plan înclinat de unghi $\alpha = 6{,}0°$, racordat cu planul orizontal. Peste tot frecările sînt neglijabile. În vagon este susendat de tavan un pendul simplu gravitaţional de lungime $l = 1{,}00$ m în repaus faţă de vagon pe planul orizontal. a) Care va fi amplitudinea de oscilaţie a pendulului pe planul înclinat, la urcarea şi la coborîrea vagonului? b) Dar în cazul unui teleferic şi unghiul $\alpha = 30°$?

1.3.51. O tijă de lungime l de masă neglijabilă are capătul inferior într-o articulaţie, iar la capătul superior o bilă de masă m care se sprijină

pe suprafaţa laterală a unui bloc de masă M. Frecările sînt neglijabile. Datorită unui mic impuls sistemul porneşte spre dreapta. Aflaţi unghiul pe care-l va face tija cu orizontala în momentul desprinderii de bloc şi viteza blocului M în acel moment. Aplicaţie numerică : $l = 1{,}00$ m, $M/m = 4{,}0$.



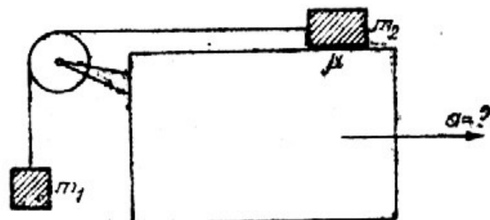


Fig. 1.3.54

1.3.52. Din vîrful unei emisfere fixe absolut netede de rază R lunecă fără viteză iniţială un mic corp. Aflaţi : a) punctul de unde se desprinde corpul de sferă, b) unghiul sub care loveşte el planul orizontal şi c) înălţimea la care urcă după ciocnirea perfect elastică cu planul orizontal.

1.3.53. Un mic corp este aşezat în vîrful unei sfere de rază R, care stă pe un plan orizontal. Sferei i se comunică o viteză orizontală constantă v_0. Neglijînd frecările, aflaţi la ce înălţime se ridică corpul după ciocnirea perfect elastică cu planul orizontal.

1.3.54. Ce acceleraţie trebuie imprimată blocului din figură (sistemul fiind iniţial în repaus) pentru ca corpul m_2 să înceapă să lunece pe bloc? Se dau $m_1 = 1{,}00$ kg, $m_2 = 7{,}50$ kg, $\mu = 0{,}40$.

1.3.55. Două corpuri de mase $m_1 = 0{,}45$ kg, $m_2 = 1{,}50$ kg sînt suspendate pe fire de o tijă subţire de masă neglijabilă, la distanţele $l_1 = 1{,}00$ m, $l_2 = 0{,}60$ m de suport, corpul m_2 fiind aşezat pe podea. Cu ce unghi α trebuie deviat firul cu m_1 pentru ca la revenire corpul m_2 să se desprindă de podea?

1.3.56. De pe vîrful unei sfere fixe netede (fără frecări) lunecă fără viteză iniţială un mic corp. La ce distanţă de la punctul inferior al sferei va cădea?

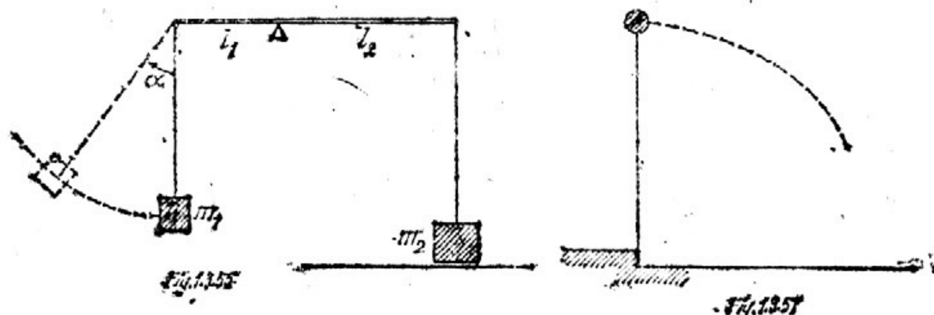


Fig. 1.3.55 Fig. 1.3.57

1.3.57. Bila din figură, fixată la capătul unei tije subţiri de masă neglijabilă, începe să cadă din poziţie verticală fără viteză iniţială. Aflaţi unghiul format de viteză cu orizontala în momentul ciocnirii podelei.

1.3.58. Două resoarte de constante elastice $k_1 = 100$ N/m, $k_2 = 200$ N/m sînt legate în serie, un capăt al resortului compus fiind fix, iar de celălalt se trage încet pînă cînd resortul 2 se alungeşte cu $s = 10{,}0$ cm. Aflaţi lucrul mecanic efectuat.

1.3.59. În figură $m_1 = 0{,}20$ kg, $m_2 = 0{,}10$ kg, $k = 20$ N/m, $F = 6{,}0$ N coeficientul de frecare este acelaşi pentru ambele corpuri. Ce energie potenţială are resortul în regim staţionar?

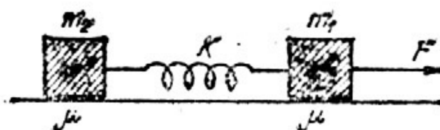


Fig.1.3.59

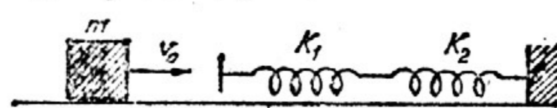


Fig.1.3.60

1.3.60. Un corp de masă $m = 1{,}00$ kg avînd viteza inițială v_0 comprimă cele două resorturi de constante elastice $k_1 = 100$ N/m, $k_2 = 200$ N/m, legate în serie ca în figură. Cunoscînd energia de deformare maximă $E_2 = 6{,}0$ J a resortului 2, aflați viteza v_0.

1.3.61. Două corpuri identice de masă $m = 0{,}50$ kg fiecare sînt legate printr-un resort de constantă elastică $k = 30$ N/m și așezate pe o masă orizontală cu coeficientul de frecare la lunecare $\mu = 0{,}20$. Inițial resortul nu este deformat. Ce viteză minimă trebuie imprimată corpului din dreapta, spre celălalt corp sprijinit de perete, pentru ca acesta din urmă să se desprindă de perete?

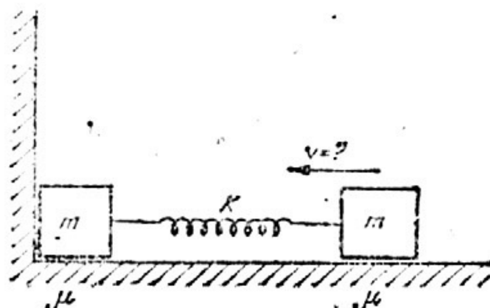


Fig.1.3.61

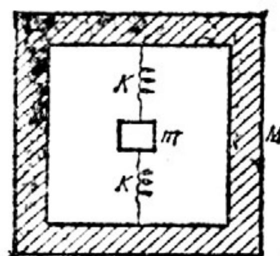


Fig.1.3.62

1.3.62. Cutia de masă $M = 10{,}0$ kg din figură, cade liber de la o înălțime h, corpul $m = 1{,}00$ kg fiind în timpul căderii în repaus față de cutie. Aflați h astfel ca după ciocnirea plastică a cutiei cu solul, cutia să se desprindă ulterior de sol. Constanta elastică $k = 100$ N/m.

1.3.63. Un acrobat cade de la o înălțime $H = 12$ m pe o plasă orizontală întinsă pe care o curbează cu $h = 1{,}0$ m. Plasa are dimensiuni mari, dar masă neglijabilă față de masa omului. Evaluați de cîte ori forța maximă asupra omului este mai mare decît greutatea sa.

1.3.64. Un lift de masă $m = 1{,}00$ t coboară uniform cu viteza $v = 10$ m/s suspendat fiind pe un cablu elastic de oțel. La un moment dat capătul superior al cablului este blocat. Care va fi tensiunea maximă din cablu? Constanta elastică a cablului $k = 962$ kN/m.

1.3.65. Corpul de masă $m = 12{,}0$ kg este deplasat foarte încet orizontal pe o distanță $s = 0{,}40$ m cu ajutorul unei forțe F aplicată sub unghiul $\alpha = 30°$ prin intermediul unui resort de constantă $k = 300$ N/m, inițial nedeformat. Coeficientul de frecare $\mu = 0{,}40$. Aflați lucrul mecanic efectuat de forța F.

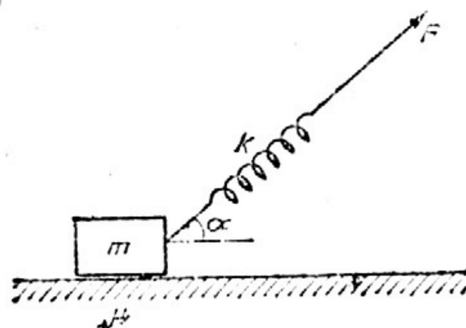


Fig.1.3.65

1.3.66. De-a lungul unui fir elastic de lungime $l_0 = 1{,}00$ m, de constantă elastică $k = 50$ N/m și de masă neglijabilă, lunecă un manșon greu astfel încît forța de frecare dintre fir și manșon este $F_f = 10{,}0$ N. Aflați căldura degajată.

** **1.3.67.** Un corp începe să lunece pe un plan înclinat de unghi α avînd un coeficient de frecare la lunecare $\mu = bx$. Calculați distanța parcursă pînă la oprire și viteza maximă atinsă.

** **1.3.68.** O bilă de masă m atîrnată de un fir oscilează într-un plan vertical cu amplitudinea unghiulară α. Aflați în funcție de unghiul θ format de fir cu verticala: a) tensiunea din fir, b) accelerația bilei, c) valorile extreme ale accelerației.

** **1.3.69.** Un lănțișor de lungime l este așezat pe suprafața unei sfere de rază R, fără frecări, astfel încît un capăt al lanțului se află în vîrful sferei. Cu ce accelerație va porni lănțișorul imediat ce îl lăsăm liber?

* **1.3.70.** Energia cinetică a unei particule care se mișcă pe un cerc de rază R depinde de arcul s după legea $E_c = As^2$. Aflați forța $F(s)$.

** **1.3.71.** O rachetă de masă m pornește vertical în sus sub acțiunea unei forțe de tracțiune $F = 2mg\,(1 - Ay)$, unde $A = \text{const} > 0$. Aflați lucrul mecanic efectuat de această forță de tracțiune pe toată durata urcării.

* **1.3.72.** Energia potențială a unei particule într-un cîmp de forțe cu simetrie sferică este $U = \frac{a}{r^2} - \frac{b}{r}$, unde a, b sînt constante pozitive. Aflați: a) distanța la care particula poate sta în echilibru, b) forța de atracție maximă, c) reprezentați grafic forța și energia potențială.

* **1.3.73.** O particulă de masă m se mișcă pe un cerc de rază R cu accelerația normală $a_n = At$, $A > 0$. a) Aflați puterea dezvoltată de forțele aplicate. b) Dacă puterea dezvoltată de forțele este constantă $P = P_0 = \text{const}$, deduceți legea accelerației normale.

** **1.3.74.** O sanie de masă m și lungime l intră la un moment dat ($t = 0$) cu viteza v_0 de pe zăpadă cu coeficientul de frecare la lunecare μ_1, pe asfalt cu coeficientul de frecare la lunecare $\mu_2 > \mu_1$. Calculați: a) distanța și timpul pînă la oprire, b) căldura pe unitatea de timp, maximă degajată.

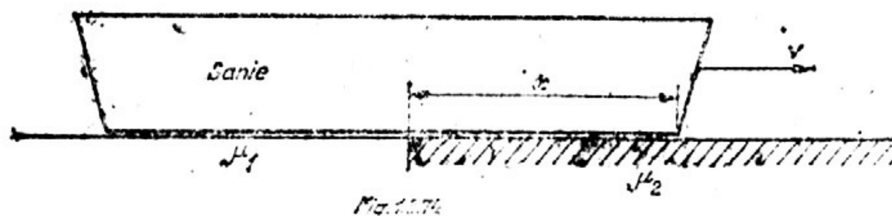


Fig. 1.3.74

** **1.3.75.** Asupra pînzei de arie S a unei bărci suflă vînt cu viteza v_0, exercitînd o forță $F = k\frac{1}{2}S\rho\,(v_0 - v)^2$, unde v este viteza bărcii, ρ — densitatea aerului. Aflați: a) legea vitezei și legea mișcării bărcii neglijînd forțele de frecare sau de rezistență. Barca pornește din repaus. b) În cît timp barca atinge o fracțiune f din viteza vîntului v_0 și ce distanță parcurge în acest timp? Faceți o evaluare numerică. c) Pentru ce viteză a bărcii puterea dezvoltată de forța vîntului este maximă?

** **1.3.76.** Un mic corp de masă m lunecă pe suprafața interioară a unei sfere de rază R, cu coeficientul de frecare la lunecare μ, pornind fără viteză

inițială din extremitatea unui diametru orizontal al sferei. Exprimați energia cinetică a corpului în funcție de unghiul la centru θ descris de raza vectoare a corpului.

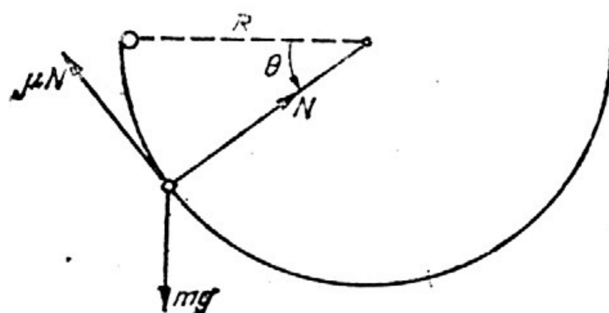


Fig. 1.3.76

(**) **1.3.77.** O particulă se mișcă pe o axă orizontală Ox într-un cîmp de forțe, dependent de coordonată, conform graficului din figură, unde $F_0 = 10$ N. Asupra particulei acționează de asemenea și o forță de frecare cu $|F_f| < F_0$. Particula pleacă din punctul A de abscisă $x_0 = 0{,}10$ m fără viteză inițială. a) Calculați căldura degajată prin frecare pînă la oprirea particulei. b) Considerînd $|F_f| = \text{const}$, reprezentați calitativ viteza particulei în funcție de coordonată (traiectoria în spațiul fazelor).

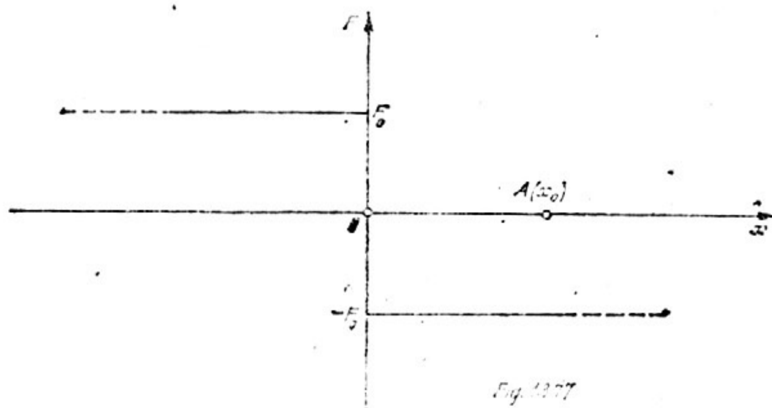


Fig. 1.3.77

** **1.3.78.** Viteza unui vehicul de masă m variază după legea $v = c\,\dfrac{t}{t+\tau}$.
a) Reprezentați grafic legea vitezei și arătați care este semnificația fizică a constantelor c, τ. b) Neglijînd forțele pasive de frecare și de rezistență calculați lucrul mecanic al forței de tracțiune pe intervalul $(0, t)$. c) Verificați teorema variației energiei cinetice.

** **1.3.79.** Viteza unui avion de masă m, pe o porțiune de accelerare variază după legea $v = v_0 + Ax$ ($v = v_0$ la $t = 0$). Calculați lucrul mecanic efectuat în intervalul $(0, t)$. Ce semnificație are constanta A?

** **1.3.80.** Un vehicul merge pe o șosea spre Nord. Asupra vehiculului acționează forța de presiune a vîntului care se intensifică odată cu deplasarea vehiculului, după legea $F = F_0 + As$, și în același timp vîntul își schimbă direcția de la S—N pînă ajunge la E—V după legea $\theta = Bs$. Calculați lucrul mecanic efectuat de forța de presiune a vîntului.

** **1.3.81.** Un corp de masă m se mișcă rectiliniu după legea $x = A + Bt + Ct^2$. Aflați lucrul mecanic al forțelor aplicate efectuat în intervalul $(0, t)$.

1.4. IMPULSUL MECANIC

1.4.1. Două tije de aceeași secțiune sînt lipite cap la cap, astfel ca CM să fie în punctul de alipire. Știind raportul densităților ρ_1/ρ_2, aflați raportul lungimilor și al maselor tijelor.

1.4.2. Într-o barcă de masă $M = 40$ kg, aflată în repaus, stau la extremități doi pescari de mase $m_1 = 40$ kg, $m_2 = 70$ kg, la distanța $d = 5,0$ m unul de altul. Pescarii își schimbă locurile. Cu cît se va deplasa barca?

1.4.3. În sistemul din figură $M = 2,00$ kg, $m_1 = 0,40$ kg, $m_2 = 0,60$ kg, $h = 1,50$ m. Frecările sînt neglijabile și scripetele este ideal. Cu cît se deplasează corpul M pînă în momentul cînd m_2 atinge planul orizontal?

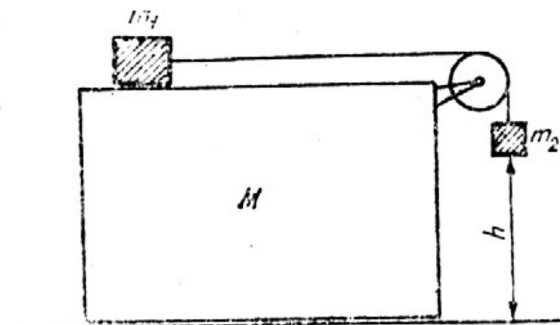


Fig. 1.4.3

1.4.4. O moleculă se mișcă cu viteza $v_1 = 300$ m/s și lovește perfect elastic, frontal, un piston care se mișcă în același sens cu viteza $v_2 = 30$ m/s. Ce fracțiune din energia sa pierde molecula?

1.4.5. Un corp de masă m_1 lovește frontal, perfect elastic, un alt corp de masă m_2 în repaus. Cunoscînd raportul $r = m_2/m_1$, aflați în ce raport se schimbă energia corpului m_1 prin ciocnire.

1.4.6. O locomotivă se mișcă cu viteza v_0 și lovește frontal perfect elastic un mic cărucior aflat în repaus. Ce viteză va căpăta căruciorul?

1.4.7. Un fascicul paralel de particule identice, fiecare de masă $m = 1,00$ mg și viteză $v = 10,0$ m/s în direcția fasciculului, lovește perpendicular un perete (piston) care se mișcă în aceeași direcție cu viteza $u = 2,00$ m/s. Concentrația particulelor în fascicul este $n = 10 \cdot 10^6$ m^{-3} și o fracțiune $f = 0,40$ din ele sînt absorbite de perete, iar restul reflectate absolut elastic. Ce presiune se exercită asupra peretelui?

1.4.8. O particulă mică cade liber în *atmosferă* de la o înălțime *mare*. La suprafața Pămîntului particula lovește perfect elastic o placă orizontală fixă. Aflați accelerația particulei imediat după ciocnire.

1.4.9. Două baloane sferice de volume egale $V = 1,00$ m^3, dar de mase diferite $m_1 = 7,2$ kg, $m_2 = 5,2$ kg, sînt legate între ele printr-un fir lung. Baloanele coboară vertical în armosferă liniștită de la o înălțime mare. a) Aflați tensiunea din fir cînd baloanele ajung în vecinătatea suprafeței Pămîntului. b) La suprafața Pămîntului primul balon ciocnește perfect elastic acoperișul orizontal al unui bloc. Aflați accelerația acestui balon imediat după ciocnire. Se dă densitatea aerului $\rho = 1,3$ kg/m^3.

1.4.10. Într-o barcă de masă $M = 280$ kg stau doi oameni de mase egale $m = 70$ kg. Fiecare om începe să alerge cu viteza relativă $u = 6,0$

m/s față de barcă și sare în apă. Aflați viteza bărcii dacă oamenii încep să alerge și sar: a) în același sens simultan și consecutiv, b) în sensuri opuse simultan și consecutiv.

1.4.11. Un corp de masă $M = 990$ g aflat în repaus pe un plan orizontal cu coeficientul de frecare $\mu = 0,050$ este ciocnit plastic de un glonț de masă $m = 10$ g cu viteza $v = 200$ m/s. Ce distanță parcurge sistemul?

1.4.12. Într-un jgheab orizontal neted se află n corpuri cu masele descrescînde $m_1, \ldots, m_n$, astfel ca $m_i/m_{i+1} = k > 1$. I se imprimă primului corp viteza v_1 spre celelalte corpuri. Considerînd ciocnirile perfect elastice, aflați viteza ultimului corp și randamentul energetic.

1.4.13. Pe un plan orizontal fără frecări se află două corpuri $m = 20$ g și $M = 30$ g. Planul orizontal continuă (racordat) cu un plan înclinat pe care coeficientul de frecare este același pentru ambele corpuri. Imprimînd corpului m o viteză convenabilă v_0 spre corpul M, primul corp se oprește după ciocnire, iar corpul M urcă pe planul înclinat pînă la o înălțime $h_1 = 40$ cm. Schimbînd între ele corpurile, se imprimă corpului M aceeași viteză v_0 și atunci corpul m urcă după ciocnire pe planul înclinat pînă la înălțimea h_2. Aflați h_2.

1.4.14. Pe o suprafață orizontală absolut netedă stă o scîndură de masă $M = 1,60$ kg și lungime $l = 1,20$ m peste care este așezat la un capăt un corp de masă $m = 0,40$ kg, avînd coeficientul de frecare $\mu = 0,30$ cu scîndura. Ce viteză orizontală minimă trebuie imprimată brusc scîndurii astfel încît corpul m să lunece și să cadă de pe scîndură?

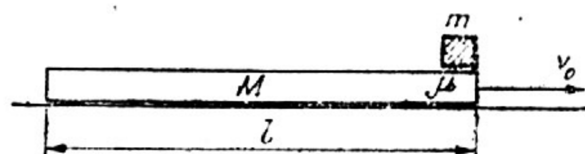


Fig. 1.4.14

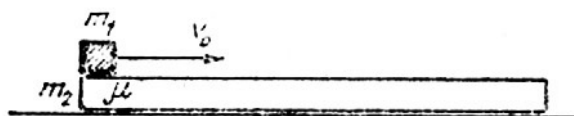


Fig. 1.4.15

1.4.15. Unui corp de masă $m_1 = 1,00$ kg, așezat la capătul unei scînduri orizontale lungi de masă $m_2 = 2,00$ kg, i se imprimă o viteză orizontală $v_0 = 2,00$ m/s orientată spre celălalt capăt. Coeficientul de frecare la lunecare dintre corp și scîndură $\mu = 0,20$, iar între scîndură și masă zero. Aflați distanța parcursă de corp pe scîndură.

1.4.16. Un corp de masă $m = 1,00$ kg este lansat pe un cărucior de masă $M = 4,00$ kg și lungime $l = 0,80$ m, aflat în repaus și care se poate mișca fără frecare pe planul orizontal. Cu ce viteză trebuie lansat corpul pentru ca să se oprească în punctul de lansare după ce s-a ciocnit perfect elastic de peretele de la extremitatea căruciorului, ca în figură? Coeficientul de frecare la lunecare dintre corp și cărucior este $\mu = 0,20$.

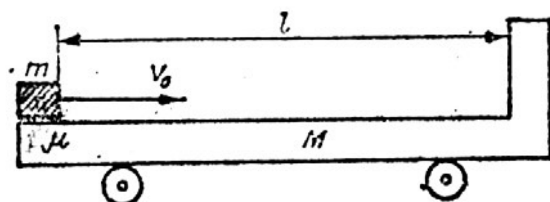


Fig. 1.4.16

1.4.17. Un obuz aflat în repaus explodează în două fragmente de mase $m_1 = 1,00$ kg, $m_2 = 2,00$ kg care capătă energia cinetică totală $W = 30$ kJ. Aflați vitezele fragmentelor.

1.4.18. Un balon de sticlă se sparge de podea dacă cade liber de la o înălţime minimă $h = 0,90$ m. Ce viteză minimă trebuie să aibă acest balon ca lovind un alt balon identic aflat iniţial în repaus, baloanele să se spargă?

1.4.19. Un glonţ de masă $m = 10$ g zburînd orizontal cu viteza $v_0 = 500$ m/s străpunge un bloc de lemn de masă $M = 1,00$ kg, aşezat pe o masă orizontală netedă, fără frecări, şi iese cu viteza $v = 300$ m/s. Aflaţi ce fracţiune din energia glonţului se transformă în căldură.

1.4.20. Un glonţ zburînd cu viteza v_0 străpunge mai multe scînduri identice aşezate transversal. După străpungerea primei scînduri viteza glonţului $v' = fv_0$, unde $f = 0,80$. Aflaţi în a cîta scîndură glonţul se va opri.

1.4.21. Un patinator de masă $M = 60$ kg aruncă orizontal o bilă de masă $m = 6,0$ kg care în momentul desprinderii de patinator are viteza relativă $u = 2,20$ m/s faţă de patinator. Aflaţi lucrul mecanic efectuat de patinator şi coeficientul de frecare la lunecare dacă patinatorul se deplasează după aruncare cu $s = 20$ cm.

1.4.22. O bilă de masă $m = 10$ g, căzînd liber în jos, loveşte podeaua şi urcă la înălţimea $h = 80$ cm. Variaţia de impuls la ciocnire este $|\Delta\vec{p}| = 0,17$ kg. m/s. La ce înălţime va urca bila după următoarea ciocnire cu podeaua dacă pierderea procentuală de energie la ciocnire este aceeaşi?

1.4.23. Într-un vagonet de masă $M = 20$ kg care se mişcă orizontal cu viteza $v = 5,0$ m/s, cade de la înălţimea $h = 3,0$ m o cărămidă de masă $m = 5,0$ kg. Aflaţi căldura degajată.

1.4.24. Asupra unui tren care merge cu viteza $v_0 = 72$ km/h cade la un moment dat vertical ploaia cu debitul $Q = 10,0$ kg/s, care apoi se scurge pe pereţii vagoanelor. Cu cît trebuie să crească puterea locomotivei pentru a păstra viteza neschimbată?

1.4.25. Corpul $m_1 = 1,00$ kg, căzînd liber pe distanţa $h_1 = 1,60$ m, ciocneşte perfect elastic corpul $m_2 = 2,00$ kg aflat în repaus, care imediat după ciocnire este lăsat liber. Sistemul ciocneşte apoi plastic planul orizontal la distanţa $h_2 = 2,00$ m. Aflaţi forţa de impact cu care sistemul va ciocni planul orizontal, dacă durata ciocnirii este $\tau = 10$ ms.

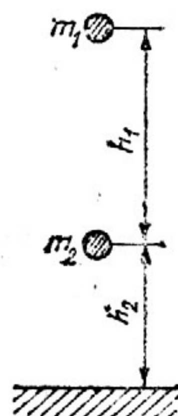


Fig. 1.4.25

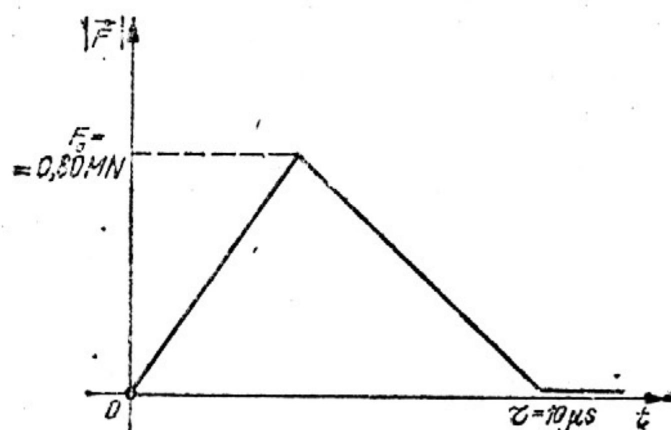


Fig. 1.4.30

1.4.26. O minge de masă $m = 100$ g cade fără viteză iniţială de la o înălţime $h = 54,5$ cm. După fiecare lovire a podelei viteza mingii reprezintă o fracţiune $k = 0,90$ din viteza de dinaintea ciocnirii (coeficientul de restituţie), iar timpul de contact cu podeaua reprezintă o fracţiune $f = 0,20$ din timpul de cădere respectiv. Aflaţi timpul pînă la oprirea definitivă a mingii şi distanţa totală parcursă de minge.

1.4.27. De un aerostat, aflat în repaus în atmosferă, este legată o scară pe care stă un om. Masa aerostatului cu scara este $M = 40$ kg, iar a omului $m = 60$ kg. Ce viteză va avea aerostatul, dacă omul începe să urce pe scară cu viteza $u = 1,00$ m/s față de scară? Cîtă energie cinetică dezvoltă omul punîndu-se în mişcare?

1.4.28. Un vagonet de masă $m = 8,0$ kg se mișcă cu viteza $v_0 = 9,8$ m/s fără frecări. Pe platforma vagonetului se așează o cărămidă de masă $m_0 = 2,00$ kg. Ze distanță parcurge cărămida pe platformă pînă la oprirea sa față de platformă? Coeficientul de frecare între cărămidă și platformă $\mu = 0,40$.

1.4.29. Trei bărci merg una după alta cu viteza $v = 0,60$ m/s fiecare. În fiecare barcă se află cîte un om, astfel încît masa bărcii și a omului este $M = 90$ kg, iar în barca din mijloc mai sînt doi saci de masă $m = 10,0$ kg fiecare. Din barca din mijloc sînt aruncați succesiv cei doi saci, unul spre barca din față, apoi al doilea spre barca din spate, cu aceeași viteză relativă $u = 1,10$ m/s față de barcă. Aflați vitezele finale ale bărcilor.

(**)**1.4.30.** Două bile de mase $m_1 = 0,20$ kg, $m_2 = 0,40$ kg se mișcă cu vitezele $v_1 = 10$ m/s, $v_2 = -15$ m/s (una spre cealalta). Forța de interacțiune dintre bile se poate aproxima prin linia frîntă din figură. Considerînd ciocnirea unidimensională, calculați vitezele finale, coeficientul de restituție și căldura degajată prin ciocnire.

1.4.31. O sferă de lemn de masă $m = 1,00$ kg este așezată pe un suport inelar. De jos în sus se trage un glonț de masă $m_0 = 10$ g și viteză $v_0 = 450$ m/s. Glonțul străpunge sfera, care saltă pînă la o înălțime $h = 0,90$ m. La ce înălțime urcă glonțul?

1.4.32. Un corp este aruncat vertical în sus cu viteza $v_0 = 10,0$ m/s. În punctul de înălțime maximă el se dezintegrează în două fragmente. Fragmentul cu masa egală cu o fracțiune $f = 0,20$ din masa corpului cade vertical în jos și lovește Pămîntul cu viteza $v' = 20$ m/s. Cu ce viteză cade pe Pămînt cel de-al doilea fragment și după cît timp de la căderea primului?

1.4.33. Un corp de masă $m_1 = 1,00$ kg se mișcă cu viteza $v_1 = 6,0$ m/s și ajunge din urmă un corp de masă $m_2 = 3,0$ kg care se mișcă în același sens cu viteza $v_2 = 2,0$ m/s. Cu ce viteză se deplasează CM al corpurilor înainte și după ciocnire?

1.4.34. O moleculă de masă $m = 5,0 \cdot 10^{-26}$ kg, aflată într-un cilindru cu piston, se mișcă cu viteza $v_1 = 500$ m/s în întîmpinarea unui piston care se mișcă cu viteza $v_2 = 2,00$ m/s și de care se ciocnește frontal perfect elastic. Aflați variația energiei cinetice și a impulsului moleculei în urma ciocnirii.

1.4.35. O particulă de masă m_1 lovește o altă particulă de masă m_2 aflată în repaus. Aflați ce fracțiune din energia cinetică inițială a particulei 1 este transferată particulei 2, dacă ciocnirea este unidimensională: a) elastică, b) plastică, c) ce fracțiune se transformă în căldură în ciocnirea plastică? d) Cînd transferul de energie cinetică este maxim?

1.4.36. Peste un scripete ideal este trecut un fir cu două corpuri de mase $m_1 = 0,40$ kg, $m_2 = 0,60$ kg la capete. Care va fi accelerația centrului de masă al celor două corpuri?

1.4.37. Două stele se rotesc în jurul centrului de masă comun cu viteze constante în modul $v_1 = 10$ km/s, $v_2 = 20$ km/s și cu perioada $T = 100$ zile. Care sînt masele stelelor și distanța dintre ele? (Constanta gravitațională $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11}$N. m²/kg²)

1.4.38. Două corpuri de mase $m_1 = 0,40$ kg, $m_2 = 0,60$ kg, legate printr-un fir orizontal de lungime $l = 1,00$ m, sînt puse în mișcare de rotație în planul orizontal cu turația $n = 1,00$ rot/s în jurul axei verticale care trece prin CM. Care va fi tensiunea din fir?

1.4.39. Un glonț de masă m străpunge o sferă de masă M suspendată de un fir și își micșorează viteza de $n = 3,0$ ori. Aflați între ce limite este cuprinsă fracțiunea din energia cinetică a glonțului transformată în căldură.

1.4.40. O particulă α de energie $E_1 = 5,0$ MeV lovește frontal perfect elastic un nucleu de cupru în repaus și ricoșează înapoi cu energia $E_1' = 3,9$ MeV. Aflați raportul maselor m_{Cu}/m_α.

1.4.41. O bilă de lemn de masă $M = 1,00$ kg este suspendată de un fir. Un glonț de masă $m = 10$ g străpunge bila dacă viteza sa $v \geqslant v_0 = 300$ m/s. Ce viteză va căpăta bila dacă glonțul vine cu viteza $v = 500$ m/s?

1.4.42. Evaluați viteza maximă pe care o pot imprima unei mingi de ping-pong doi jucători dacă viteza maximă a paletei este v_0 și fiecare jucător lovește mingea de 3 ori. Cît timp va fi necesar pentru aceasta, dacă lungimea mesei este l?

1.4.43. Două bile de mase $m_1 = 0,40$ kg, $m_2 = 0,60$ kg sînt suspendate pe fire paralele de lungime $l = 1,00$ m astfel încît bilele se ating. Prima bilă este deviată cu unghiul $\alpha_1 = 60°$ și lăsată liber. Cu ce unghiuri deviază bilele dacă ciocnirea este: a) elastică, b) plastică, c) cîtă căldură se degajă în ciocnirea plastică?

1.4.44. Un corp de masă $M = 4,0$ kg cade liber de la o înălțime $H = 9,8$ m. La înălțimea $H/2$ corpul este lovit plastic de un corp de masă $m = 6,0$ kg cu viteza orizontală $v_0 = 9,8$ m/s. Aflați viteza sistemului la căderea pe Pămînt.

1.4.45. Un mic corp avînd viteza orizontală $v_0 = 10$ m/s cade într-o groapă de adîncime $h = 1,00$ m cu pereți paraleli transversali cu distanța $d = 5,0$ cm între ei, de care se ciocnește perfect elastic. Cîte ciocniri va suferi corpul cu pereții pînă ajunge la fund?

1.4.46. Un corp de masă $M = 1,00$ kg cade liber fără viteză inițială de la înălțimea $H = 7,00$ m (în vid). La înălțimea $h = 3,00$ m el este lovit plastic, orizontal, de un alt corp de masă $m = 1,00$ kg. După cît timp de la ciocnire corpurile ajung pe Pămînt?

1.4.47. La capătul unei scînduri de masă $M = 200$ g și lungime $l = 30$ cm care plutește pe apă șade o broască de masă $m = 100$ g. Cu ce viteză minimă față de apă trebuie să sară broasca pentru a nimeri exact la celălalt capăt al scîndurii?

1.4.48. La capătul unei bărci ușoare de lungime $l = 1,50$ m și masă $M = 20,0$ kg stă un om de masă $m = 60$ kg. Cu ce viteză minimă față de barcă (după desprinderea de barcă) trebuie să sară ca să ajungă la celălalt capăt al bărcii? Cît lucru mecanic efectuează omul?

1.4.49. Un atlet își ia avînt într-un timp $t = 3,0$ s și sare în lungime. Să se evalueze lungimea maximă posibilă a săriturii sale știind înălțimea maximă atinsă în timpul săriturii $h = 1,00$ m și coeficientul de frecare $\mu = 0,30$.

1.4.50. Un glonț de masă $m = 9,0$ g avînd viteza inițială $v_0 = 160$ m/s înclinată cu unghiul $\alpha = 30°$ față de orizontală, străpunge o sferă de lemn de masă $M = 300$ g așezată pe un suport inelar. Știind că glonțul atinge înălțimea maximă $h = 45$ m, ce înălțime maximă atinge sfera de lemn?

1.4.51. Un proiectil explodează în punctul superior al traiectoriei la înălţimea $h = 320$ m în două fragmente avînd raportul maselor $k = m_2/m_1 = 2,0$. Fragmentul mai greu cade exact sub verticala exploziei după timpul $\tau = 4,0$ s de la explozie, la distanţa $s = 1200$ m de la locul lansării proiectilului. Aflaţi la ce distanţă orizontală de la locul exploziei cade fragmentul mai uşor ($g = 10$ m/s²).

1.4.52. Din două puncte de la suprafaţa Pămîntului se aruncă unul spre altul sub unghiurile $\alpha = 60°$, $\beta = 30°$ în acelaşi plan vertical două corpuri din care primul cu viteza $v_1 = 12$ m/s, iar al doilea cu masa de $n = 2,0$ ori mai mare decît primul, astfel încît corpurile se ciocnesc plastic. Aflaţi viteza corpului rezultat la ciocnirea cu Pămîntul.

1.4.53. Un om de masă $M = 60$ kg stă pe gheaţa netedă fără frecări şi aruncă orizontal de la înălţimea $h = 1,80$ m un corp de masă $m = 3,0$ kg care cade la o distanţă (orizontală) $b = 9,0$ m de la locul aruncării. Aflaţi lucrul mecanic efectuat de om.

1.4.54. O bilă cade liber de la o înălţime $h = 4,0$ m. La suprafaţa Pămîntului ea loveşte perfect elastic o placă fixă înclinată sub unghiul $\alpha = 30°$ faţă de orizontală. La ce înălţime se va ridica bila după ciocnire? La ce distanţă de placă va cădea pe Pămînt?

1.4.55. Un vagon loveşte frontal perfect elastic o minge aflată în repaus la marginea unei gropi care are adîncimea $h = 4,9$ m şi lăţimea $b = 4,0$ m. Ce viteză trebuie să aibă vagonul pentru ca mingea ciocnindu-se perfect elastic o singură dată cu podeaua gropii să ajungă la celălalt mal?

1.4.56. Pe un plan înclinat lunecă liber fără viteză iniţială un corp. La vaza planului el ciocneşte frontal, perfect elastic, un perete şi urcă înapoi pe plan. Stiind raportul dintre distanţa de urcare şi cea de coborîre $s_u/s_c = f = 0,50$, aflaţi raportul dintre timpul de urcare şi timpul de coborîre.

1.4.57. Un corp lunecă fără viteză iniţială pe un plan înclinat de unghi $\alpha = 45°$ (cu orizontala). La baza planului el loveşte perfect elastic un perete fix aşezat transversal pe viteză, după care urcă înapoi în sus parcurgînd o fracţiune $f = 0,60$ din distanţa de coborîre. Aflaţi coeficientul de frecare la lunecare.

1.4.58. O bandă rulantă de lungime $l = 2,50$ m şi înclinată cu unghiul $\alpha = 30°$ faţă de orizontală urcă grăunţe care cad cu debitul $m^* = 1,00$ kg/s. Considerînd că viteza iniţială a grăunţelor este zero şi că ajung repede în repaus faţă de bandă, aflaţi forţa minimă necesară pentru a trage în sus banda şi viteza corespunzătoare a benzii.

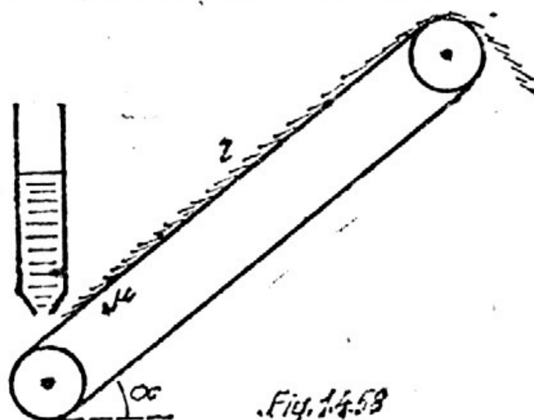


Fig. 1.4.58

1.4.59. O minge cade de la înălţimea $h = 1,00$ m şi loveşte perfect elastic de două ori un plan înclinat. Distanţa dintre punctele de ciocnire este $l = 4,0$ m. Aflaţi unghiul de înclinare al planului.

1.4.60. O bilă lovește perfect elastic sub unghiul de incidență β un plan înclinat de unghi α. Pentru ce unghiuri β bila se întoarce exact în punctul inițial de impact?

1.4.61. Un săculeț cu făină alunecă liber, fără viteză inițială, de la o înălțime $h = 8,0$ m pe un plan înclinat de unghi $\alpha = 45°$. După coborîre, săculețul continuă mișcarea pe un plan orizontal, neracordat cu cel înclinat. Coeficientul de frecare este peste tot $\mu = 0,50$. La ce distanță de baza planului înclinat se va opri săculețul?

1.4.62. Un săculeț cu făină lunecă liber pe un plan înclinat de unghi $\alpha = 60°$. Planul înclinat continuă neracordat cu un plan orizontal unde coeficientul de frecare este $\mu = 0,60$. Unde se va opri săculețul?

1.4.63. Un săculeț cu făină lunecă pe un plan înclinat de unghi α (cu orizontala) și ajunge la baza planului cu viteza v_0. Planul înclinat continuă neracordat cu un plan orizontal pe care coeficientul de frecare la lunecare este μ. Să se demonstreze că dacă timpul de ciocnire al săculețului cu planul înclinat

$$\tau < \frac{v_0}{g}\left(\frac{1}{\mu}\cos\alpha - \sin\alpha\right)\cdot$$

atunci săculețul continuă mișcarea pe planul orizontal.

1.4.64. Un săculeț cu făină lunecă pe un plan înclinat de unghi α (cu orizontala). Planul înclinat continuă neracordat cu un plan orizontal unde coeficientul de frecare la lunecare este μ. Să se demonstreze că dacă $\mu \geqslant \text{ctg}\,\alpha$, săculețul se va opri sigur la baza planului.

1.4.65. Într-o pîlnie cu deschiderea $2\alpha = 60°$ și axă de simetrie verticală sare o bilă, ciocnindu-se de două puncte diametral opuse, situate la aceeași înălțime, la fiecare interval de timp $T = 1,00$ s. Aflați viteza maximă și cea minimă a bilei.

1.4.66. Un corp alunecă liber pe o distanță $s = 4,9$ m pe un plan înclinat de unghi $\alpha = 45°$ cu coeficientul de frecare la lunecare $\mu = 0,30$. La baza planului corpul se ciocnește elastic cu un perete transversal. Cît timp va dura mișcarea pînă la oprirea definitivă a corpului (neglijînd timpurile de ciocnire) și care va fi distanța totală parcursă?

1.4.67. Un mic corp alunecă liber fără frecări pe un plan înclinat de lungime $l = 0,80$ m și unghi $\alpha = 30°$ cu orizontala. După părăsirea planului înclinat corpul cade pe un plan orizontal situat cu $h = 0,90$ m mai jos, de care se ciocnește perfect elastic. La ce înălțime maximă urcă corpul?

1.4.68. Pe un plan înclinat de unghi $\alpha = 30°$ cade vertical, fără viteză inițială, de la o înălțime $h = 1,00$ m, o bilă. Considerînd ciocnirea perfect elastică, aflați la ce distanță de-a lungul planului înclinat va lovi bila a doua oară planul înclinat.

1.4.69. Două bile sînt azvîrlite orizontal cu aceeași viteză peste un mic plan înclinat fix. Prima bilă lovește planul perfect elastic, iar a doua parțial elastic, anulîndu-se doar componenta normală a vitezei. Ce unghi trebuie să aibă planul pentru ca bilele să cadă la aceeași distanță de plan?

1.4.70. Pe un postament de masă $M = 1,00$ kg este prinsă de un fir de lungime $l = 75$ cm o bilă de masă $m = 200$ g. Deviem bila ca în figură și îi dăm drumul. Neglijînd frecările, aflați viteza postamentului în momentul cînd bila trece prin punctul inferior.

1.4.71. O bilă de oțel suspendată de o tijă subțire elastică, de masă neglijabilă, de lungime $l = 0,80$ m, este deviată pînă la orizontală și lăsată liberă. În punctul inferior bila ciocnește perfect elastic un perete

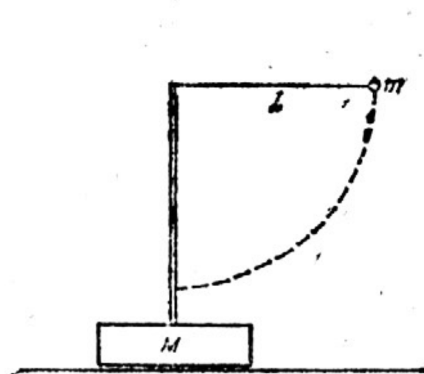


Fig. 1.4.70

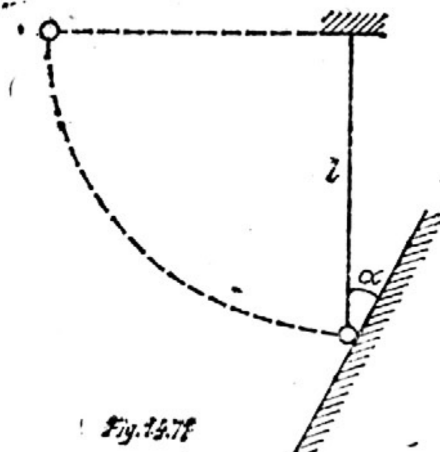


Fig. 1.4.71

înclinat cu unghiul $\alpha = 30°$ ca în figură. Pînă la ce înălţime se ridică bila după ciocnire?

1.4.72. O sferă de masă $M = 1,00$ kg este suspendată de un fir de lungime $l = 0,80$ m. Firul este deviat cu unghiul $\alpha = 60°$ şi lăsat liber. Cînd sfera trece prin poziţia de echilibru, ea ciocneşte plastic o bilă de masă $m = 0,20$ kg care vine din sens opus sferei. Ştiind unghiul de deviere $\alpha' = 30°$ a corpurilor, aflaţi viteza bilei.

1.4.73. O bilă suspendată de un fir de lungime $l = 0,80$ m se află la înălţimea $h = 30$ cm deasupra unei mese orizontale. Bila este deviată cu 90° şi lăsată liber. Ştiind că firul rezistă pînă la o dată şi jumătate din greutatea bilei, aflaţi la ce înălţime se va ridica bila după ciocnirea perfect elastică cu masa.

1.4.74. O bilă de masă $m = 100$ g, suspendată de un fir de lungime $l = 100$ cm, a fost deviată pînă la poziţia orizontală a firului de suspensie şi lăsată liber. În punctul inferior al traiectoriei bila loveşte un corp de masă $M = 200$ g care parcurge o distanţă $d = 200$ cm pînă se opreşte, în timp ce bila ricoşează. Între ce limite este cuprins coeficientul de frecare la lunecare dintre corpul M şi planul orizontal?

1.4.75. Din practică se ştie că este mai uşor să sări pe ţărm de pe un şlep decît dintr-o barcă uşoară. De ce? Comparaţi în cele două cazuri lungimea săriturii omului şi forţa medie dezvoltată de om, considerînd că omul dezvoltă în ambele cazuri acelaşi lucru mecanic.

1.4.76. O bară de masă $m = 10,0$ kg execută o rotaţie completă în plan vertical în jurul unei axe transversale orizontale, trecînd printr-un capăt al barei. a) Dacă în punctul superior apăsarea asupra axei este egală cu greutatea barei, care va fi apăsarea în punctul inferior? b) Dar dacă sus apăsarea este zero?

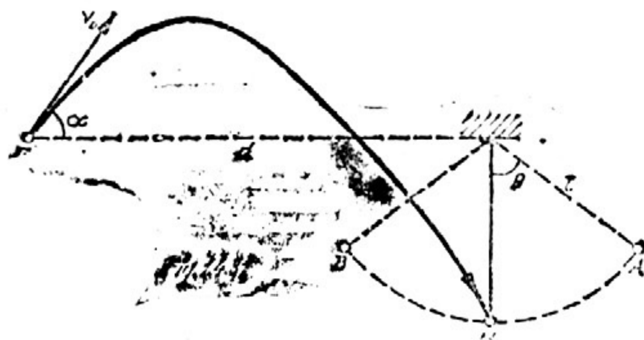
1.4.77. La periferia unui disc de rază $R = 0,40$ m şi masă $M = 8,0$ kg este lipit un corp mic de masă $m = 100$ g. Cu ce viteză trebuie să se rostogolească (fără lunecare) discul pentru ca la fiecare rotaţie el să se desprindă de Pămînt?

(*) **1.4.78.** Două bile cu masele $m_{1;2}$ suspendate de fire paralele egale sînt deviate simetric şi lăsate liber. Bilele se ciocnesc plastic. Aflaţi ce fracţiune din energia cinetică a bilelor se transformă în căldură. Pentru ce raport al maselor cantitatea de căldură va fi maximă?

1.4.79. Două bile mici de mase diferite suspendate pe fire paralele, se ating. Prima bilă este deviată (cu fir întins) pînă la o înălţime h_1 şi apoi lăsată liber. În urma ciocnirii prima bilă se opreşte, iar cealaltă deviază la o înălţime $h_2 < h_1$. Aflaţi pierderea relativă de energie cinetică prin ciocnire.

1.4.80. Două bile suspendate pe fire paralele se ating între ele. Una din bile este deviată și apoi lăsată liber. După ciocnirea perfect elastică, bilele se ridică la aceeași înălțime. Aflați raportul maselor. Dar dacă coeficientul de restituție este k?

1.4.81. O sferă de masă M oscilează cu amplitudinea mică θ suspendată de un fir de lungime l. În momentul cînd sfera este într-o poziție extremă se aruncă o bilă de masă m dintr-un punct situat la aceeași înălțime cu punctul de suspensie al sferei la distanța d de aceasta, în planul de oscilație a sferei. Aflați viteza bilei și unghiul ei cu orizontala astfel ca bila să ciocnească plastic sfera în momentul trecerii ei prin poziția de echilibru și prin ruperea firului corpurile să cadă vertical.



1.4.82. Un corp de masă $m_1 = 300$ g lovește perfect elastic un alt corp de masă m_2 aflat inițial în repaus, după care ricoșează sub unghiul $\pi/2$ față de direcția inițială, cu viteza pe jumătate. Aflați masa m_2.

1.4.83. Două bile de mase $m_1 = 0{,}200$ kg, $m_2 = 0{,}100$ kg se mișcă pe direcții perpendiculare cu vitezele $v_1 = 5{,}0$ m/s, respectiv $v_2 = 10{,}0$ m/s. După cicocnire bila m_2 se oprește. Aflați viteza primei bile după ciocnire și cantitatea de căldură degajată prin ciocnire. Trasați diagrama conservării impulsului.

1.4.84. Două corpuri cu masele $m_1 = 1{,}00$ kg, $m_2 = 2{,}00$ kg se mișcă pe direcții perpendiculare, primul corp cu viteza $v_1 = 10{,}0$ m/s. După ciocnire primul corp se oprește. Ce cantitate de căldură s-a degajat prin ciocnire?

1.4.85. Un proiectil în repaus explodează în trei fragmente de mase $m_{1,2,3}$ cu energia cinetică totală E. Știind că direcțiile vitezelor formează între ele unghiuri $\alpha = 120°$, aflați vitezele fragmentelor.

1.4.86. O particulă de masă m_1 lovește perfect elastic cu viteza v_0 o particulă de masă m_2 aflată în repaus. După ciocnire particula m_1 ricoșează sub un unghi drept față de direcția inițială. Știind viteza inițială v_0, raportul maselor $r = m_2/m_1$, aflați vitezele finale și unghiul de recul al particulei m_2.

1.4.87. O particulă de masă m_1 lovește cu viteza v_1 o altă particulă de masă m_2 aflată în repaus. După ciocnire direcțiile de mișcare ale particulelor formează unghiurile θ_1, respectiv θ_2 cu direcția $\vec{v}_1$. Aflați vitezele finale. Dacă $m_1 = m_2$ și ciocnirea este perfect elastică, arătați că $\theta_1 + \theta_2 = 90°$.

* **1.4.88.** O particulă de masă m_1 lovește perfect elastic o ată particulă de masă m_2 aflată inițial în repaus, și este împrăștiată sub unghiul θ față de direcța inițială. Aflați : a) viteza finală v_1', b) pierderea (sau transferul) relativă de energie cinetică $f = -\Delta E_{c1}/E_{c1}$, c) pentru ce raport al maselor $r = m_2/m_1$, respectiv pentru ce unghi de împrăștiere θ, transferul de energie este maxim.

1.4.89. Două bile identice de masă $m = 200$ g fiecare stau pe un plan orizontal şi se ating între ele. O altă bilă de aceeaşi rază le loveşte central perfect elastic şi se opreşte. Aflaţi masa acesteia din urmă.

1.4.90. Două bile de mase $m_{1,2}$ şi raze $R_{1,2}$, absolut netede şi absolut elastice se ciocnesc ca în figură. Se cunosc vitezele $v_{1,2}$ şi parametrul b. Aflaţi unghiul de împrăştiere θ a bilei m_1. Aplicaţie numerică: $m_1 = m_2$, $\alpha = 30°$, $v_2 = 2v_1$.

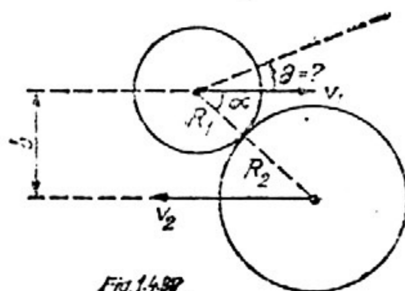


Fig.1.4.90.

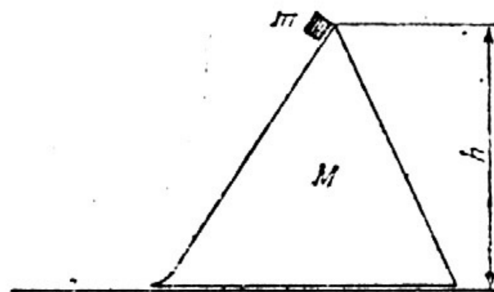


Fig.1.4.91

1.4.91. Un corp de masă $m = 1{,}00$ kg coboară liber de la înălţimea $h = 1{,}10$ m pe o pană de masă $M = 10{,}0$ kg fără frecări, care poate luneca pe un plan orizontal fără frecări, ca în figură. Ce viteză va avea pana cînd corpul părăseşte pana? (jos pana este racordată neted cu orizontala).

1.4.92. Pe o pană netedă fără frecări, de masă M, aşezată pe un plan orizontal fără frecări, lunecă liber de la înălţimea H un mic corp de masă m. Aflaţi distanţa de la corp pînă la pană în momentul cînd corpul loveşte planul orizontal (căzînd de la înălţimea h). Aplicaţie: $H = 1{,}80$ m, $h = 0{,}80$ m, $m/M = 1/4$.

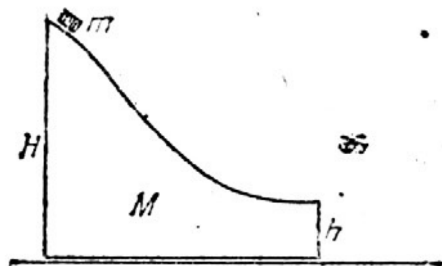


Fig.1.4.92

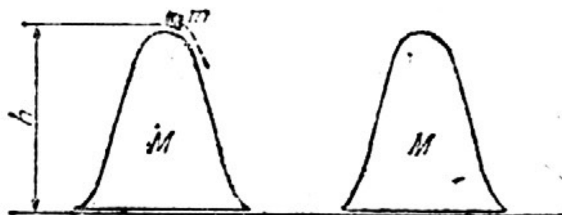


Fig.1.4.93

1.4.93. În figură cele două „moviliţe" sînt identice, de înălţime $h = 1{,}00$ m şi de masă $M = 4{,}0$ kg fiecare. Corpul mic $m = 1{,}00$ kg începe să coboare, după care urcă pe cealaltă „moviliţă". Toate frecările sînt neglijabile. La ce înălţime urcă corpul m?

1.4.94. Un corp de masă $m = 1{,}00$ kg intră cu viteza orizontală $v_0 = 3{,}00$ m/s pe porţiunea cilindrică de rază $R = 20$ cm a corpului de

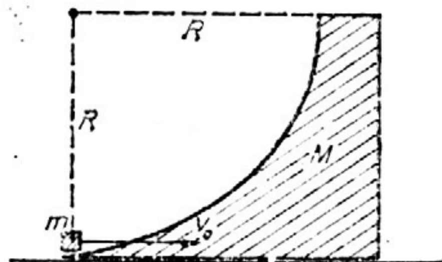


Fig.1.4.94

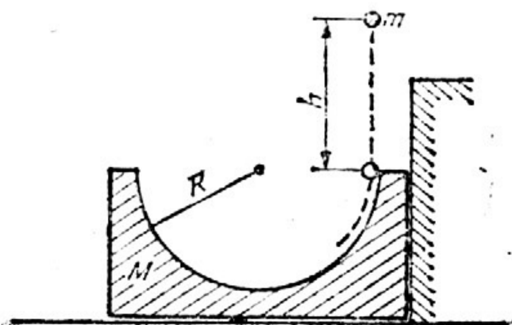


Fig.1.4.95

masă $M = 10,0$ kg, așezat pe un plan orizontal. Neglijînd toate frecările, aflați viteza corpului m la înălțimea $R (g = 10 \text{ m/s}^2)$.

1.4.95. Care trebuie să fie înălțimea h de la care cade liber bila $m = 1,00$ kg, pentru ca ea să nu urce mai sus de marginea jgheabului semicilindric de rază $R = 40$ cm și masă $M = 4,00$ kg din figură. Frecările se neglijează.

1.4.96. O halteră formată din două bile identice legate printr-o tijă imponderabilă de lungime $l = 0,80$ m cade în poziție orizontală de la o înălțime $h = 1,00$ m, după care una din bile lovește perfect elastic marginea mesei, ca în figură. Ce distanță parcurge CM al halterei de la ciocnire pînă cînd a doua bilă lovește partea verticală laterală a mesei?

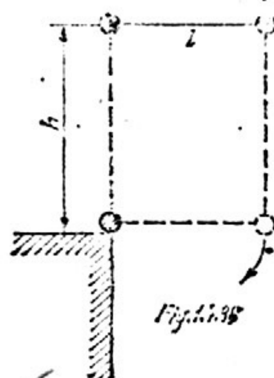


Fig.1.4.96



Fig.1.4.97

1.4.97. O sanie de masă $m_1 = 40$ kg intră cu viteza $v_1 = 10,0$ m/s pe un suport de masă $m_2 = 60$ kg avînd forma de sfert de cerc ca în figură Neglijînd frecările și gravitația, aflați vitezele finale ale corpurilor.

1.4.98. O bilă de masă $m_1 = 90$ g, zburînd orizontal cu viteza $v_1 = 5,0$ m/s lovește perfect elastic o prismă de masă $m_2 = 250$ g, aflată în repaus pe o masă orizontală fără frecări. După ciocnire bila zboară vertical în sus. Aflați vitezele corpurilor după ciocnire.

1.4.99. O bilă lovește perfect elastic cu viteza $v_1 = 2,00$ m/s sub un unghi de incidență $\alpha = 60°$ un perete de masă mare care se mișcă spre bilă cu viteza $v_2 = 1,00$ m/s sub unghiul $\beta = 30°$ față de normala sa. Aflați unghiul de reflexie și viteza bilei după ciocnire (Se rezolvă întii în SC legat de perete).

1.4.100. Un corp cu viteza orizontală $v_1 = 20,0$ m/s lovește perfect elastic un perete înclinat cu unghiul $\alpha = 45°$ față de orizontală, care se mișcă cu viteza orizontală $v_2 = 10,0$ m/s. Aflați viteza finală a primului corp și unghiul ei cu orizontala.

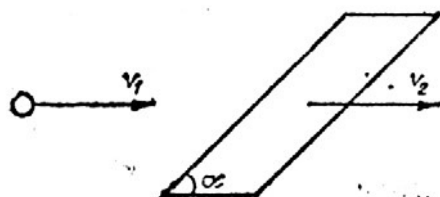


Fig.1.4.100

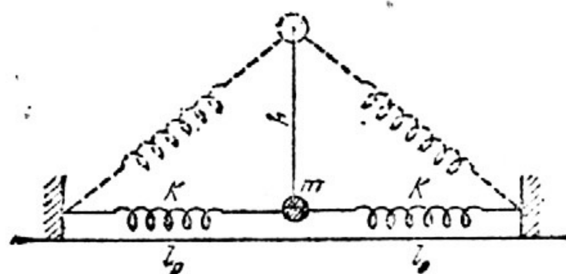


Fig.1.4.102

1.4.101. Două bile de mase $m_1 = 2,0$ kg, $m_2 = 4,0$ kg, așezate pe un plan orizontal fără frecări, sînt legate între ele printr-un fir și comprmiă între ele un resort care are energia potențială $E = 6,0$ J. Arzînd firul, aflați vitezele bilelor.

1.4.102. O bilă de masă $m = 100$ g este fixată cu două resorturi identice de constantă $k = 15$ N/m fiecare, ca în figură. Inițial resorturile

sînt nedeformate și au lungimea $l_0 = 40$ cm fiecare. Ridicînd bila la înălțimea $h = 30$ cm i se dă drumul. Cu ce forță medie lovește podeaua dacă timpul de ciocnire este $\Delta t = 1,0$ ms?

1.4.103. În dispozitivul din figură între piston și cilindrul fix forța de frecare la alunecare este $F_f = 10,0$ N; $m = 0,50$ kg, $M = 0,50$ kg, $k = 100$ N/m, $v = 2,00$ m/s. Aflați cu cît se deplasează pistonul în urma ciocnirii platice.

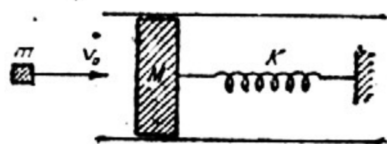


Fig. 1.4.103

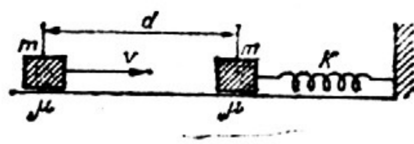


Fig. 1.4.104

1.4.104. În schema din figură corpurile sînt identice de masă $m = 1,40$ kg fiecare la distanța inițială $d = 0,98$ m între ele, resortul de constantă elastică $k = 40$ N/m este inițial nedeformat, coeficientul de frecare la lunecare este peste tot $\mu = 0,20$. Ce viteză trebuie imprimată corpului din stînga pentru ca cel din dreapta să revină înapoi în poziția inițială? Ciocnirea este perfect elastică.

1.4.105. O minge mică de tenis lovește perfect elastic cu viteza v_0 sub unghiul de incidență α o paletă masivă. Ce viteză de translație v trebuie să aibă paleta și sub ce unghi β față de normala sa pentru ca mingea să ricoșeze sub un unghi drept față de direcția inițială?

** **1.4.106.** Asupra unui corp de masă m acționează o forță proporțională cu timpul: $F = At$. Aflați legea mișcării știind condițiile inițiale: la $t = 0$ avem $v = v_0$ și $x = 0$.

** **1.4.107.** Un lanț de lungime l și masă m este ținut inițial de capătul superior astfel încît capătul său inferior atinge o masă, apoi se lasă să cadă liber. Ce forță va exercita lanțul asupra mesei în timpul căderii și ce impuls total transmite el mesei?

1.5. MOMENTUL CINETIC

1.5.1. O scară neuniformă de lungime $l = 2,00$ m poate sta în echilibru sprijinită de un perete vertical pînă la un unghi minim $\alpha = 60°$ format cu podeaua. Coeficienții de frecare la lunecare cu podeaua $\mu_1 = 0,30$ și cu perete $\mu_2 = 0,40$. Aflați înălțimea la care se află CM al scării.

1.5.2. Pe o scară dublă foarte ușoară articulată sus și legată printr-un fir la capetele inferioare, se suie un om de masă $m = 60$ kg pînă la mijlocul scării. Aflați tensiunea din fir, neglijînd toate frecările. Unghiul $\alpha = 60°$.

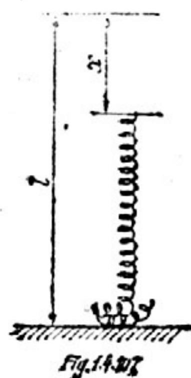


Fig.1.4.107

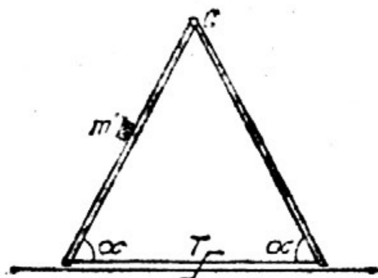


Fig.1.5.2

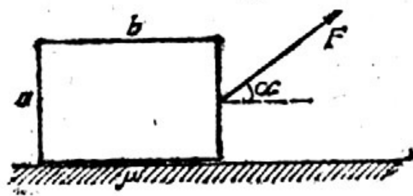


Fig.1.5.4

1.5.3. O scară uniformă de masă $m = 4,00$ kg este sprijinită de un perete neted fără frecări, capătul inferior fiind așezat pe o podea cu frecare. Unghiul de înclinare al scării față de orizontală $\alpha = 60°$. Ce forță se exercită asupra capătului inferior al scării și sub ce unghi față de orizontală?

1.5.4. O ladă cu dimensiunile $a = 1,50$ m și $b = 2,00$ m este tîrîtă orizontal uniform cu o forță F sub unghiul α față de orizontală, ca în figură. Coeficientul de frecare la alunecare este $\mu = 0,40$. Pentru ce unghi α lada începe să se ridice?

1.5.5. O tijă subțire rigidă de lungime $l = 1,00$ m este prinsă rigid sub un unghi $\alpha = 30°$ de un ax vertical, ca în figură. La capătul tijei este prinsă o bilă de masă $m = 1,00$ kg. Sistemul se rotește cu turația $n = 1,00$ rot/s. Aflați reacțiunea bilei asupra tijei și momentul reacțiunii față de punctul de fixare de ax. Pentru ce perioadă de rotație acest moment este nul?

1.5.6. Pe o tijă de masă neglijabilă sînt fixate două bile de mase $m_1 = 0,40$ kg, $m_2 = 0,20$ kg la distanțele $d_1 = 0,50$ m, $d_2 = 1,00$ m de articulație, ca în figură. Tija se rotește cu viteza unghiulară $\omega = 5,1$ rad/s în jurul axei verticale trecînd prin articulație. Aflați unghiul de deviere al tijei.

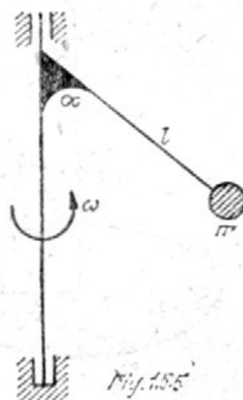


Fig.1.5.5

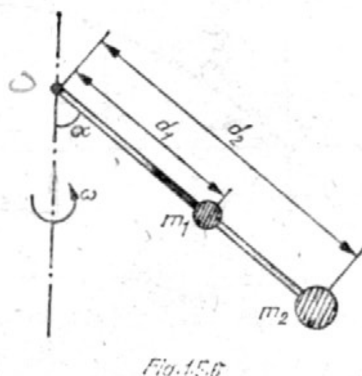


Fig.1.5.6

1.5.7. O tijă subțire de masă neglijabilă are la capete două bile de mase $m_1 = 1,00$ kg, $m_2 = 3,00$ kg. Tija este sprijinită la mijloc pe un reazem. Inițial tija este ținută în poziție orizontală, apoi se lasă liberă. Aflați apăsarea exercitată de tijă pe reazem *imediat* ce tija este lăsată liber.

1.5.8. O scîndură omogenă și uniformă de masă $m = 1,00$ kg și lungime $l = 1,00$ m este așezată pe o masă orizontală cu coeficientul de frecare la alunecare $\mu = 0,20$. La un capăt al scîndurii se aplică o forță orizontală F perpendiculară pe scîndură. Care este valoarea minimă a forței F necesară pentru ca scîndura să se rotească și în jurul cărui punct se va roti atunci scîndura?

1.5.9. O tijă omogenă și uniformă se află în interiorul unei sfere într-un plan meridian. Unghiul la centru determinat de tijă este $\theta = 60°$, iar coeficientul de frecare la lunecare este $\mu = 0,20$. Ce unghi maxim față de orizontală poate avea tija?

1.5.10. O sîrmă de oțel fixată la un capăt, fiind răsucită la celălalt capăt cu unghiul θ generează un cuplu de forțe elastice cu momentul $M = C\theta$, unde $C = 4,0 \cdot 10^{-3}$ N. m/rad este constanta de torsiune. Din această sîrmă se confecționează un resort spiralat de rază $R = 2,0$ cm și cu pasul mic ($h \ll R$). Calculați constanta elastică k a resortului obținut.

1.5.11. Asupra unui satelit artificial al Pămîntului acţionează o forţă de frecare $\vec{F} = -k\vec{v}$. Se conservă momentul său cinetic în raport cu centrul Pămîntului? Rămîne traiectoria plană?

1.5.12. Avem un pendul simplu gravitaţional. a) Care este momentul cinetic al particulei faţă de verticala prin punctul de suspensie? b) Care este variaţia pe unitatea de timp a momentului cinetic al particulei în raport cu punctul de suspensie?

1.5.13. O minge de masă $m = 100$ g loveşte perfect elastic cu viteza $v_0 = 20,0$ m/s un perete sub unghiul de incidenţă $\alpha = 30°$. Calculaţi momentul cinetic al particulei faţă de un punct situat la distanţa $s = 1,00$ m de perete pe normala la perete în punctul de ciocnire. Se conservă acest moment cinetic în procesul de ciocnire?

* **1.5.14.** O particulă este aruncată oblic în cîmpul gravitaţional terestru (în vid) cu viteza v_0 sub unghiul α_0 faţă de orizontală. Care este momentul forţei şi momentul cinetic faţă de punctul de lansare? Verificaţi teorema momentului cinetic.

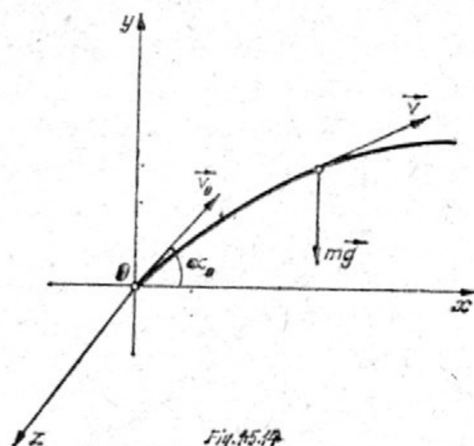


Fig. 1.5.14

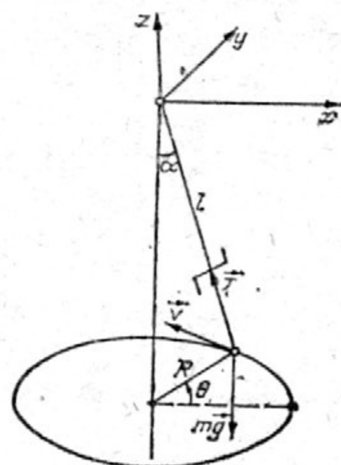


Fig. 1.5.15

* **1.5.15.** La un pendul conic masa bilei $m = 100$ g, lungimea firului $l = 90$ cm, unghiul conului $2\alpha = 2 \cdot 60°$. a) Calculaţi momentul forţei şi momentul cinetic al bilei faţă de centrul cercului şi faţă de punctul de suspensie. b) Care este variaţia momentului cinetic pe unitatea de timp în ultimul caz? Verificaţi teorema momentului cinetic.

1.5.16. O particulă se mişcă liber, fără frecare, sub acţiunea forţei de greutate pe suprafaţa interioară a unei sfere. Arătaţi că momentul cinetic al particulei în raport cu diametrul vertical al sferei se conservă.

1.5.17. Două particule de aceeaşi masă m se mişcă rectiliniu uniform cu viteze egale în modul dar de sens opus ($\vec{v}_0, -\vec{v}_0$) pe două drepte paralele. Arătaţi că momentul cinetic total în raport cu orice punct din spaţiu nu depinde de alegerea acestui punct.

1.5.18. O bilă de masă $m = 100$ g, legată de un centru fix printr-un fir de lungime $l_1 = 0,60$ m execută o mişcare circulară uniformă pe o masă orizontală fără frecări cu turaţia $n_1 = 1,00$ rot/s. Ce turaţie va avea bila, dacă firul se scurtează pînă la lungimea $l_2 = 0,30$ m? Ce lucru mecanic a efectuat forţa care a scurtat firul?

* **1.5.19.** O bilă de masă $m = 60$ g descrie o mişcare circulară uniformă într-un plan orizontal fără frecări (masa cu perna de aer), prinsă

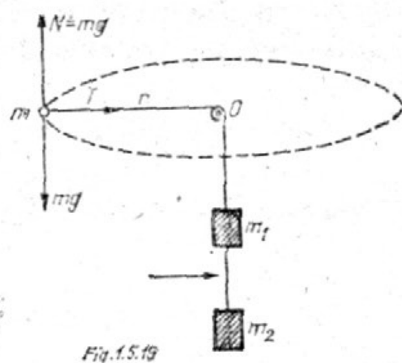


Fig. 1.5.19

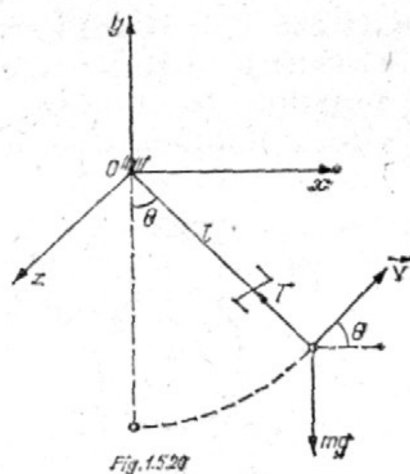


Fig. 1.5.20

fiind de un fir ideal, trecut peste un mic scripete ideal în centrul cercului și avînd la capăt două corpuri de mase $m_1 = 20$ g, $m_2 = 20$ g, legate unul după altul. La un moment dat se arde firul dintre corpurile $m_{1,2}$. Aflați tensiunea din fir și raportul în care crește raza de curbură a traiectoriei bilei *imediat* după arderea firului.

* **1.5.20.** Avem un pendul simplu gravitațional. Care este momentul forței și momentul cinetic al particulei față de punctul de suspensie? Verificați teorema momentului cinetic.

1.6. MECANICA RIGIDULUI

1.6.1. Un exagon de latură l este rostogolit fără lunecare pe un drum orizontal cu viteză unghiulară ω constantă. Aflați traiectoria și viteza orizontală medie a centrului exagonului.

1.6.2. Un cerc de butoi se rostogolește cu lunecare astfel încît vitezele punctelor A, B sînt respectiv $v_{A,B}$. Aflați vitezele punctelor C, D.

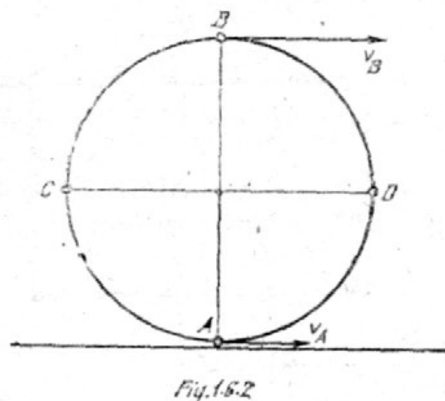


Fig. 1.6.2

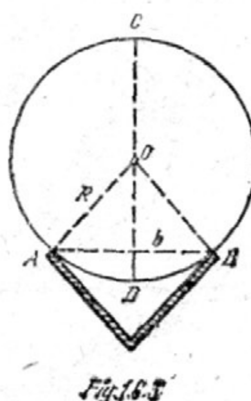


Fig. 1.6.3

1.6.3. Pe un jgheab de lățime b se rostogolește fără lunecare cu viteza v o sferă de rază R ca în figură. Aflați viteza maximă și minimă a punctelor sferei.

1.6.4. În sistemul din figură masa scripetelui $m = 200$ g este practic concentrată la periferie, $m_1 = 300$ g, $m_2 = 500$ g; firul nu lunecă pe scripete. Aflați tensiunile din fir.

1.6.5. Un cerc de butoi de rază $R = 1{,}00$ m, rostogolindu-se fără alunecare cu viteza $v = 10{,}0$ m/s pe un drum orizontal, lovește inelastic un prag de înălțime $h = 10{,}0$ cm, astfel încît componenta radială a vitezei (către vîrful pragului) se anulează. Ce viteză va avea cercul după ce urcă pragul? Ce viteză minimă trebuie să aibă cercul pentru a putea urca pragul?

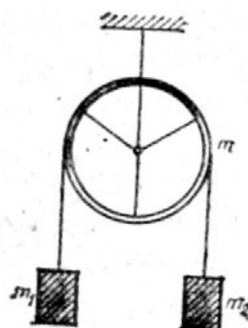


Fig.1.6.1

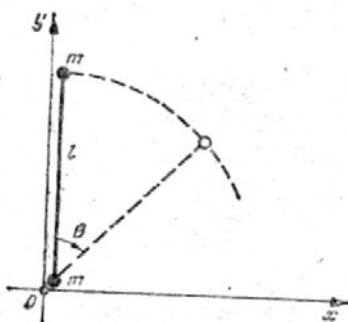


Fig.1.6.7

1.6.6. Un cerc de butoi de lățime $b = 4{,}0$ cm are un mic orificiu de rază $r = 2{,}0$ mm de la un nit. Cercul este așezat vertical cu orificiul în jos. Datorită unei trepidații cercul începe să se rostogolească fără lunecare. Aflați viteza maximă.

* **1.6.7.** O halteră sub forma a două bile punctiforme, de masă m fiecare, legate între ele printr-o tijă de masă neglijabilă și de lungime l, este așezată ca în figură, sprijinită de perete. Frecarea cu pereții este neglijabilă. Haltera începe să cadă. Aflați forțele de apăsare asupra halterei în momentul cînd haltera face unghiul θ cu verticala.

1.6.8. Piesele (plăcuțele) de domino de lungime $l = 4{,}0$ cm sînt așezate vertical în picioare una după alta la distanță mică ($\ll l$) între ele, formînd un șir din $N = 100$ plăcuțe. Dezechilibrînd prima plăcuță, ele cad una după alta. Evaluați în cît timp cade întreg șirul.

1.6.9. Un cilindru gol de masă M se rostogolește fără lunecare pe un plan înclinat de unghi α. Pe suprafața interioară a cilindrului lunecă fără frecări un mic corp de masă m. Aflați β.

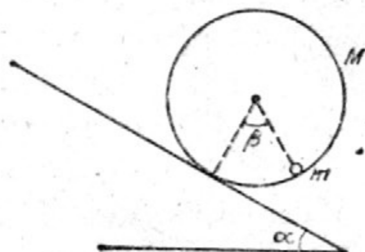


Fig.1.6.9

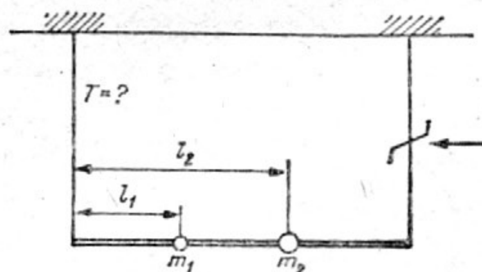


Fig.1.6.11

1.6.10. Două bile de mase $m_1 = 1{,}00$ kg, $m_2 = 3{,}00$ kg legate printr-un fir ideal de lungime $l = 0{,}40$ m se rotesc liber pe un plan orizontal neted în jurul centrului de masă cu viteza unghiulară $\omega = 10$ rad/s. Aflați energia cinetică a sistemului.

1.6.11. În sistemul din figură se cunosc masele $m_1 = 0{,}200$ kg, $m_2 = 0{,}400$ kg și distanțele $s_1 = 0{,}30$ m, $s_2 = 0{,}50$ m, tija are greutate neglijabilă. Aflați tensiunea din firul stîng imediat ce se taie firul drept.

1.7. ECHILIBRUL MECANIC

1.7.1. În figură corpul de greutate $G = 100$ N este suspendat prin fire de doi pereţi astfel încît tensiunea $T_1 = n\,G$, $n = 2{,}0$. Aflaţi tensiunea T_2.

1.7.2. O sferă de masă $m = 10{,}0$ kg se află în echilibru în unghiul diedru de unghiuri $\beta = 60°$, $\alpha = 30°$, ca în figură. Frecările sînt neglijabile. Aflaţi forţele de reacţiune ale planelor.

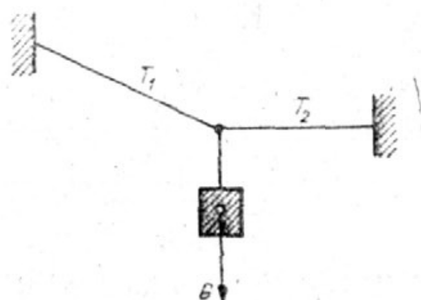


Fig. 1.7.1

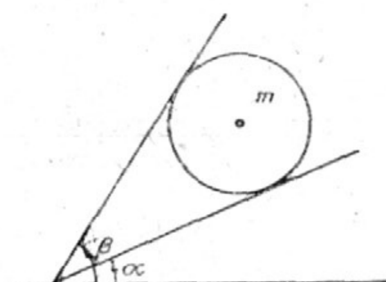


Fig. 1.7.2

1.7.3. O bilă de masă m, suspendată, se sprijină pe un plan înclinat fără frecări, ca în figură. Aflaţi reacţiunea planului. Aplicaţie: $m = 1{,}00$ kg, $\alpha = 15°$, $\beta = 30°$.

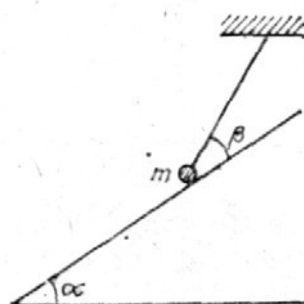


Fig. 1.7.3

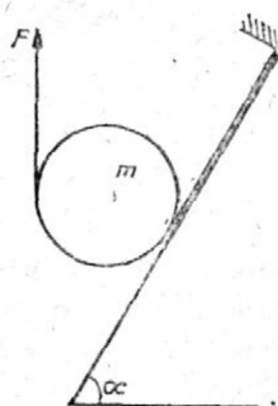


Fig. 1.7.4

1.7.4. Pe un plan înclinat fără frecări, de unghi $\alpha = 30°$, este menţinut în echilibru un cilindru neted de masă $m = 300$ g, ca în figură. Aflaţi forţa verticală F.

1.7.5. Aflaţi forţa de forfecare care se exercită asupra nitului, atunci cînd capetele cleştelui sînt strînse cu o forţă $F = 100$ N.

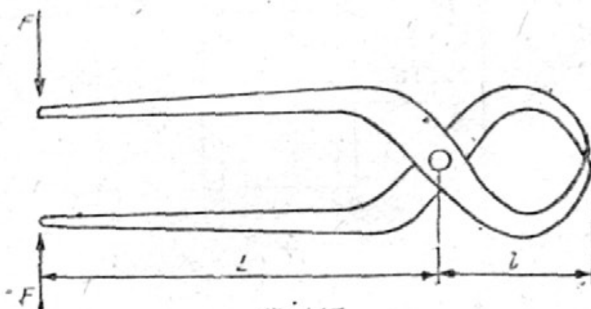


Fig. 1.7.5

1.7.6. O tijă a fost îndoită la mijloc în unghi drept cu braţe egale şi suspendată liber de un capăt. Aflaţi unghiul format de jumătatea superioară cu verticala.

1.7.7. O scîndură omogenă și uniformă de masă $M = 4,0$ kg este așezată pe o masă astfel încît o fracțiune $f = 1/4$ din lungimea sa depășește spre exterior marginea mesei. Aflați masa corpului ce trebuie așezat la capătul exterior al scîndurii pentru ca aceasta să se răstoarne.

1.7.8. În sistemul din figură se dau : $l = 80$ cm, resorturile sînt inițial nedeformate și au aceeași lungime ; $d = 20$ cm. Aflați raportul k_1/k_2 dacă bara are poziție orizontală în starea finală.

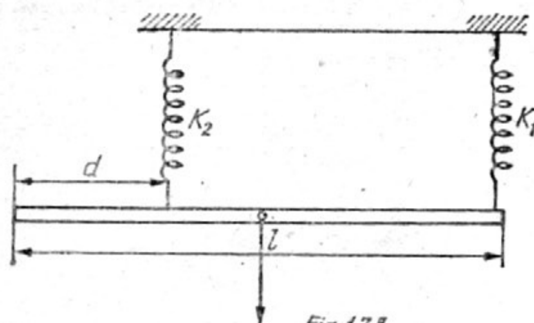


Fig. 1.7.8

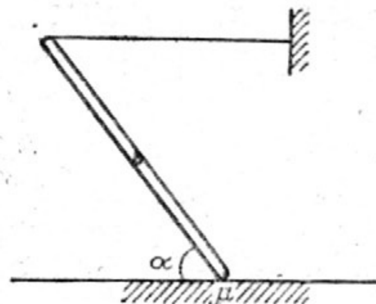


Fig. 1.7.9

1.7.9. O bară este sprijinită ca în figură. Pentru ce valori α bara va fi în echilibru, dacă coeficientul de frecare $\mu = 0,50$?

1.7.10. O bară uniformă de masă $m = 60$ kg și lungime $l = 4,0$ m se sprijină ca în figură. Frecările sînt neglijabile, $\alpha = 30°$, $h = 3,0$ m. Aflați tensiunea din fir.

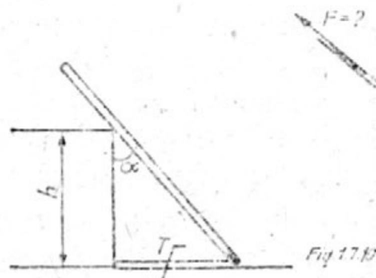


Fig. 1.7.10

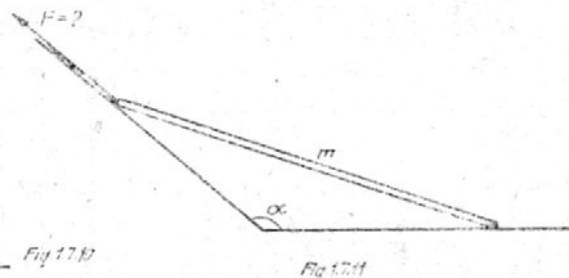


Fig. 1.7.11

1.7.11. O bară omogenă și uniformă de masă $m = 4,0$ kg se sprijină pe laturile unui unghi diedru $\alpha = 150°$ ca în figură. Cît este forța F la echilibru? Toate frecările sînt neglijabile.

1.7.12. De un perete neted se sprijină o scară uniformă de masă $m = 10$ kg formînd un unghi $\alpha = 45°$ cu podeaua rugoasă. Aflați forța de frecare dintre scară și podea.

1.7.13. Un bloc paralelipipedic omogen de masă m și de lățime b stă sprijinit pe două perechi de piciorușe mici ca în figură, pe un plan orizontal cu coeficienții de frecare μ_1, respectiv $\mu_2 < \mu_1$. Aflați forța minimă necesară pentru a urni din loc blocul.

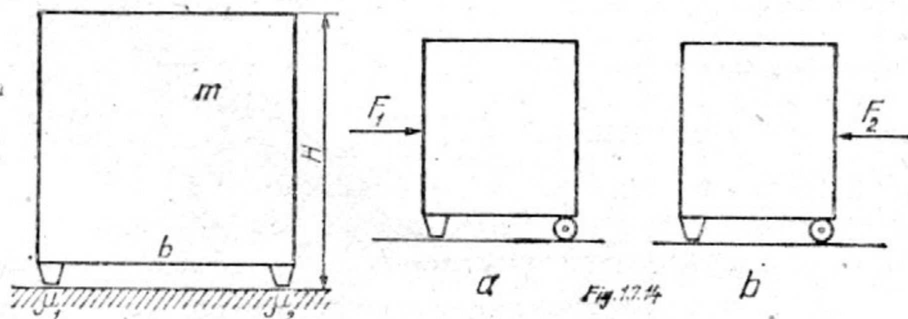


Fig. 1.7.13
Fig. 1.7.14

1.7.14. Un conteiner de forma unui cub omogen are pe o latură role (frecări neglijabile), iar pe latura opusă pinteni, ca în figură. Pentru a-l deplasa orizontal de la pinteni spre role, trebuie împins cu o forță F_1

aplicată în centrul feței, iar în sens invers cu o forță F_2. Aflați masa coteinerului.

1.7.15. În sistemul din figură se cunosc m, α. Aflați coeficientul de frecare minim necesar pentru echilibru și tensiunea din fir la echilibru.

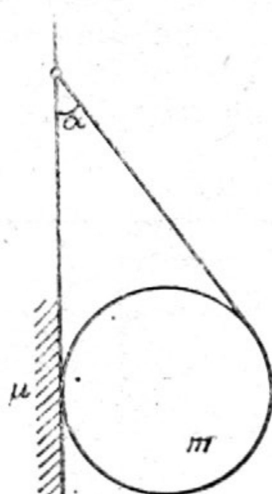


Fig. 1.7.15

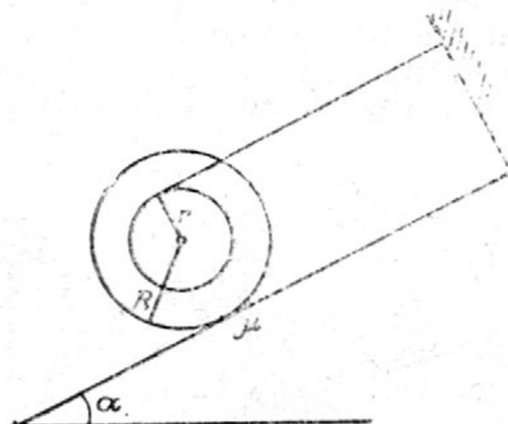


Fig. 1.7.16

1.7.16. Care trebuie să fie coeficientul minim de frecare la lunecare dintre mosor și planul înclinat pentru ca mosorul să stea în echilibru? Aplicație : $\alpha = 45°$, $r = 3{,}0$ cm, $R = 7{,}0$ cm.

1.7.17. Un mosor este suspendat ca în figură. Se dau $\mu = 0{,}40$, $r = 10$ mm, $R = 50$ mm. Pentru ce valori α mosorul nu cade?

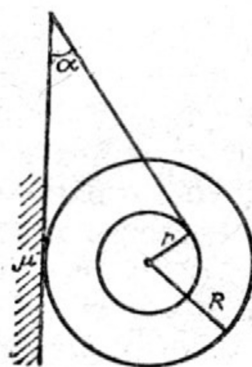


Fig. 1.7.17

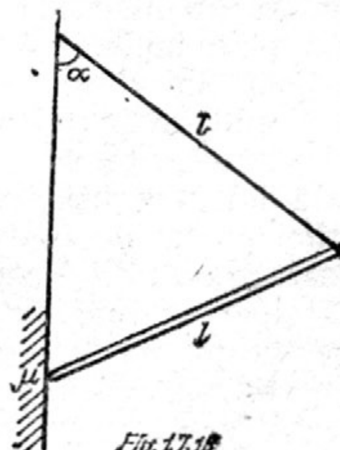


Fig. 1.7.18

1.7.18. O bară omogenă și uniformă este suspendată printr-un fir ideal ca în figură. Aflați unghiurile α pentru care bara este în echilibru. Coeficientul de frecare la lunecare între bară și perete este $\mu = 0{,}30$.

1.7.19. Un cub de masă m așezat pe o masă orizontală cu coeficientul de frecare la lunecare μ este tras de o forță F sub unghiul α, ca în figură. Reprezentați în planul $(F/(mg), \mu)$ regiunile pentru care cubul este în repaus (α este fixat).

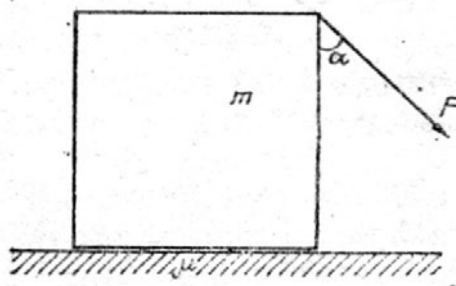


Fig. 1.7.19

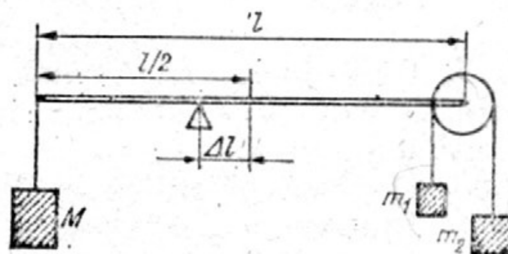


Fig. 1.7.20

1.7.20. În sistemul din figură se dau $M = m_1 + m_2 = 200$ g, scripetele este mic și ideal, tija are masă neglijabilă și $l = 42$ cm. În timpul mișcării corpurilor $m_{1,2}$ echilibrul tijei se obține dacă $\Delta l = 3{,}0$ cm. Aflați masele $m_{1,2}$.

1.7.21. Între doi pereți paraleli cu distanța $d = 1000$ mm între ei se „bate" o scîndură de greutate neglijabilă într-un plan perpendicular comun al pereților, ca în figură. Unghiul de frecare dintre scîndură și pereți $\varphi = 9{,}0°$. Aflați lungimea maximă a scîndurii pentru a se putea autobloca.

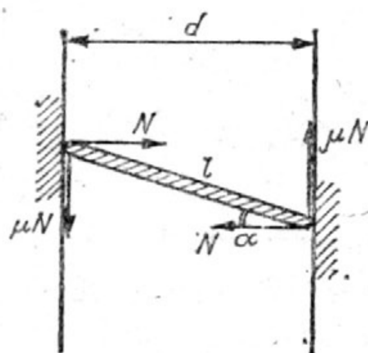


Fig.1.7.21

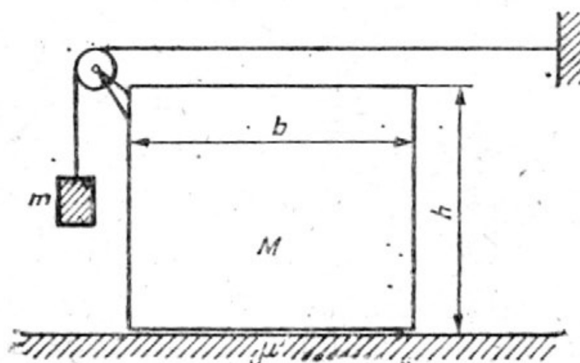


Fig.1.7.22

1.7.22. Se dă montajul din figură. Pentru ce valori m paralelipipedul M va luneca fără să se răstoarne? Discuție.

1.7.23. Aflați forța minimă necesară pentru a răsturna un cub de masă m în jurul unei muchii. Care trebuie să fie coeficientul de frecare μ pentru ca cubul să nu lunece?

1.7.24. Pe un plan înclinat de unghi α stau unul peste altul două cuburi identice. Coeficientul de frecare dintre cuburi este μ, iar între cubul inferior și planul înclinat frecarea este suficient de mare. Se crește lent unghiul α al planului. Ce se întîmplă cu cuburile? Discuție.

1.7.25. O roată dela o căruță s-a turtit într-o parte ca în figură. Pentru ce valori ale coeficientului de frecare la lunecare roata va luneca în loc să se rotească (rostogolească)? Raza $R = 1{,}0$ m, $b = 10$ cm.

1.7.26. Două șipci de lungimi $l_{1,2}$ și mase $m_{1,2}$ sînt unite în unghi drept, așezate pe un plan rugos cu coeficienții de frecare $\mu_{1,2}$ și trase orizontal de unghiul drept, ca în figură. Aflați unghiul α.

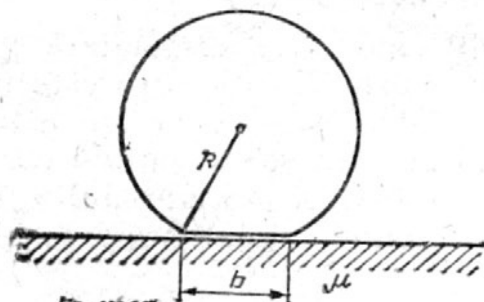


Fig.1.7.25

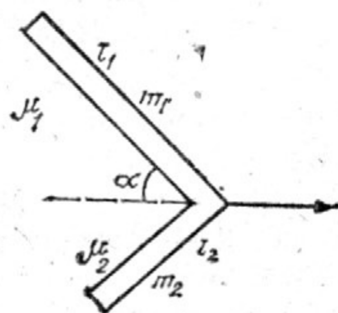


Fig.1.7.26

1.7.27. Teul din figură, format din brațele $l_{1,2}$, cu masele $m_{1,2}$ și coeficienții de frecare $\mu_{1,2}$ este tras orizontal pe o suprafață plană orizontală. Aflați unghiul α.

1.7.28. O placă pătratică este formată din două jumătăți omogene și uniforme de mase $m_{1,2}$. Placa este așezată pe un plan orizontal cu coeficientul de frecare la lunecare μ. De placă se trage orizontal cu o forță aplicată în capătul liniei mediane care separă jumătățile $m_{1,2}$. Ce unghi

trebuie să formeze forţa cu această linie pentru ca placa să se mişte prin translaţie? Aplicaţie: $m_1 = 2m_2$.

** **1.7.29.** Peste un cilindru absolut neted, orizontal, fix, de rază R, este trecut un lanţ de lungime l şi masă m, aflat în echilibru. Aflaţi tensiunea din lanţ în funcţie de unghiul θ la centru.

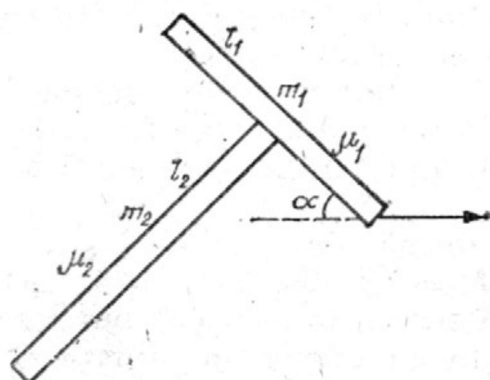


Fig. 1.7.27

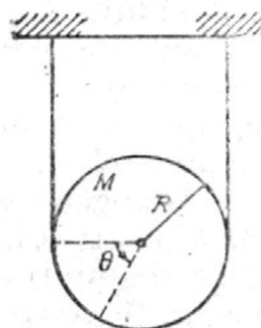


Fig. 1.7.30

** **1.7.30.** Cu ajutorul unui lanţ de lungime l şi masă m este suspendat un butoi cilindric de rază R şi masă M, ca în figură. Aflaţi tensiunea din lanţ în funcţie de unghiul θ la centru.

** **1.7.31.** Calculaţi momentul de inerţie al unei tije subţiri de lungime l şi masă m faţă de o axă transversală care trece prin: a) mijlocul tijei, b) un capăt al tijei.

** **1.7.32.** Fie o figură (placă) *plană*. Alegem în planul plăcii două axe perpendiculare între ele Ox, y şi axa Oz perpendiculară pe planul plăcii. a) Stabiliţi relaţia dintre cele 3 momente de inerţie $I_{x,y,z}$ respectiv faţă de axele de coordonate Ox, y, z. b) Calculaţi momentele de inerţie ale unei coroane circulare omogene de masă m şi raze R_1, R_2.

** **1.7.33.** Calculaţi momentele de inerţie faţă de axele de simetrie ale unui cadru (ramă) subţire dreptunghiular, omogen şi uniform, de masă m şi laturi a, b.

** **1.7.34.** Calculaţi momentul de inerţie al plăcii dreptunghiulare de masă m şi laturi a, b, faţă de axele de simetrie.

** **1.7.35.** Calculaţi momentele de inerţie ale unui paralelipiped dreptunghic, omogen, de masă m şi laturi a, b, c, faţă de axele de simetrie.

** **1.7.36.** Calculaţi momentul de inerţie al unei pături cilindrice omogene de masă m şi raze R_1, R_2.

** **1.7.37.** Calculaţi momentul de inerţie al unei pături sferice omogene de masă m şi raze $R_{1,2}$ faţă de un diametru.

** **1.7.38.** Momentul forţelor de frecare într-un lagăr este proporţional cu viteza unghiulară: $M_f = -k\omega$. Ştiind că sub acţiunea unui moment rotitor $M = 1{,}00$ kN · m, rotorul cu momentul de inerţie $I = 20{,}0$ kg · m², atinge turaţia limită (maximă) $n_0 = 1200$ rot/min, aflaţi după cît timp rotorul atinge o fracţiune $f = 99$ % din această turaţie şi cîte rotaţii face în acest timp.

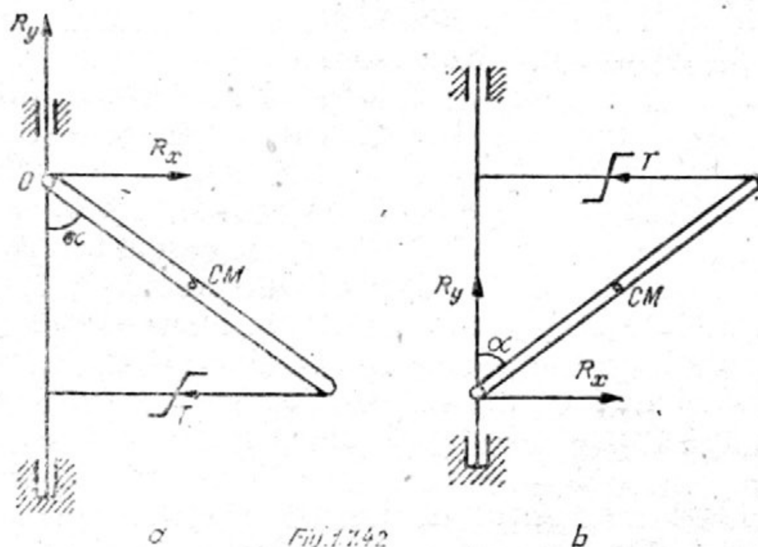
** **1.7.39.** O placă subţire omogenă dreptunghiulară de masă $m = 300$ g şi de dimensiuni $b = 40$ cm, $h = 1{,}25$ m, se roteşte în jurul laturii sale de lungime h aşezate vertical. Fiecare element de suprafaţă al plăcii întîmpină din partea aerului o forţă de rezistenţă (normală pe placă) proporţională cu aria elementului şi cu pătratul vitezei sale. Cunoscînd turaţia iniţială $n_0 = 10{,}0$ rot/s a plăcii şi timpul $\tau = 1{,}00$ s în care această turaţie se reduce la jumătate, calculaţi: a) momentul de inerţie al plăcii

față de axa de rotație, b) constanta de proporționalitate din legea amintită a forței de rezistență, c) numărul de rotații efectuate de placă în timpul amintit τ.

** **1.7.40.** O bară subțire omogenă și uniformă, de lungime l și masă m, se rotește uniform cu viteza unghiulară ω într-un plan orizontal în jurul unui capăt fix. a) Calculați tensiunea elastică din bară la distanța x de capătul fix și reacțiunea R a lagărului. b) Cunoscînd secțiunea S a barei și modulul de elasticitate E, aflați alungirea barei.

** **1.7.41.** O tijă subțire, omogenă și uniformă, de lungime l și de masă m, se rotește într-un plan orizontal în jurul unui capăt fix. Aflați rezultanta forțelor aplicate tijei în momentul cînd viteza unghiulară a tijei este ω și accelerația unghiulară ε.

** **1.7.42.** O tijă omogenă și uniformă, de lungime l și masă m, este prinsă la un capăt printr-o articulație (ideală) de o axă verticală într-o poziție înclinată cu unghiul α, celălalt capăt al tijei fiind legat printr-un fir orizontal de axă. Tija se rotește cu viteza unghiulară ω = const în jurul axei verticale. Calculați tensiunea din fir și reacțiunea $\vec{R}$ a articulației asupra tijei în cele două variante din figură.



** **1.7.43.** O placă plană subțire. neomogenă și neuniformă, de masă m, se rotește în jurul unei axe fixe perpendiculare pe placă. Se cunoaște distanța centrului de masă *CM* pînă la axa de rotație R_0 și momentul de inerție I_0 al plăcii față de axa *centrală*, normală la placă. Aflați rezultanta forțelor externe aplicate plăcii în momentul cînd are viteza unghiulară ω și accelerația unghiulară ε.

** **1.7.44.** Un fragment de cerc de butoi de rază R este suspendat simetric pe un cui bătut în perete. Aflați perioada micilor oscilații în planul paralel cu peretele.

(*) **1.7.45.** O bară subțire, omogenă și uniformă, de lungime l este suspendată la distanța x de centrul barei. Pentru ce distanță x perioada micilor oscilații ale barei în planul vertical este minimă?

* **1.7.46.** Un pendul fizic de masă m, moment de inerție I față de axa de suspensie și distanța R_0 a *CM* pînă la axa de suspensie, oscilează cu amplitudinea unghiulară α. Exprimați în funcție de unghiul de deviere θ: a) viteza unghiulară și accelerația unghiulară ale pendulului, b) forța exercitată de pendul asupra axului de suspensie, c) particularizați rezultatele pentru cazul unei tije subțiri, omogene și uniforme.

** **1.7.47.** O bară omogenă și uniformă de greutate G se sprijină cu un capăt pe podea fără frecare, formînd un unghi α cu podeaua. Aflați pentru momentul cînd bara începe să cadă pornind din repaus: a) forța exercitată de bară asupra podelei, b) accelerația CM, c) accelerația unghiulară. d) Aflați traiectoria capătului superior al barei, e) viteza unghiulară a barei în funcție de unghiul θ format de bară cu podeaua.

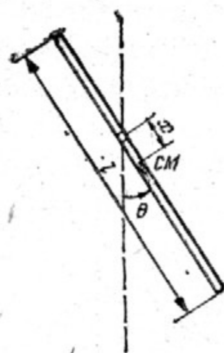


Fig. 1.7.45

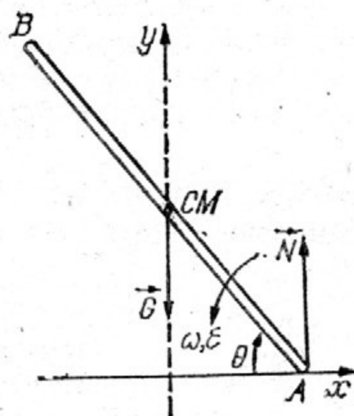


Fig. 1.7.47

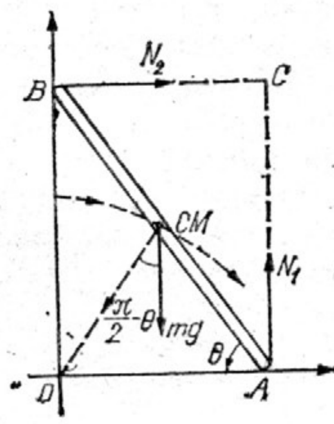


Fig. 1.7.48

** **1.7.48.** O bară omogenă și uniformă, de lungime l și masă m, lunecă fără frecare cu capetele sale pe o podea și pe un perete vertical. Inițial bara este în repaus formînd un unghi α cu podeaua. Aflați în funcție de unghiul θ : a) viteza unghiulară și accelerația unghiulară ale barei, b) reacțiunile peretelui și podelei, c) unghiul θ_0 în momentul cînd bara se desprinde de perete, d) reacțiunea podelei și accelerația CM al barei în acest moment, e) viteza unghiulară a barei după desprinderea de perete.

** **1.7.49.** Un disc omogen de rază R, ținut orizontal și pus în rotație în jurul axei sale verticale cu viteza unghiulară ω_0 este așezat pe un plan orizontal cu coeficientul de frecare la lunecare μ. Considerînd că presiunea exercitată de disc pe plan este uniformă, aflați după cît timp discul se oprește și cîte ture efectuează pînă la oprire.

** **1.7.50.** Un pendul conic este format dintr-o tijă subțire, omogenă și uniformă, de lungime l, care se rotește în jurul axei verticale formînd un unghi α cu verticala, capătul superior fiind prins într-o articulație ideală fără frecări. Aflați viteza unghiulară și reacțiunea articulației asupra tijei. Pentru ce turație tija începe să devieze?

** **1.7.51.** Un lanț greu, omogen și uniform, de lungime l și greutate G, este suspendat de capete în două puncte situate pe aceeași orizontală. a) Aflați ecuația curbei pe care o ia lanțul, b) cunoscînd și săgeata f, aflați tensiunea în lanț în punctul cel mai de jos, precum și la capete. c) Considerînd că verigile de la capetele lanțului lunecă pe o tijă orizontală cu unghiul de frecare φ, aflați distanța maximă posibilă dintre capetele lanțului în echilibru.

** **1.7.52.** O bară omogenă și uniformă, de lungime l, secțiune S și masă m este suspendată la capătul superior. Aflați alungirea barei datorită propriei greutăți. Se dă modulul de elasticitate E.

** **1.7.53.** O bandă de oțel de lungime l, lățime b și grosime h este curbată într-un arc de cerc de rază R. Cunoscînd modulul de elasticitate E și considerînd deformațiile elastice, calculați lucrul mecanic necesar,

1.8. MECANICA FLUIDELOR

Hidrostatica

1.8.1. Două butoaie, unul cilindric, celălalt tronconic, de aceeași înălțime, umplute pînă la jumătatea înălțimii cu apă, sînt astupate la capacul superior prin dopuri identice. Pentru a-le transporta muncitorul le-a răsturnat și atunci la unul din butoaie dopul a sărit. La care? De ce?

1.8.2. Un vas plutește pe un lac de acumulare. Ce se întîmplă cu nivelul apei din lac dacă de pe vas se aruncă în apă: 1) bușteni de lemn, 2) bare de metal?

1.8.3. O sferă de metal plutește într-un vas cu mercur. Se toarnă apă peste mercur astfel încît să acopere sfera. Se va cufunda sau se va ridica sfera? De ce?



a Fig. 1.8.1 b — Fig. 1.8.7

1.8.4. Într-un pahar cu apă plutește o bucată de gheață. Peste apă se toarnă un strat de ulei. Crește sau scade nivelul uleiului și al apei după topirea gheții?

1.8.5. Știind că suprafața oceanelor reprezintă 2/3 din suprafața globului și că adîncimea medie a oceanelor $h = 4{,}0$ km, aflați cu cît ar crește presiunea atmosferică dacă toată apa oceanelor s-ar evapora.

1.8.6. Un manșon tronconic de masă m este așezat etanș pe o masă. Raza bazei este R. Se toarnă apă în interior pînă manșonul se desprinde. În acest moment nivelul apei este h. Aflați masa apei.

1.8.7. Într-un vas cu apă, de secțiune $S = 100\ \mathrm{cm}^2$, plutește o bucată de gheață prinsă printr-un fir de fundul vasului. Tensiunea din fir este $F = 10{,}0$ N. Aflați cu cît se schimbă nivelul apei din vas prin topirea gheții.

1.8.8. O bucată de gheață de arie $S = 150\ \mathrm{cm}^2$ și grosime constantă plutește pe apă ieșind deasupra apei cu $h = 2{,}0$ cm. Care este masa gheții? ($\rho_g = 920\ \mathrm{kg/m^3}$)

1.8.9. Ce greutate trebuie pusă pe un paralelipiped de gheață de arie $S = 1{,}00\ \mathrm{m}^2$ și grosime $h = 20$ cm pentru a-l cufunda complet în apă?

1.8.10. Un butoi gol plutește pe apă. Pentru a astupa fisuri din fundul butoiului se căptușește fundul (pe dinăuntru sau pe din afară) cu un strat de plastic de grosime $d = 30$ mm. Din această cauză butoiul se scufundă în plus cu $h = 18$ mm. Aflați densitatea plasticului.

1.8.11. Un corp cîntărește în aer $G = 3{,}00$ N, în apă $G_a = 1{,}80$ N și într-un lichid necunoscut $G_l = 2{,}04$ N. Care este densitatea lichidului?

1.8.12. Într-un vas cu apă plutește o bilă de lemn. Se scufundă sau se ridică bila dacă vasul urcă cu accelerația a? Pentru a cufunda complet

în apă se apasă bila cu o anumită forță F. În ce raport se schimbă această forță dacă vasul urcă cu accelerația a?

1.8.13. Un balon cu gaz, de volum $V = 600$ m^3, se află în echilibru în aer. Ce cantitate de balast trebuie aruncată peste bord, pentru ca balonul să urce cu accelerația $a = 0{,}10$ m/s^2? Densitatea aerului $\rho = 1{,}29$ kg/m^3.

1.8.14. Un vas cilindric de arie transversală S este umplut cu un lichid și închis cu un piston etanș (fără frecări) care are în centru un dop de arie s. Forța de frecare maximă între dop și piston este F_f. Cu ce forță minimă trebuie să apăsăm pe dop pentru a-l expulza în lichid? Se neglijează forțele de greutate.

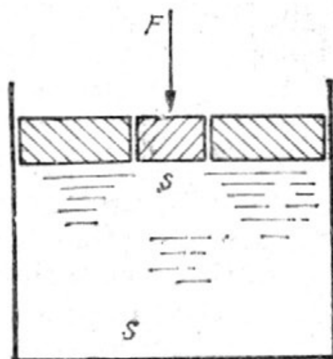


Fig. 1.8.14

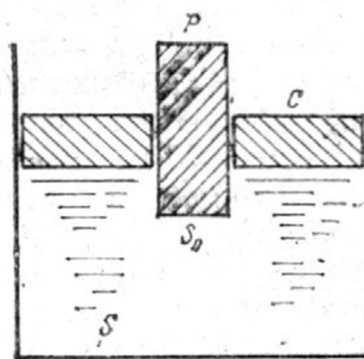


Fig. 1.8.19

1.8.15. Într-un cilindru de rază R este un lichid de densitate ρ. Cu cît crește nivelul lichidului dacă lăsăm să plutească un paralelipiped de masă m?

1.8.16. Un corp cilindric suspendat de un dinamometru este introdus în lichidul dintr-un pahar cilindric, astfel încît nivelul lichidului crește cu $\Delta h = 80$ mm. Indicația dinamometrului se schimbă cu $\Delta F = 0{,}50$ N. Aflați aria secțiunii vasului.

1.8.17. În două vase cilindrice comunicante cu aceeași secțiune transversală $S = 100$ cm^2 se află Hg. Într-unul din vase se toarnă apă de masă $m = 20$ kg și se lasă să plutească un corp de masă $m_1 = 7{,}2$ kg. Cu ce distanță h se deplasează nivelul mercurului în celălalt vas?

1.8.18. O presă hidraulică cu apă are ariile pistoanelor $S_1 = 100$ cm^2 și $S_2 = 10$ cm^2. Pe pistonul mare se așează un om cu masa $m = 80$ kg. Cu cît coboară omul?

1.8.19. În figură pistonul P și cilindrul C sînt în echilibru, putîndu-se deplasa etanș fără frecări. Se cunosc S, S_0 și ρ. Cu cît se va cufunda cilindrul (față de poziția sa inițială) dacă peste el punem un corp de masă m?

1.8.20. Într-un pahar cu apă de secțiune S plutește un manșon cilindric de lemn cu secțiunea interioară s. Ținînd fix manșonul, se toarnă în cavitatea sa cilindrică interioară un strat de ulei de densitate ρ și grosime h, apoi se lasă manșonul liber. Cu cît se ridică nivelul apei din pahar și cu cît se schimbă înălțimea de scufundare a manșonului în apă?

1.8.21. Pe fundul unui vas cu apă stă un disc de diametru $D = 30$ cm și grosime $h = 5{,}0$ mm (densitatea discului $\rho = 2600$ kg/m^3). Pentru a-l ridica s-a introdus un tub de diametru $d = 10$ cm strîns (etanș) atașat de disc, din care s-a evacuat apa. Pînă la ce adîncime de la suprafața apei la baza discului se va ridica discul?

1.8.22. Un areometru este format dintr-un balon cu alice continuat cu un tub cilindric subțire de secțiune S. Masa totală a areometrului

$m = 3{,}00$ g. Ce înălțime Δh este între două diviziuni consecutive cu $\Delta\rho = 0{,}010$ g/cm³ în vecinătatea diviziunii $\rho = 1{,}23$ g/cm³?

1.8.23. În vase comunicante cu mercur s-a turnat într-unul o coloană $h_1 = 30$ cm de ulei cu $\rho_1 = 900$ kg/m³, iar în celălalt o coloană $h_2 = 20$ cm apă. Aflați denivelarea mercurului.

1.8.24. O sferă omogenă de densitate ρ plutește la suprafața de separație dintre două lichide nemiscibile de densități $\rho_{1,\,2}$. Ce fracțiune din volumul sferei se află în lichidul superior?

1.8.25. Sub un clopot se află bun tu barometric atîrnat de un dinamometru și cufundat cu capătul inferior într-un vas cu mercur. În clopot se face treptat vid. Arătați cum variază forța arătată de dinamometru în funcție de înălțimea coloanei de mercur din tub.

** **1.8.26.** Într-un vas cilindric vertical de înălțime h densitatea lichidului crește proporțional cu adîncimea la pătrat: $\rho \sim x^2$. La ce adîncime trebuie așezată o placă orizontală astfel încît deasupra și dedesubtul ei să fie mase egale de lichid?

1.8.27. Într-un vas cu un lichid de densitate $\rho_0 = 1000$ kg/m³ se sprijină liber cu un capăt pe marginea vasului o tijă subțire, omogenă și uniformă, de lungime $l = 100$ cm și desnitate $\rho = 910$ kg/m³, celălalt capăt fiind cufundat în lichid. Înălțimea capătului superior al tijei față de nivelul lichidului este $h = 15$ cm. Aflați: a) lungimea porțiunii de tijă cufundată în lichid, b) unghiul format de tijă cu suprafața lichidului, c) coeficientul de frecare la lunecare dintre tijă și marginea vasului, minim necesar pentru ca tija să nu lunece.

1.8.28. O tijă uniformă și omogenă de masă $m = 4{,}4$ g este așezată în echilibru pe marginea unui vas cu apă, avînd la un capăt atîrnată o bilă de aluminiu de volum $V = 0{,}52$ cm³, cufundată pe jumătate în apă, ca în figură. Aflați raportul brațelor b_1/b_2.

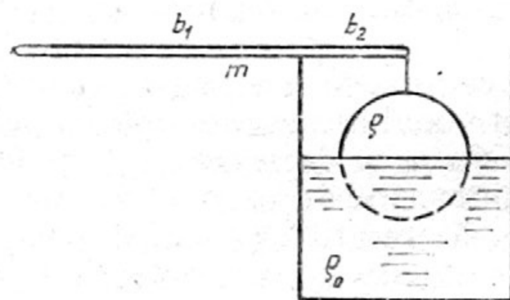


Fig. 1.8.28

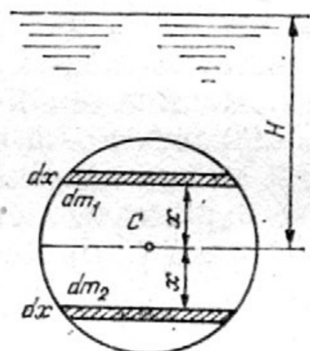


Fig. 1.8.30

1.8.29. Densitatea unei soluții de sare variază cu adîncimea după legea $\rho = \rho_0 + Ah$, unde $\rho_0 = 1{,}00$ g/cm³, $A = 20$ mg/cm⁴. În soluție sînt cufundate două bile legate între ele printr-un fir, avînd masele $m_1 = 0{,}13$ g, $m_2 = 0{,}34$ g și volumele $V_1 = 0{,}10$ cm³, $V_2 = 0{,}20$ cm³. La echilibru prima bilă este cufundată pînă la adîncimea $h_1 = 20$ cm. Aflați tensiunea din fir și lungimea firului.

(**) **1.8.30.** Un cub de volum V și masă m se află în echilibru, complet cufundat într-un lichid a cărui densitate variază cu adîncimea după legea $\rho = \rho_0 + kh$. Aflați la ce adîncime este centrul cubului. Dar în cazul sferei de același volum și masă?

** **1.8.31.** Un cilindru vertical de rază $R = 10$ cm este umplut pînă la refuz cu un lichid de densitate $\rho = 1000$ kg/m³ și închis cu un capac. La baza cilindrului în peretele lateral este un dop de masă $m = 5{,}0$ g

și de arie transversală $S = 4{,}0$ cm². Pentru a scoate dopul trebuie aplicată o forță $F = 25$ N. La ce turație a cilindrului în jurul axei proprii verticale, dopul va sări?

1.8.32. O bilă de densitate $\rho = 2000$ kg/m³ lăsată liberă într-un lichid de densitate $\rho_0 = 1000$ kg/m³ atinge o viteză limită $v_0 = 10{,}0$ m/s, întîmpinînd o forță de rezistență proporțională cu viteza. Două bile de acest fel sînt legate printr-un fir trecut peste un scripete ideal, una din bile fiind cufundată în lichidul de mai sus. Aflați viteza limită a bilelor.

1.8.33. Un cilindru cu pereți subțiri, închis ermetic și umplut cu gaz, plutește pe apă. Masa cilindrului cu gaz este $m = 20{,}0$ kg, înălțimea $h = 1{,}00$ m și aria bazei $S = 0{,}20$ m². În urma fisurării bazei cilindrul coboară cu $\Delta h = 10$ cm. Aflați presiunea inițială a gazului, dacă presiunea atmosferică este $p_0 = 100$ kPa.

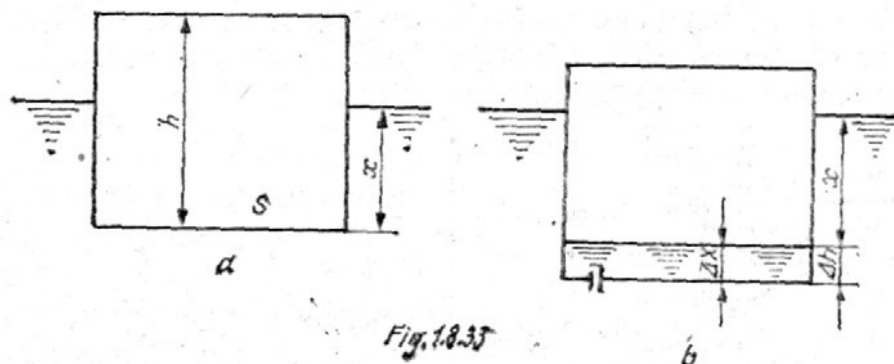


Fig. 1.8.33

Hidrodinamica

1.8.34. Dintr-o ecluză se pompează apă la același nivel printr-un furtun de secțiune $S = 10$ cm². Motorul pompei are puterea $P = 0{,}50$ kW și randamentul pompei $\eta = 26$ %. Cu ce viteză iese apa din furtun?

1.8.35. Dintr-un furtun de secțiune $S = 2{,}0$ cm² iese apa cu debitul $Q = 1{,}00$ L/s și lovește orizontal, inelastic, un perete vertical. Ce forță se exercită asupra peretelui?

1.8.36. O pompă pompează apă cu debitul $Q = 1{,}0$ kg/s pînă la o înălțime $h = 5{,}0$ m printr-un furtun de diametru $D = 3{,}0$ cm. Care trebuie să fie puterea pompei? Dar dacă nu folosim furtunul?

1.8.37. O pompă aruncă apa vertical pînă la înălțimea H. Se atașează la pompă o țeavă verticală de înălțime h, de aceeași secțiune cu orificiul de ieșire al pompei. În ce raport trebuie schimbată puterea pompei pentru ca apa să atingă aceeași înălțime H? Dar dacă nu schimbăm debitul pompei?

* **1.8.38.** Roata unei mori de rază $R = 1{,}00$ m, cu palete radiale plane, este pusă în mișcare cu un jet de apă de viteză $v = 12{,}56$ m/s ca în figură. Pentru ce turație a roții puterea dezvoltată de roată va fi maximă?

1.8.39. O șalupă cu motor hidroreactiv absoarbe și ejectează apa mării cu debitul $Q = 0{,}100$ m³/s. Viteza de ejectare față de șalupă $v = 10{,}0$ m/s, iar masa șalupei $m = 1{,}00$ t. Ce accelerație capătă șalupa? (Se neglijează forțele de rezistență).

1.8.40. O șalupă se mișcă rectiliniu uniform, fiind propulsată cu un motor hidroreactiv care absoarbe apa printr-un orificiu de intrare și o ejectează printr-un orificiu de ieșire. Aflați randamentul mecanic al motorului, știind că aria orificiului de ieșire este de n ori mai mică decît aria orificiului de intrare.

** **1.8.41.** Un vas cubic este umplut complet cu un lichid a cărui greutate este G. Aflați forța de presiune exercitată de lichid asupra unui perete lateral al vasului. Unde se află punctul de aplicație al acestei forțe?

** **1.8.42.** O bucată de gheață de formă prismatică de arie S și grosime H plutește pe apă. Ce lucru mecanic trebuie efectuat pentru a cufunda complet gheața în apă?

** **1.8.43.** Un vas cilindric de rază R conține un lichid de densitate ρ și se rotește uniform cu viteza unghiulară ω în jurul axei sale verticale. Aflați ecuația suprafeței *libere* a lichidului și presiunea în lichid.

** **1.8.44.** Un vas prismatic de înălțime h și secțiune S este plin cu un lichid. Pe fundul vasului se află un mic orificiu de arie S. În cît timp se golește o fracțiune f din volumul vasului?

(*) **1.8.45.** Pe o masă stă un vas umplut cu un lichid de densitate ρ pînă în înălțimea h. La ce înălțime trebuie practicat un mic orificiu de arie S la peretele lateral astfel încît „bătaia” jetului de lichid să fie maximă? Cît va fi forța reactivă asupra vasului în acest caz?

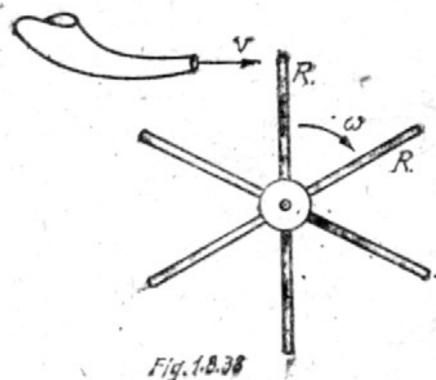


Fig. 1.8.38

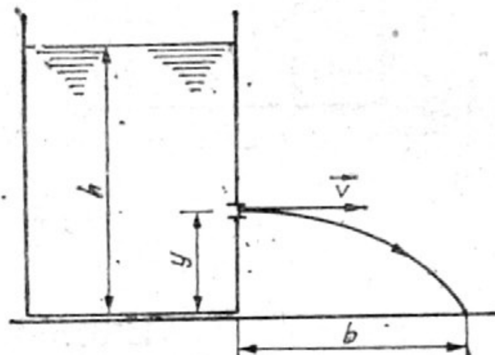


Fig. 1.8.45

** **1.8.46.** Un vas cilindric este umplut pînă la înălțimea H cu un lichid de densitate ρ. De-a lungul unei generatoare se deschide la un moment dat o fantă îngustă de lățime b și înălțime de la h_1 la h_2. Aflați forța reactivă asupra vasului.

** **1.8.47.** Un tub subțire de secțiune S' și lungime l este rotit într-un plan orizontal cu viteza unghiulară $\omega = \text{const}$ în jurul axei verticale trecînd prin capătul deschis. În tub se află o coloană de lichid de lungime h. La celălalt capăt închis există un mic orificiu de arie S. Calculați în cît timp se golește tubul de lichid.

** **1.8.48.** O minge de rază R plutește pe apă astfel încît partea cufundată are înălțimea h. Calculați lucrul mecanic care trebuie efectuat pentru a cufunda mingea: a) pînă la mijloc, b) complet, c) pentru a scoate mingea din apă, d) lucrul mecanic *net* necesar de la atingerea apei pînă la cufundarea completă a mingii.

1.9. OSCILAȚII ȘI UNDE

Oscilații mecanice

1.9.1. O particulă oscilează armonic cu perioada T, la $t = 0$ fiind în poziție de echilibru. În cît timp particula parcurge o fracțiune f (< 1) din amplitudine?

1.9.2. Un pendul simplu gravitaţional de lungime $l = 1{,}00$ m este deviat cu un unghi $\alpha < 6°$ apoi lăsat liber. După cît timp unghiul de deviaţie se reduce la jumătate?

1.9.3. Un corp lunecă fără frecări, o dată pe coarda AB ($\ll R$) şi a doua oară pe arcul AB al sferei de rază R. Care este durata mişcării?

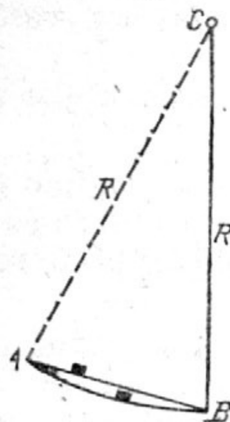


Fig. 1.9.3

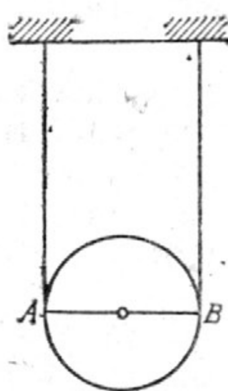


Fig. 1.9.6

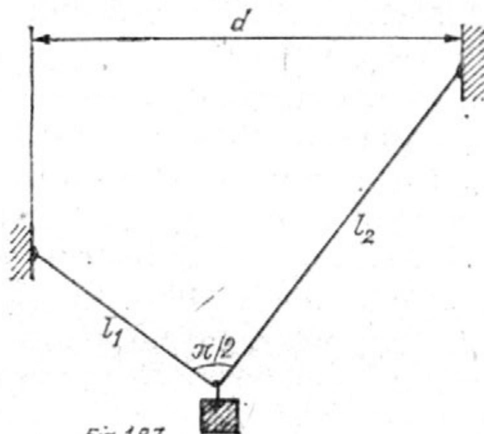


Fig. 1.9.7

1.9.4. Un ceasornic cu pendul merge exact cînd perioada sa este T_0. Cu cît avansează (sau întîrzie) el în $D = 24$ h dacă perioada devine T? De exemplu T este cu $f = 0{,}01$ % mai mare ca T_0.

1.9.5. Care este amplitudinea unghiulară de oscilaţie a unui pendul simplu gravitaţional, dacă viteza maximă $v = 2{,}1$ m/s? Perioada micilor oscilaţii ale aceluiaşi pendul este $T = 1{,}3$ s.

1.9.6. Un scripete este suspendat pe un fir ideal ca în figură. Aflaţi perioada micilor oscilaţii în planul figurii.

1.9.7. Un corp este suspendat de două fire ca în figură, unde $l_1 = 30$ cm, $l_2 = 60$ cm şi $d = 70$ cm. Aflaţi perioada micilor oscilaţii.

1.9.8. Căruciorul din figură merge jumătate din distanţa $L = 20$ m uniform accelerat, apoi cealaltă jumătate uniform frînat, transportînd un corp pe firul de lungime $l = 5{,}0$ m. Aflaţi acceleraţiile posibile ale căruciorului pentru care corpul suspendat se va opri la sfîrşitul drumului o dată cu căruciorul. Se consideră oscilaţii mici ale corpului suspendat

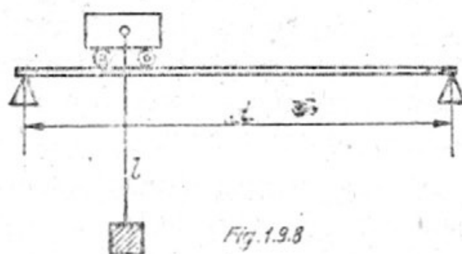


Fig. 1.9.8

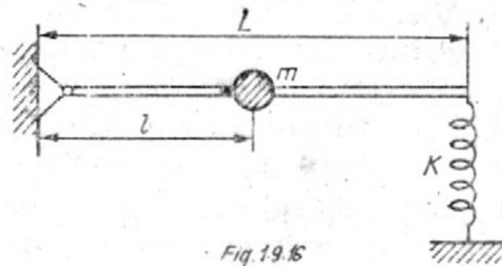


Fig. 1.9.16

1.9.9. Un jgheab semicilindric de lungime $l = 10{,}0$ m şi rază $R = 0{,}20$ m este înclinat sub unghiul $\alpha = 45°$ faţă de orizontală. Din vîrful jgheabului, dintr-un punct puţin deplasat faţă de generatoarea inferioară a jgheabului, i se dă drumul unui mic corp să lunece fără frecări. De cîte ori va intersecta corpul generatoarea inferioară a jgheabului?

* **1.9.10.** Aflaţi variaţia relativă a perioadei de oscilaţie a unui pendul simplu gravitaţional aflat deasupra unui zăcămînt de forma unei sfere de rază $r = 1{,}00$ km, de densitate $\rho = n\rho_0$, $n = 3{,}0$, ρ_0 — densitatea medie a Pămîntului, cu centrul la adîncimea $h = 1{,}20$ km. Raza Pămîntului $R = 6400$ km.

1.9.11. Două bile mici identice sînt suspendate de fire paralele egale, astfel încît bilele se ating. Bila din stînga este deviată spre stînga cu un

unghi mic ($< 6°$), iar bila din dreapta este deviată spre dreapta cu un unghi de două ori mai mic, și apoi lăsate liber simultan. După un timp $\tau = 0,30$ s bilele se ciocnesc perfect elastic. După cît timp de la ciocnire bila din dreapta va devia cu un unghi egal cu cel inițial?

1.9.12. O bilă suspendată de un resort vertical se află în echilibru, alungind resortul cu $\Delta l = 4,0$ cm. Aflați perioada oscilațiilor verticale ale acestei bile pe resort.

1.9.13. O bilă suspendată de un resort oscilează cu frecvența $\nu = 2,0$ Hz. Aflați alungirea statică a resortului (la echilibru).

1.9.14. Un resort de constantă elastică $k = 49$ N/m și lungime nedeformată $l = 0,40$ m este așezat vertical pe o masă. De la înălțimea $h = 2,80$ m deasupra mesei cade liber o bilă de masă $m = 1,00$ kg peste resort. Aflați viteza maximă a bilei.

1.9.15. Un corp este suspendat de un fir elastic. Dacă tragem de corp vertical în jos cu o forță care crește lent, atunci la valoarea $F_1 = 200$ N firul se rupe. Ce forță constantă minimă F_2 trebuie aplicată brusc pentru ca firul să se rupă?

1.9.16. O tijă de masă neglijabilă și de lungime $L = 1,00$ m este fixată cu un capăt într-o articulație ideală, iar celălalt capăt se sprijină pe un resort de constantă $k = 100$ N/m, ca în figură. Aflați perioada micilor oscilații ale corpului punctiform $m = 1,00$ kg de pe tijă, aflat la distanța $l = 0,50$ m de articulație.

1.9.17. Un corp de masă $m = 50$ g este suspendat de un resort ideal vertical nedeformat și lăsat liber fără viteză inițială. În ce raport se schimbă perioada și amplitudinea oscilațiilor, dacă în una din pozițiile extreme (superior, inferior) de corp se lipește un corp de masă $m' = 100$ g aflat inițial în repaus?

1.9.18. Talerul de masă $m_1 = 0,100$ kg atîrnat de un resort oscilează vertical cu amplitudinea $A = 9,8$ cm. Cînd talerul se găsea în poziția extremă inferioară pe el se pune fără șoc un corp de masă $m_2 = 0,400$ kg, astfel încît oscilațiile dispar. Aflați perioada oscilațiilor inițiale.

1.9.19. Un resort de constantă elastică k are capătul superior fixat iar la capătul inferior prinsă o bilă de masă m. Ținem inițial resortul deformat cu x_0 (alungit $x_0 > 0$ sau comprimat $x_0 < 0$), apoi îi dăm drumul să oscileze. Aflați: amplitudinea oscilațiilor, deformațiile extreme în timpul oscilațiilor și căldura degajată după stingerea oscilațiilor.

1.9.20. Un corp de masă $M = 1,00$ kg este în echilibru, fiind *atîrnat* de un resort. Se așează ușor peste acest corp un alt corp de masă $m = 0,50$ kg. Aflați forța de apăsare maximă și cea minimă dintre corpuri în timpul oscilațiilor sistemului. Aflați de asemenea aceste apăsări în cazul cînd corpul M este în echilibru fiind *așezat peste* resortul vertical.

1.9.21. De un resort vertical a fost suspendat un corp de masă $m_1 = 100$ g și lăsat liber. După amortizarea oscilațiilor s-a măsurat căldura degajată $Q_1 = 50$ mJ. Ce căldură se va degaja dacă înlocuim corpul cu unul de masă $m_2 = 200$ g?

1.9.22. În sistemul din figură, aflat în echilibru cu $m_2 = 100$ g, $k = 10$ N/m, la un moment dat se taie firul dintre corpurile m_1 și m_2. Care va fi amplitudinea oscilațiilor? Cîtă căldură se degajă după stingerea completă a oscilațiilor?

1.9.23. În sistemul din figură corpul $m_2 = 1,00$ kg se așează ușor peste talerul de masă m_1 suspendat de un resort cu $k = 100$ N/m. Care va fi amplitudinea oscilațiilor? Cîtă căldură se degajă după stingerea completă a oscilațiilor?

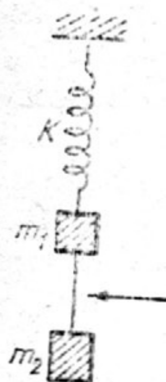


Fig. 1.9.22



Fig. 1.9.23

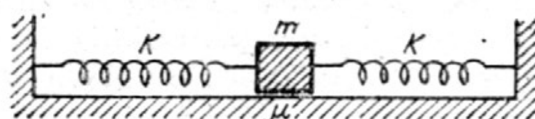


Fig. 1.9.27

1.9.24. Un resort de constantă elastică $k = 10$ N/m are capătul superior fixat, iar la capătul inferior prins un corp de masă $m = 50$ g. Ținem inițial resortul vertical deformat cu $y_0 = \pm 10$ cm (alungit, respectiv comprimat), apoi îi dăm drumul să oscileze pe verticală ($g = 10$ m/s²). a) Aflați amplitudinea oscilațiilor. b) La un moment dat cînd corpul trece printr-una din pozițiile extreme, inferioară respectiv superioară, de corp se lipește un alt corp de masă $m' = 50$ g avînd inițial o viteză verticală $v_0 = 3,0$ m/s. Aflați noua amplitudine a oscilațiilor. c) Calculați căldura disipată prin stingerea oscilațiilor în cazul b).

1.9.25. Peste un resort vertical de constantă elastică $k = 10,0$ N/m este fixat un taler de masă $M = 100$ g peste care se așează o bilă de masă $m = 50$ g. Din poziția de echilibru împingem talerul cu bila în jos cu $y_0 = 20$ cm și îi dăm drumul. Aflați înălțimea la care urcă bila față de poziția inițială de echilibru și amplitudinea oscilațiilor platanului după desprinderea bilei.

1.9.26. De tavan este suspendat printr-un resort de constantă $k = 100$ N/m un corp de masă $m = 0,50$ kg așezat pe un suport. Inițial resortul nu este deformat, după care suportul începe să coboare cu accelerația $a = 4,9$ m/s². Aflați timpul după care corpul se desprinde de suport, alungirea maximă a resortului și amplitudinea oscilațiilor.

1.9.27. Un corp cu masa $m = 0,50$ kg, fixat de două resorturi identice, fiecare de constantă elastică $k = 15$ N/m, ca în figură, efectuează oscilații pe o masă orizontală cu coeficientul de frecare la lunecare μ. Știind două deviații consecutive de la poziția de echilibru, de o parte și de alta, $s_1 = 10,0$ cm, $s_2 = 7,0$ cm, aflați coeficientul μ.

1.9.28. Inițial sistemul din figură are resorturile nedeformate, $k_1 = 150$ N/m, $k_2 = 250$ N/m, apoi brusc întindem resortul 2 cu o distanță $d = 40$ mm. Aflați amplitudinea oscilațiilor și viteza maximă a corpului $m = 250$ g.

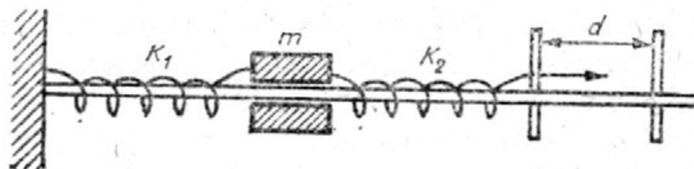


Fig. 1.9.28

1.9.29. Două sisteme identice se mişcă ca în figură pe un plan orizontal fără frecare şi se ciocnesc perfect elastic, $m = 2,00$ kg, $k = 100$ N/m, $v_0 = 1,00$ m/s, $L = 2,00$ m. După cît timp revin în poziţia iniţială?

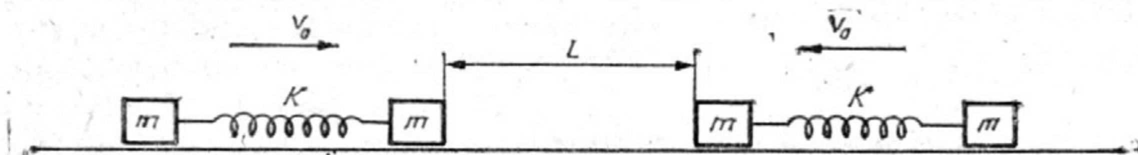


Fig. 1.9.29

1.9.30. În sistemul din figură barele de lungime $l = 0,15$ m au masă neglijabilă, articulaţiile sînt ideale, iar resortul ideal este iniţial nedeformat şi unghiul $\alpha = 60°$. Legăm de punctul inferior un corp şi îl lăsăm liber să oscileze. Ştiind că după stingerea oscilaţiilor unghiul $\beta = 120°$, aflaţi care a fost amplitudinea oscilaţiilor şi perioada lor.

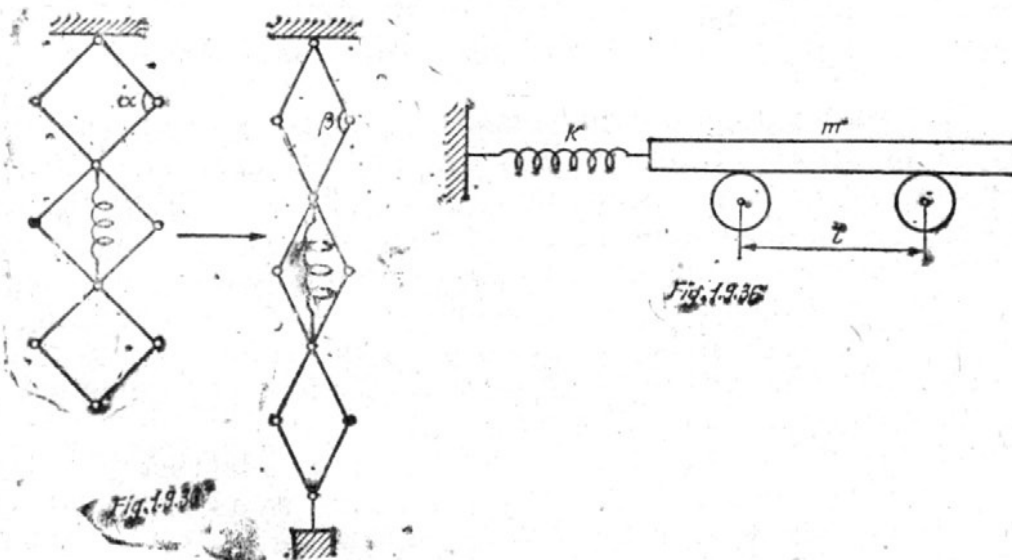


Fig. 1.9.30   Fig. 1.9.36

1.9.31. Pe o masă orizontală este legată de un resort orizontal de constantă $k = 98$ N/m (avînd celălalt capăt fix) o bilă de masă $m = 0,200$ kg, avînd coeficientul de frecare cu masa $\mu = 0,10$. Resortul cu bila este întins cu o distanţă $A = 8,9$ cm (< lungimea resortului nedeformat) şi lăsat liber. Aflaţi lungimea totală parcursă de bilă pînă la oprire şi timpul total respectiv.

1.9.32. O sanie de lungime $l = 2,00$ m, lunecînd cu viteza $|\vec{v}_0| = 1,00$ m/s pe gheaţă netedă fără frecare, intră pe asfalt unde coeficientul de frecare este $\mu = 0,20$ şi se opreşte parcurgînd nu mai mult de jumătate din lungimea sa. a) Aflaţi distanţa parcursă s_1 şi timpul t_1 pînă la oprire. b) Se imprimă acum saniei aceeaşi viteză $\vec{v}_0$. Aflaţi distanţa parcursă s_2 şi timpul t_2 pînă la oprire ($g = 10$ m/s^2).

1.9.33. Un paralelipiped de lungime $l = 49$ cm lunecă cu viteza v_0 pe porţiunea netedă (fără frecări) a unui plan orizontal după care intră pe o porţiune rugoasă cu coeficientul de frecare la lunecare $\mu = 0,20$ şi se opreşte intrînd doar o fracţiune $f = 0,50$ din lungimea sa în această porţiune. Aflaţi timpul de frînare şi viteza iniţială.

1.9.34. Un paralelipiped de lungime $l = 49$ cm lunecă cu viteza $v_0 = 1,96$ m/s pe porţiunea netedă (fără frecări) a unui plan orizontal după care intră pe o porţiune rugoasă cu coeficientul de frecare la lunecare $\mu = 0,20$. Aflaţi timpul pînă la oprire.

1.9.35. Un corp porneşte fără viteză iniţială din vîrful unui plan înclinat de unghi $\alpha = 10°$, coeficientul de frecare crescînd după legea $\mu =$

bx, unde $b = 0{,}30$ m^{-1}. Corpul se oprește înainte de a ajunge la baza planului. Aflați timpul de mișcare și distanța parcursă.

1.9.36. O scîndură omogenă și uniformă de masă $m = 10{,}0$ kg este așezată simetric pe două tambururi, distanța dintre axele acestora fiind $l = 0{,}98$ m. Unul din tambururi este neted fără frecări, iar celălalt este rugos cu coeficientul de frecare $\mu = 0{,}45$. Scîndura este legată printr-un resort orizontal nedeformat de constantă $k = 205$ N/m de un perete. Se pune în rotație rapidă tamburul rugos. Aflați frecvența unghiulară a micilor oscilații orizontale ale scîndurii.

1.9.37. O bilă suspendată de un resort execută oscilații verticale cu perioada $T = 0{,}90$ s. Cît devine perioada dacă dedesubt se așează la distanța $x_0 = A/2$ de poziția de echilibru un perete orizontal de care se va ciocni periodic perfect elastic bila?

1.9.38. O bilă perfect elastică, suspendată de un resort, efectuează oscilații armonice de amplitudine A. La ce distanță de poziția de echilibru trebuie pus un perete perfect elastic pentru ca perioada oscilațiilor să se reducă cu o fracțiune f? Aplicație $f = 1/3$.

1.9.39. Asupra corpului de masă $m = 10{,}0$ kg din figură, aflat inițial în echilibru, acționează la un moment dat o forță constantă F. Constanta elastică a resortului $k = 4{,}0$ kN/m. Cît timp τ trebuie să acționeze această forță pentru ca după încetarea ei corpul să rămînă din nou în repaus? Frecările sînt neglijabile.

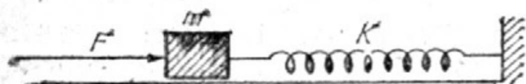


Fig. 1.9.39

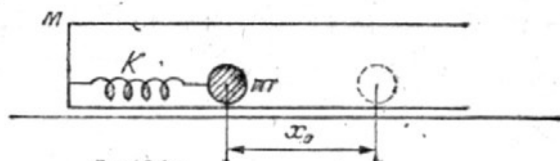


Fig. 1.9.40

1.9.40. Într-o țeavă de masă $M = 200$ g așezată pe un plan orizontal fără frecări se află un resort de constantă $k = 220$ N/m fixat cu un capăt de țeavă, iar cu celălalt sprijinit de o bilă de masă $m = 20$ g. Comprimăm resortul cu bila cu $x_0 = 5{,}0$ cm și îi dăm drumul. Aflați viteza relativă a bilei față de țeavă și timpul în care se produce accelerarea bilei.

1.9.41. Pe talerul de masă neglijabilă, atîrnat de un resort de constantă elastică $k = 78{,}4$ N/m, cade de la înălțimea $h = 0{,}50$ m un corp de masă $m = 1{,}00$ kg și rămîne pe taler (ciocnire plastică). Aflați amplitudinea oscilațiilor.

1.9.42. Căruciorul din figură, de masă $M = 640$ g, efectuează oscilații. În momentul cînd trece prin poziția de echilibru în el cade un corp de masă $m = 360$ g (ciocnire plastică). Aflați în ce raport se schimbă amplitudinea oscilațiilor.

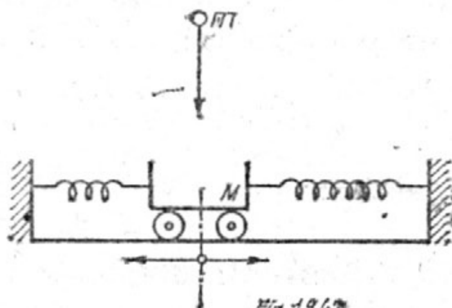


Fig. 1.9.42

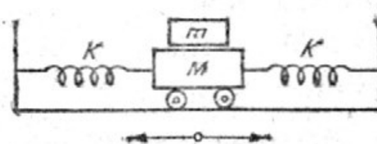


Fig. 1.9.43

1.9.43. Pe o masă orizontală netedă, fără frecări, este așezat un corp de masă $M = 1,00$ kg legat prin două resorturi identice de constantă elastică $k = 30$ N/m fiecare. Deasupra corpului M se așează un alt corp de masă $m = 0,50$ kg cu coeficientul de frecare $\mu = 0,40$ față de primul. Aflați amplitudinea oscilațiilor pentru care corpul m începe să lunce peste corpul M.

1.9.44. Un corp de masă $m = 1,00$ kg este așezat pe talerul de masă $M = 0,50$ kg al unui resort ca în figură. Cu ce forță trebuie apăsat corpul m pentru ca după încetarea apăsării el să se desprindă de taler?

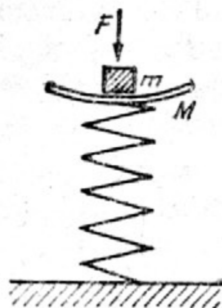


Fig. 1.9.44

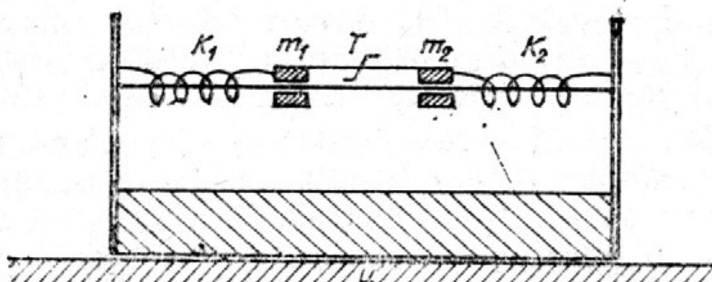


Fig. 1.9.45

1.9.45. Două bile de mase $m_1 = 200$ g, $m_2 = 300$ g pot oscila fără frecare pe o tijă orizontală sub acțiunea resorturilor din figură. Tija este fixată pe un suport de masă $M = 1,00$ kg. Inițial bilele sînt legate între ele printr-un fir în care tensiunea $T = 3,0$ N. Ce coeficient de frecare minim este necesar între suport și planul orizontal pentru ca suportul să nu lunece în timpul oscilațiilor, după ce se arde firul de legătură?

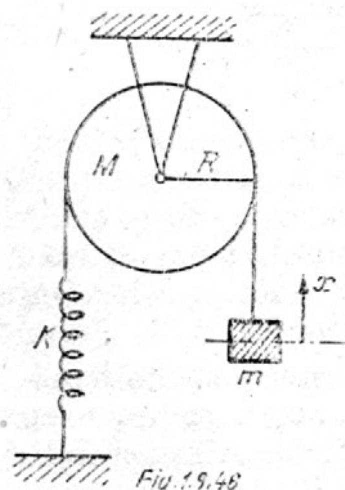


Fig. 1.9.46

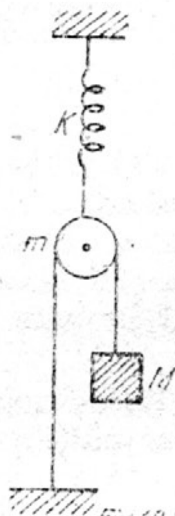


Fig. 1.9.47

1.9.46. În sistemul din figură scripetele este un disc omogen de masă $M = 0,40$ kg. Se cunosc de asemenea $k = 100$ N/m și $m = 0,80$ kg. Aflați perioada micilor oscilații ale sistemului.

1.9.47. În sistemul din figură scripetele are masa $m = 400$ g, dar dimensiuni neglijabile și frecări în lagăr neglijabile, $M = 900$ g, $k = 100$ N/m. Aflați perioada oscilațiilor.

1.9.48. Pe o platformă orizontală care vibrează oblic sub unghiul $\alpha = 45°$ față de verticală, cu frecvența $\nu = 10$ Hz, este așezat un corp paralelipipedic cu coeficientul de frecare cu platforma $\mu = 0,50$. Pentru ce valoare a amplitudinii oscilațiilor corpul începe să lunece respectiv să salte pe platformă?

** **1.9.49.** O bilă de masă m este suspendată de un resort (ideal) de lungime nedeformată l_0 și constantă k. Capătul superior al resortului execută oscilații verticale de amplitudine A și frecvență unghiulară Ω. Deduceți ecuația oscilațiilor bilei în regim permanent.

∗ **1.9.50.** O halteră de lungime $l = 1{,}05$ m este așezată transversal pe un semicilindru orizontal fix de rază $R = 0{,}45$ m. Aflați perioada micilor oscilații ale halterei, considerînd că haltera nu lunecă.

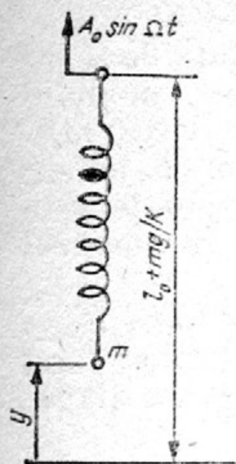
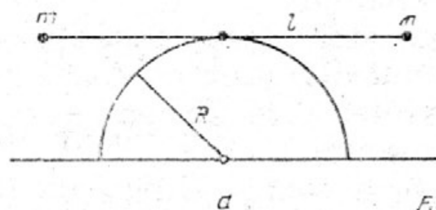
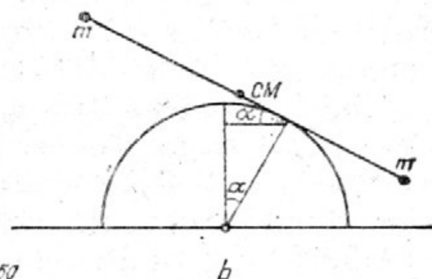


Fig. 1.9.49



a



b

Fig. 1.9.50

∗ **1.9.51.** Un cerc de butoi de rază $r = 50$ cm oscilează (fără lunecare) în plan vertical pe suprafața interioară a unui cilindru orizontal de rază $R = 94{,}1$ cm. Aflați perioada micilor oscilații.

∗ **1.9.52.** Un cerc de butoi de rază $R = 94{,}1$ cm este așezat transversal pe un cilindru orizontal de rază $r = 50$ cm. Aflați perioada micilor oscilații ale cercului în planul său vertical, considerînd frecarea suficient de mare ca cercul să nu lunece.

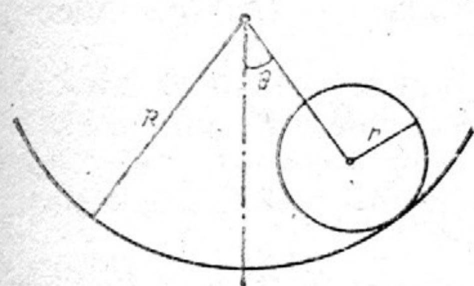
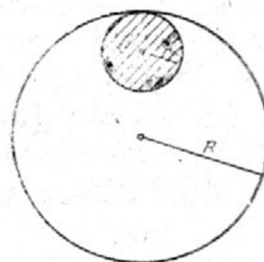
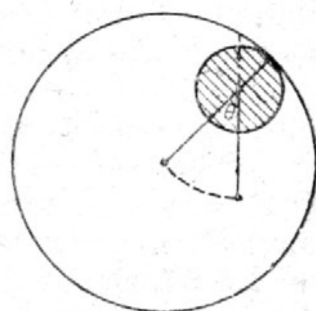


Fig. 1.9.51



a



b

Fig. 1.9.52

∗ **1.9.53.** Aflați perioada oscilațiilor unui lichid de densitate $\rho = 800$ kg/m³ și masă $m = 0{,}800$ kg aflat într-un tub vertical de forma literei U cu secțiunile ramurilor $S_1 = 4{,}0$ cm², $S_2 = 6{,}0$ cm².

1.9.54. Evaluați dimensiunile neuniformităților de-a lungul unui șanț de înregistrare a sunetului pe un disc microsion ($n = 33$ rot/min).

1.9.55. O bară omogenă și uniformă, plutește cufundată vertical, aproape complet, într-un lichid. Cufundînd-o foarte puțin și lăsînd-o liberă, bara oscilează vertical cu perioada $T = 2{,}0$ s. Aflați lungimea barei.

— Unde elastice

1.9.56. Distanța dintre „dealurile" valurilor pe apă este $\lambda = 5{,}0$ m. O barcă înaintînd spre valuri este izbită de valuri cu frecvența $\nu_1 = 4{,}0$ s⁻¹, iar fugind din fața valurilor — cu frecvența $\nu_2 = 2{,}0$ s⁻¹. Aflați viteza valurilor și a b ărcii.

1.9.57. Cum variază faza mișcării oscilatorii armonice a particulelor mediului de-a lungul unei unde staționare?

1.9.58. Un avion cu reacție zboară cu viteza constantă $v = 500$ m/s la altitudinea $h = 6{,}8$ km. Care este forma frontului undei de șoc produsă de avion? La ce distanță de o casă se află avionul în momentul cînd geamurile casei încep să vibreze? Viteza sunetului în aer $c = 340$ m/s.

1.9.59. Calculați indicele de refracție a sunetului la suprafața de separație aer-sticlă, cunoscînd densitatea sticlei $\rho = 2600$ kg/m^3, modulul de elasticitate $E = 7{,}0 \cdot 10^{10}$ N/m^2 și viteza sunetului în aer $c = 340$ m/s.

** **1.9.60.** Calculați densitatea medie (în timp) de energie cinetică, potențială și totală într-o undă staționară longitudinală a cărei ecuație este $u(x,t) = A\cos(kx + \beta)\cos(\omega t + \alpha)$, unde $k = \omega/c = 2\pi/\lambda$ este numărul de undă, ρ — densitatea materialului.

1.9.61. Frecvența sunetului emis de o coardă întinsă cu forța $F_1 = 160$ N diferă de frecvența unui diapazon cu $\Delta\nu = 20$ Hz. Întinsă fiind cu forța $F_2 = 250$ N, coarda vibrează la unison (în rezonanță) cu diapazonul. Aflați frecvența diapazonului.

1.9.62. Frecvența emisă de o coardă diferă de frecvența unui diapazon cu $\Delta\nu' = 10$ Hz. Dacă se scurtează coarda cu o fracțiune $f = 0{,}010$ din lungimea ei, ea intră în rezonanță cu diapazonul. Aflați frecvența diapazonului.

1.9.63. Un tub sonor închis emite tonul fundamental de frecvență $\nu = 250$ Hz. Cunoscînd viteza sunetului în aer $c = 340$ m/s, aflați lungimea tubului și frecvența tonului fundamental emis de același tub dacă îl deschidem.

1.9.64. Două tuburi sonore, unul închis și altul deschis, au aceeași lungime. Tubul deschis are frecvența fundamentală $\nu = 440$ Hz. Calculați frecvența armonicii a 3-a a celor două tuburi.

1.9.65. Cîte surse sonore identice trebuie reunite pentru ca nivelul sonor să crească cu $\Delta L = 20$ dB față de nivelul dat de o singură sursă?

** **1.9.66.** O particulă oscilează sinusoidal: $x = A\cos(\omega t + \alpha)$. Fie $dP(x) = p(x)dx$ probabilitatea de a găsi particula pe intervalul $(x, x + dx)$. Calculați densitatea de probabilitate $p(x)$.

* **1.9.67.** Ecuațiile mișcării unei particule sînt: $x = A\cos\omega t$, $y = B\sin\omega t$. Aflați ecuația traiectoriei și legea forței.

** **1.9.68.** Un corp de masă m este suspendat în repaus de un resort de constantă elastică k în cabina unui lift. La un moment dat $(t = 0)$ liftul pornește în sus cu accelerația $a = Bt$, $B = \text{const} > 0$. Aflați legea mișcării corpului față de lift.

** **1.9.69.** Un corp de masă m este suspendat în repaus de un resort de constantă elastică k. La un moment dat $(t = 0)$ începe să acționeze o forță constantă F care durează un timp τ. Aflați amplitudinea oscilațiilor după încetarea acțiunii forței.

** **1.9.70.** Un corp de masă m, așezat pe o masă orizontală fără frecări, este legat printr-un resort de masă m' și constantă elastică k de un perete. Aflați frecvența oscilațiilor corpului (se consideră că toate punctele resortului oscilează în fază) (model de resort real).

** **1.9.71.** O particulă de masă m supusă la o forță de tip elastic $-kx$ (de exemplu, suspendată de un resort) oscilează liber într-un mediu fluid unde acționează o forță de frecare $-r\dot{v}$. Studiați mișcarea particulei.

** **1.9.72.** O particulă oscilează sub acțiunea unei forțe de tip elastic $-kx$ într-un mediu vîscos în care întîmpină o forță de frecare $-r\vec{v}$. Pentru a obține oscilații întreținute (neamortizate) se aplică particulei o forță sinusoidală $f = F_0\cos\Omega t$. Studiați mișcarea rezultantă a particulei.

Răspunsuri și rezolvări

1.1. Principiile mecanicii

1.1.1. $T_r = 2m_1m_2g : (m_1 + m_2) = 94{,}1$ N.
1.1.2. $T = Fm_2 : (m_1 + m_2) = 1{,}0$ kN.
1.1.3. $F = (m_1 + m_2)(a - g) = 4{,}00$ N, $T = m_1(a - g) = 1{,}00$ N.
1.1.4. $T = F[m_2 + (1 - f)m_0] : (m_1 + m_2 + m_0)$.
1.1.5. $T = \frac{1}{2}(m_1 - m_2)g = 9{,}8$ N.

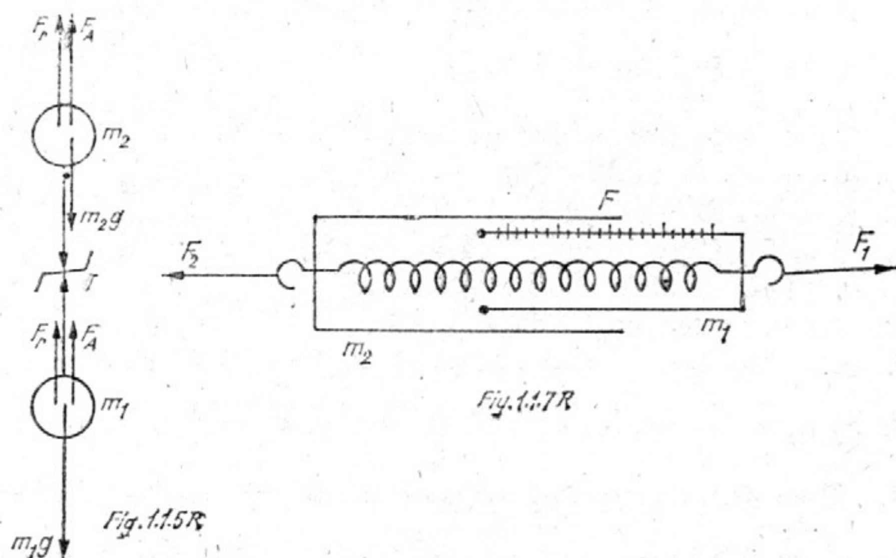


Fig. 1.1.5R

Fig. 1.1.7R

1.1.6. $V' = V - q\tau = 9{,}0$ L.
1.1.7. $m_1 : m_2 = (F_1 - F) : (F - F_2) = 1/2$.
1.1.8. $T_1 = \frac{1}{2}m(g/\cos\alpha - a/\sin\alpha) = -8{,}68 < 0$, deci $T_1 = 0$, $T_2 = m\sqrt{a^2 + g^2} = 28$ N.

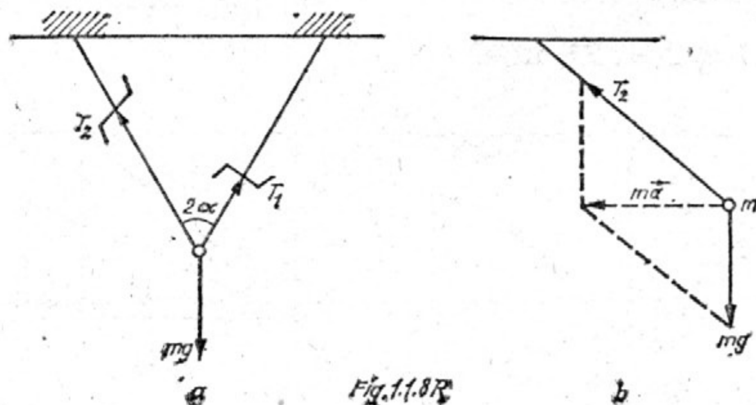


Fig. 1.1.8R

1.1.9. $a = g\ \sin^2(\alpha/2) = 4{,}9\ \mathrm{m/s^2}$.

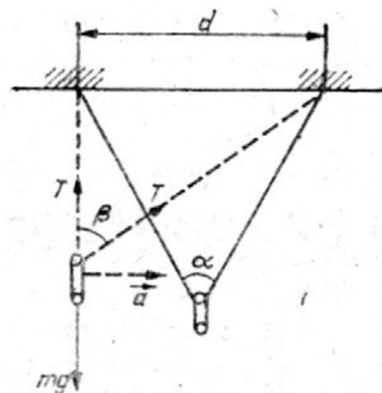


Fig. 1.1.9R

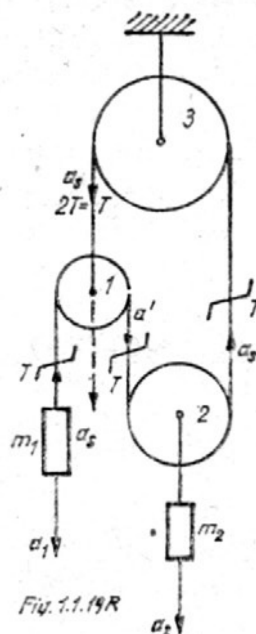


Fig. 1.1.19R

1.1.10. $N = m(a+g)\cos\alpha = 2{,}0\ \mathrm{N}$,
$T = m(a+g)\sin\alpha = 1{,}2\ \mathrm{N}$.

1.1.11. $T = m_1 m_2\ g\ \cos^2\alpha : (m_1 + m_2\ \sin^2\alpha) = 147\ \mathrm{N}$.

1.1.12. $v_r = \dfrac{1}{2}F(1/m_1 + 1/m_2)t$.

1.1.13. $T_2 = mg\ \Delta m\ : (4m + \Delta m) = 3{,}6\ \mathrm{N}$.

1.1.14. $m_2 = m_1 M : (M - 2m_1) = 125\ \mathrm{g}$.

1.1.15. $a = g(2M - m)/m = 19{,}6\ \mathrm{m/s^2}$.

1.1.16. $a_1 = 2g\ (2m_1 - m_2) : (4m_1 + m_2) = 2{,}45\ \mathrm{m/s^2}$,
$T_1 = 3m_1 m_2 g : (4m_1 + m_2) = 11{,}0\ \mathrm{N}$.

1.1.17. $3m_1m_2 - 4m_2m_3 - m_3m_1 = 0$.

1.1.18. $a_1 = 2g(2m_1 + m_2) : (4m_1 + m_2) = 11{,}6\ \mathrm{m/s^2}$.

1.1.19. a) $a_s = \dfrac{1}{2}(a_1 + a_2)$, b) $a_s = 3g$, $a' = 5g$, $T = 0$.

1.1.20. $T = 4m_1m_2m_3g : [4m_1m_2 + m_3(m_1 + m_2)] = 9{,}8\ \mathrm{N}$.

1.1.21. $a' = g\sin\dfrac{\alpha}{2}\,\dfrac{m_1 + m_2}{m_2 - m_1} = 2{,}2\mathrm{m/s^2}$, unde $\sin\alpha = a(m_1 + m_2) : (m_2 g)$.

1.1.22. $v' = v_1 \mathrm{tg}\,\alpha\ : (1 - a_1/g) = 8{,}66\ \mathrm{m/s}$.

1.2. Cinematica și dinamica punctului material

Mișcarea rectilinie uniformă

1.2.1. $v_0 = v\sqrt{2} = 21\ \mathrm{m/s}$.

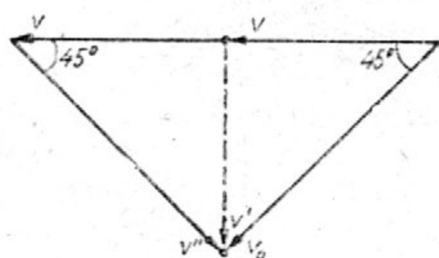


Fig. 1.2.1R

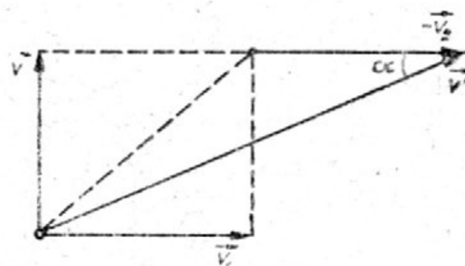


Fig. 1.2.2R

1.2.2. $\mathrm{tg}\,\alpha = v' : (v_1 + v_2)$, $\alpha = 28°4'$.

1.2.3. $v_2 = v_1 \pm l_2/t_1 = 25$ m/s sau $5{,}0$ m/s, $t_1' = l_2 : (v_1 + v_2) = 15$ s sau 30 s, $t_2' = l_1 : (v_1 + v_2) = 22{,}5$ s sau 45 s.

(*) **1.2.4.** Din asemănarea triunghiurilor avem

$$\frac{x}{AB} = \frac{v_a - v_0 \sin\alpha}{v_0 \cos\alpha}, \tag{1}$$

de unde

$$x = AB\,\frac{v_a - v_0 \sin\alpha}{v_0 \cos\alpha} = \mathrm{f}(\alpha). \tag{2}$$

Distanţa x este funcţie de unghiul α şi are extreme acolo unde derivata sa se anulează:

$$x'(\alpha) = \mathrm{f}'(\alpha) = \frac{AB}{v_0}\left(\frac{v_a - v_0\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)' =$$

$$= \frac{AB}{v_0}\,\frac{-v_0\cos\alpha\cos\alpha - (v_a - v_0\sin\alpha)(-\sin\alpha)}{\cos^2\alpha} = \tag{3}$$

$$= \frac{AB}{v_0}\,\frac{-v_0 + v_a\sin\alpha}{\cos^2\alpha},$$

care se anulează pentru

$$-v_0 + v_a \sin\alpha = 0, \quad \sin\alpha = v_0/v_a = 1/2, \quad \alpha = 30°. \tag{4}$$

Problema se poate rezolva şi elementar, fără derivate, dacă facem desenul ca în figura b şi observăm că se obţine x minim atunci cînd direcţia vitezei rezultante $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}_a$ este tangentă la semicercul din figură care este loc geometric al vîrfurilor vitezei rezultante.

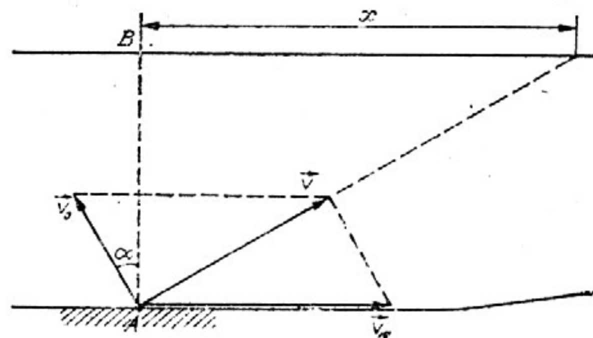


Fig. 1.2.4.a.R

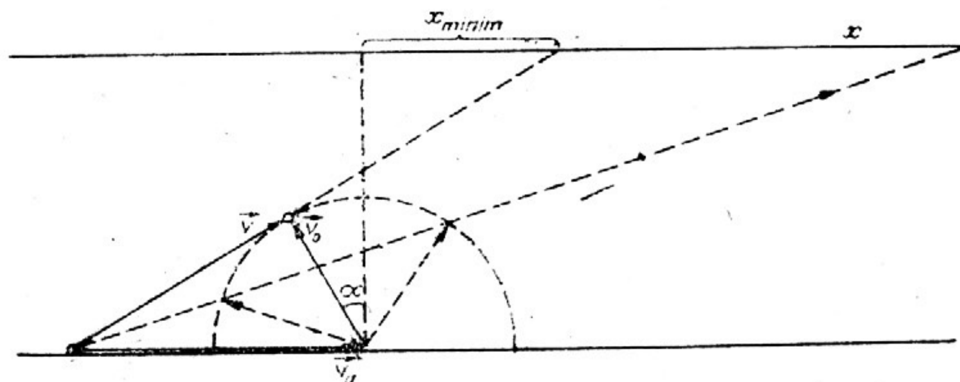


Fig. 1.2.4.b.R

1.2.5. Vd. fig.

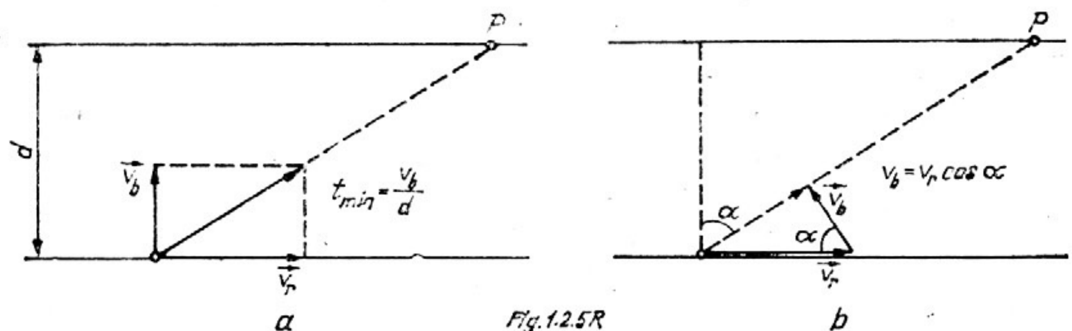


Fig. 1.2.5R

1.2.6. $u_x = v\dfrac{\text{tg}\,\alpha_1 - n\,\text{tg}\,\alpha_2}{\text{tg}\,\alpha_1 - \text{tg}\,\alpha_2} = 10$ km/h, $u_y = v(n - 1)\dfrac{\text{tg}\,\alpha_1 \text{tg}\,\alpha_2}{\text{tg}\,\alpha_1 - \text{tg}\,\alpha_2} =$
$= 17{,}3$ km/h, $v' = u_x = 10$ km/h.

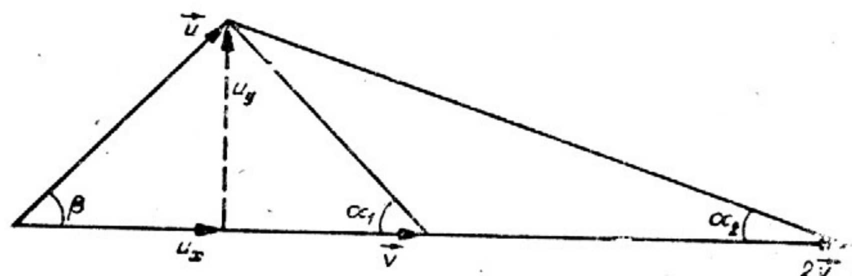


Fig. 1.2.6R

1.2.7. $t = (v_2 t_0 - s_0) : (v_2 - v_1) = 3{,}0$ h, $d = v_1 t = 150$ km și $t^* =$
$= s_0/v_1 = 1{,}2$ h, $s^* = s_0 = 60$ km.

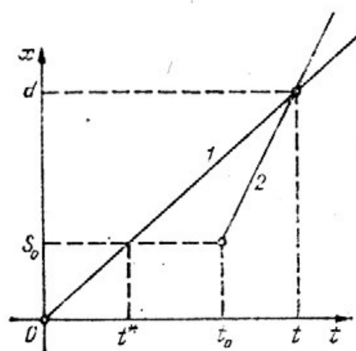


Fig. 1.2.7R

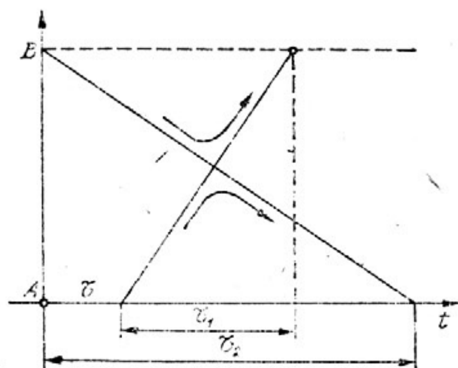


Fig. 1.2.8R

1.2.8. $\tau = \dfrac{1}{2}(\tau_2 - \tau_1) = 45$ min.

1.2.9. $t_0 = \sqrt{t_1 t_2}$, $v_1 = s : t_0 = 5{,}0$ m/s.

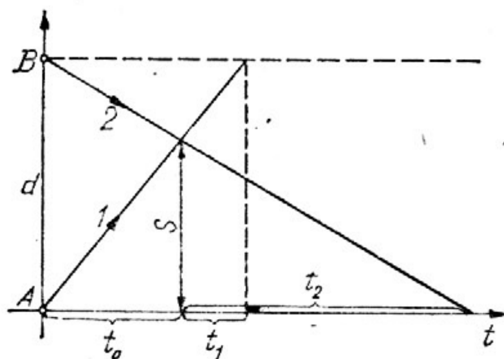


Fig. 1.2.9R

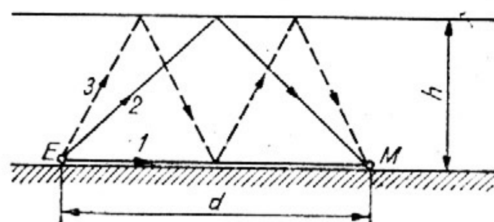


Fig. 1.2.10R

1.2.10. $d = \frac{c}{2}(T_2^2 - 4T_1^2) : (4T_1 - T_2) = 3{,}75\,\text{km}$,

$h = \frac{c}{2}\sqrt{T_1T_2(T_2 - T_1) : (4T_1 - T_2)} = 1{,}84\ \text{km}$.

1.2.11. $\sin(\alpha - \beta) \geqslant \frac{v_0}{v}\cos\alpha = 0{,}86$, $\beta \in (-45°, 15°)$, $v_{min} = v_0\cos\alpha = 2{,}6$ m/s cînd $\beta = \alpha - 90° = -15°$.

1.2.12. $d_3 = (d_1 + d_2)\ (v_1 + v_3) : (v_1 - v_2) = 400$ m.

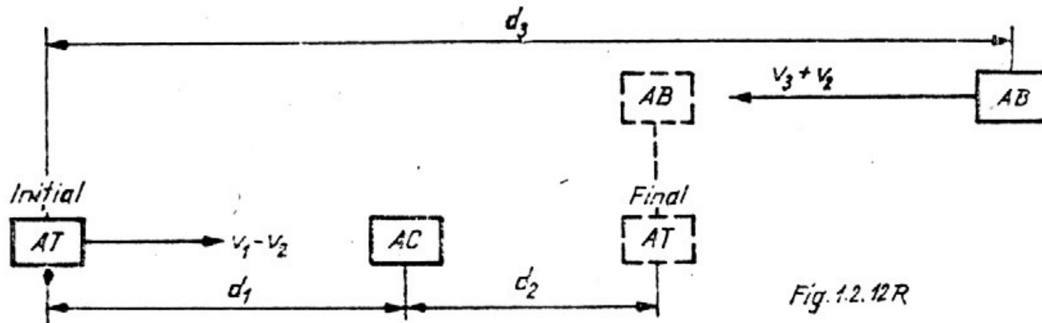


Fig. 1.2.12R

1.2.13. $l' = \pm l\ (v - u) : (v + u)$ dacă $u < v$ (ordinea se păstrează) resp. dacă $u > v$ (ordinea se inversează).

1.2.14. $d' = [d(v' + u) - l(v - v')] : (v + u) = 13{,}1$ m, $d_{min} = l(v - v') : (v' + u) = 1{,}14$ m, $v'_{min} = (lv - du) : (d + l) < 0$, deci $v'_{min} = 0$, $L' = [L(v' + u) + l(v - v')] : (v + u) = 330$ m.

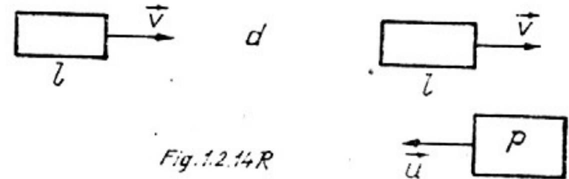


Fig. 1.2.14R

1.2.15. $d = T(c - v)^2 : (2c) = 4{,}0$ km.

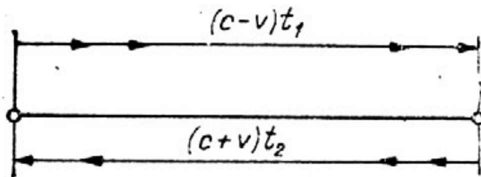


Fig. 1.2.15R

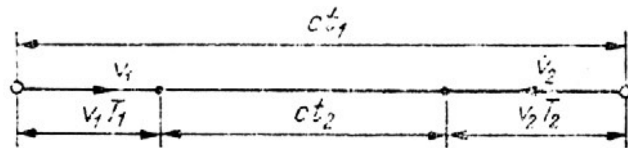


Fig. 1.2.16R

1.2.16. $T_2 = T_1(c \mp v_1) : (c \pm v_2) = 0{,}88$ s resp. 1,14 s.

1.2.17. $\tau \leqslant \frac{1}{c}\sqrt{r^2 + 4l_1l_2} - \frac{r}{c} \doteq 0{,}28$ s.

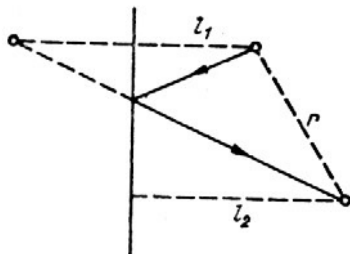


Fig. 1.2.17R

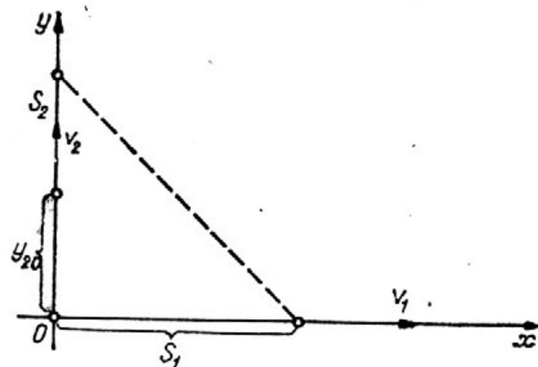


Fig. 1.2.18R

(*) **1.2.18.** Alegem momentul inițial $t = 0$ cînd primul camion trecea prin intersecție $y_{10} = 0$, atunci celălalt camion era la distanța y_{20}. La momentul t distanța dintre camioane devine:

$$d^2 = (v_1t)^2 + (y_{20} + v_2t)^2 = f(t). \tag{1}$$

Condiţia de extrem este anularea derivatei:

$$f'(t) = 0 \text{ sau } 2v_1^2 t + 2(y_{20} + v_2 t)v_2 = 0, \tag{2}$$

de unde $$t = (-y_{20}v_2) : (v_1^2 + v_2^2). \tag{3}$$

Natura extremului se obţine din semnul derivatei a doua:

$$f''(t) = 2v_1^2 + 2v_2^2 > 0, \tag{4}$$

deci avem un *minim*.

Rezultatul (3) se poate obţine şi fără derivate. În adevăr,

$$d^2 = (v_1^2 + v_2^2)t^2 + 2y_{20}v_2 t + y_{20}^2, \tag{1}$$

această funcţie pătratică se reprezintă printr-o parabolă care are un *minim* ($a = v_1^2 + v_2^2 > 0$) pentru

$$t = \left[-\frac{b}{2a}\right] = -\frac{2y_{20}v_2}{2(v_1^2 + v_2^2)}. \tag{3}$$

Pentru acest moment:

$$s_1 = v_1 t = (-y_{20}v_1 v_2) : (v_1^2 + v_2^2), \tag{5}$$

de unde $$y_{20} = -s_1(v_1^2 + v_2^2) : (v_1 v_2) \text{ şi } t = s_1 : v_1 \tag{6}$$

şi deci $$s_2 = y_{20} + v_2 t = -s_1 v_1/v_2 = -6{,}0 \text{ km}. \tag{7}$$

1.2.19. $t = d : \sqrt{v^2 - u^2} = 11{,}5$ s.

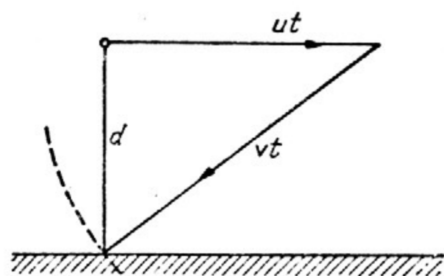


Fig. 1.2.19R

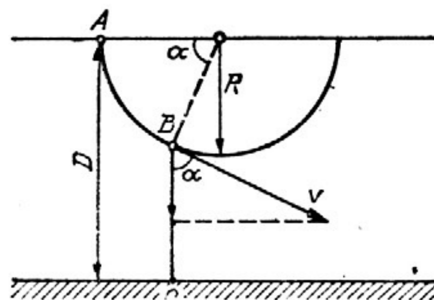
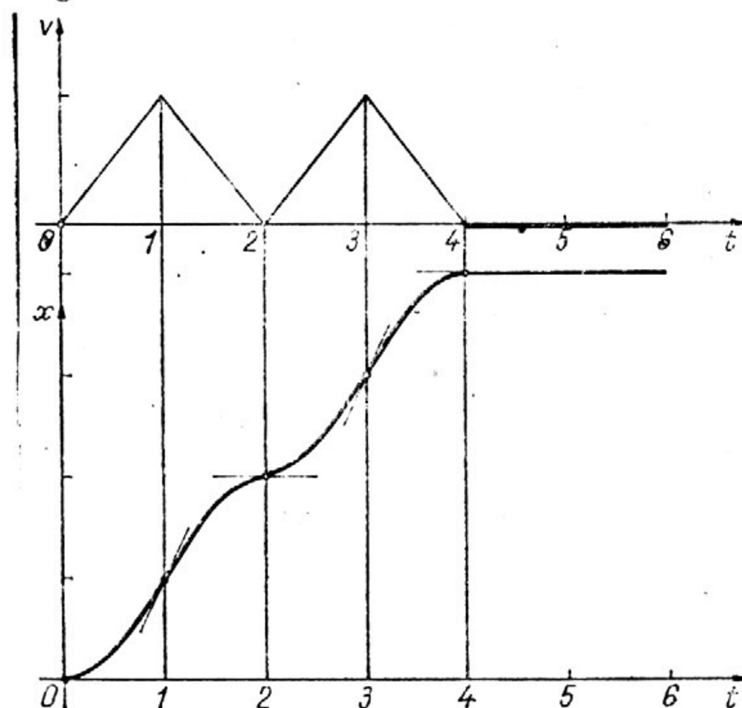


Fig. 1.2.20R

1.2.20. $t = \alpha R/v + (D - R\sin\alpha) : u = 272{,}3$ s, unde $\cos\alpha = u/v$, $\alpha = 75{,}5° = 1{,}318$ rad.

Mişcarea rectilinie uniform variată

1.2.21. Vd. fig.



ig. 1.2.21R

1.2.22. Vd. fig.

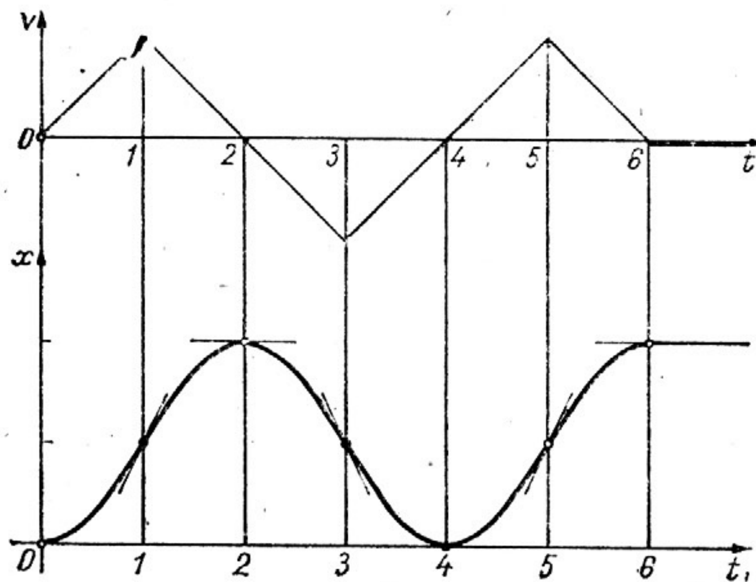


Fig. 1.2.22R

1.2.23. Vd. fig. $t_3 = \frac{1}{2} t_2^2 : (t_2 - t_1)$.

(∗) **1.2.24.** a) Pentru $t < T$:

$$x_1 = v_{01}t - \frac{1}{2}(v_{01}/T)t^2, \quad x_2 = \frac{1}{2}(v_{02}/T)t^2. \qquad (1)$$

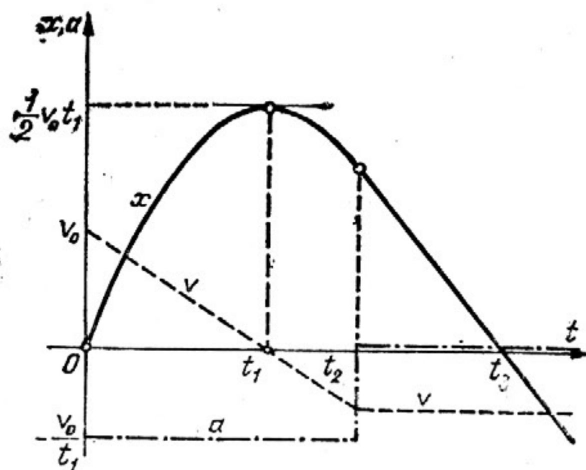
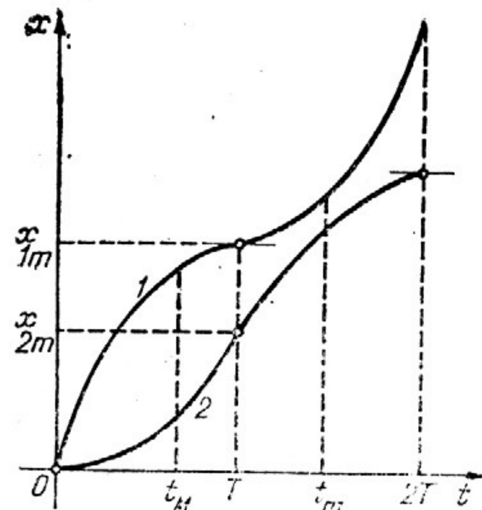


Fig. 1.2.23R



Condiţia de extrem pentru

$$s = x_1 - x_2 = \mathrm{f}(t) \qquad (2)$$

este anularea derivatei:

$$\mathrm{f}'(t) = v_{01} - (v_{01}/T)t - (v_{02}/T)t = 0, \text{ de unde } t_M = Tv_{01} : (v_{01} + v_{02}) \qquad (3)$$

şi

$$(x_1 - x_2)_{\max} = \frac{1}{2} Tv_{01}^2 : (v_{01} + v_{02}). \qquad (4)$$

Natura extremului este dată de semnul derivatei a doua:

$$\mathrm{f}''(t) = -v_{01}/T - v_{02}/T < 0, \qquad (5)$$

deci avem un *maxim*.

Rezultatul (3) se obține și fără derivate, observînd că funcția (2) este pătratică și se reprezintă, deci printr-o parabolă, care are un *maxim* $\left(a = -\frac{1}{2}v_{01}/T - \frac{1}{2}v_{02}/T < 0\right)$ pentru

$$t = \left[-\frac{b}{2a}\right] = -\frac{v_{01}}{2\cdot\left(-\frac{1}{2}v_{01}/T - \frac{1}{2}v_{02}/T\right)}.$$

b) $$x_{1m} = \frac{1}{2}v_{01}T,\ x_{2m} = \frac{1}{2}v_{02}T < x_{1m}. \qquad (6)$$

Pentru $t > T$:

$$x_1 = x_{1m} + \frac{1}{2}(v_{01}/T)(t-T)^2,$$

(7)

$$x_2 = x_{2m} + v_{02}(t-T) - \frac{1}{2}(v_{02}/T)(t-T)^2.$$

Condiția de extrem pentru

$$s = x_1 - x_2 = s(t) \qquad (8)$$

este anularea derivatei:

$$s'(t) = (v_{01}/T)(t-T) - v_{02} + (v_{02}/T)(t-T) = 0, \qquad (9)$$

de unde

$$t_m = T + v_{02}T : (v_{01} + v_{02}) \qquad (10)$$

și

$$(x_1 - x_2)_{\min} = \frac{1}{2}T(v_{01}^2 - 2v_{02}^2) : (v_{01} + v_{02}). \qquad (11)$$

Natura extremului este dată de semnul derivatei a doua:

$$s''(t) = v_{01}/T + v_{02}/T > 0, \qquad (12)$$

deci avem un *minim*.

Rezultatul (10) se poate obține și fără derivate, observînd că $s(t)$ (8) este o funcție pătratică și se reprezintă printr-o parabolă care are un *minim* $\left(a = \frac{1}{2}v_{01}/T + \frac{1}{2}v_{02}/T > 0\right)$ pentru

$$t = \left[-\frac{b}{2a}\right] = -\frac{-v_{01} - v_{02} - v_{02}}{2\left(\frac{1}{2}v_{01}/T + \frac{1}{2}v_{02}/T\right)} = \frac{v_{01} + 2v_{02}}{v_{01} + v_{02}}T. \qquad (10)$$

Dacă $v_1 < 2\,v_{02}$ mobilele se vor încrucișa ($s = 0$) și deci $(x_1 - x_2)_{\min} = 0$.

1.2.25. $v' = v/\sqrt{2} = 10$ m/s.

1.2.26. $T = t(2 + \sqrt{2}) = 6{,}8$ s.

1.2.27. $s_{1/2} = \frac{3}{4}s_m = 300$ m.

1.2.28. $t_{1/2} = t_m(1 - 1/\sqrt{2}) = 41$ m.

1.2.29. $\langle v\rangle = v/2 = 5{,}0$ m/s.

1.2.30. $\langle v_2\rangle : \langle v_1\rangle = 1 + \sqrt{2}$.

1.2.31. $v_0 = 2\sqrt{sd : (t_2^2 - t_1^2)} = 15$ m/s.

1.2.32. $a_1 = 2s : (tt_1) = 0{,}10$ m/s^2.

1.2.33. $a_{1,2} = \pm 2(d_1 + d_2)^2 : (T^2 d_{1,2}) = 0{,}033$ m/s^2 resp. $-0{,}050$ m/s^2.

1.2.34. $d = x'(v_0^2 + v'^2) : (v_0^2 - v'^2) = 26{,}0$ m, $\langle v \rangle = (v_0 + v') : 2 = 2{,}25$ m/s, $\langle |v| \rangle = d/t' = 6{,}5$ m/s.

1.2.35. $v't = v_0(t - \tau) + \frac{1}{2}a(t - \tau)^2$ de unde $t_1 = 12$ s pentru prima întîlnire, $t_2 = v_0^2 : (-2av') = 33$ s pentru a doua întîlnire.

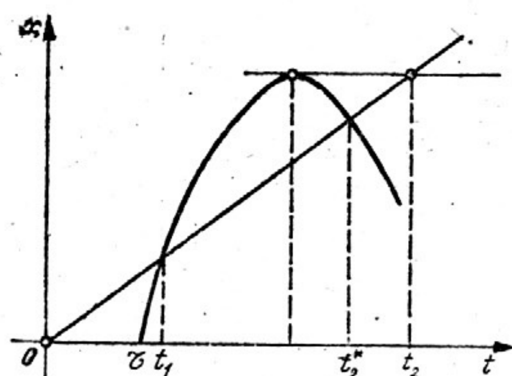


Fig. 1.2.35R

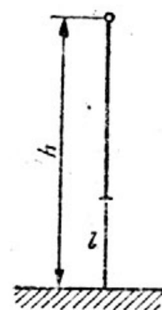


Fig. 1.2.47R

(*) **1.2.36.** Timpul total de mişcare : $t = l/v_0 + v_0/|a| = f(v_0)$ **(1)**
este funcţie de v_0. Condiţia de extremum pentru t este anularea derivatei :

$$f'(v_0) = -l/v_0^2 + 1/|a| = 0 \quad \textbf{(2)}$$

de unde

$$v_0 = \sqrt{l|a|} = 20 \text{ m/s}. \quad \textbf{(3)}$$

Natura extremului este dată de semnul derivatei a doua :

$$f''(v_0) = +2l/v_0^3 > 0, \quad \textbf{(4)}$$

deci avem un *minim*.

Problema se poate rezolva elementar fără derivate deoarece produsul celor doi termeni din expresia timpului t ste constant, suma lor este minimă cînd ei sînt egali :

$$l/v_0 = v_0/|a| \text{ etc.} \quad \textbf{(5)}$$

1.2.37. a) $v_1 = 2l_1/t_1 = 8{,}0$ m/s, b) $a_1 = 2l_1/t_1^2 = 0{,}80$ m/s², $a_2 = -2l_1^2 : (l_2 t_1^2) = -1{,}6$ m/s², c) $t = t_1(1 + l_2/l_1) = 15$ s, d) $\langle |v| \rangle = l_1/t_1 = 4{,}0$ m/s.

1.2.38. $t = \frac{1}{2}(t_1 - t_2) + l(1/t_2 - 1/t_1) : (g \sin\alpha) = 0{,}55$ s.

1.2.39. $m_2/m_1 = [g\tau^2 (\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2) \sin\alpha_1 + 2h] : [g\tau^2 (\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2) \sin\alpha_2 - 2h] = 3{,}0$.

1.2.40. $v_0 = v' : (1 - \pi/4) = 40$ m/s.

1.2.41. $s = dM : (M - m) = 3{,}3$ km.

1.2.42. a) $s = d(2 - a_1/a_2) = 4{,}2$ km, b) $s = d(2M - m) : (M - m) = 4{,}2$ km.

1.2.43. $a_1' = -\frac{v_0}{t'}\left[1 + \frac{m}{M - m}\frac{t}{t + t'}\right] = -1{,}09$ m/s².

Mişcarea sub acţiunea greutăţii

1.2.44. a) $5v_0^2 : (2g) = 12{,}5$ m, b) $3v_0^2 : (2g) = 7{,}5$ m.

1.2.45. $v' = at\sqrt{1 + g/a} = 42{,}4$ m/s.

1.2.46. $h = [\sqrt{c^2 : (2g) + ct} - c : (\sqrt{2g})]^2 = 392$ m.

1.2.47. $h = \frac{1}{2}g[l/(g\tau) + \tau/2]^2 = 30{,}6$ m.

1.2.48. $f' = 1 - \sqrt{1-f} = 0{,}20 = 20\%$.

1.2.49. $h = \frac{1}{2} g t_1 t_2 = 9{,}8$ m.

1.2.50. $s_i = (2i-1)h : n^2 = 1, 3, 5, \cdots, 19$ m.

1.2.51. $\tau = -t + \sqrt{t^2 + 2l/g} = 1{,}0$ s.

1.2.52. $h = (h' + d)^2 : (4d) = 225$ m.

1.2.53. $H = h + v_0\sqrt{2h/g} = 10{,}9$ m.

1.2.54. $\tau = \frac{2}{g} v_0 \sqrt{1-f} = 2{,}4$ m.

1.2.55. $v_0 = \frac{1}{2} g\tau(2\sqrt{2h/g} - \tau) : (\sqrt{2h/g} - \tau) = 14{,}7$ m/s.

1.2.56. $2v_{01}/g - 2v_{02}/g < \tau < 2v_{01}/g$, $2{,}0 \text{ s} < \tau < 6{,}0$ s.

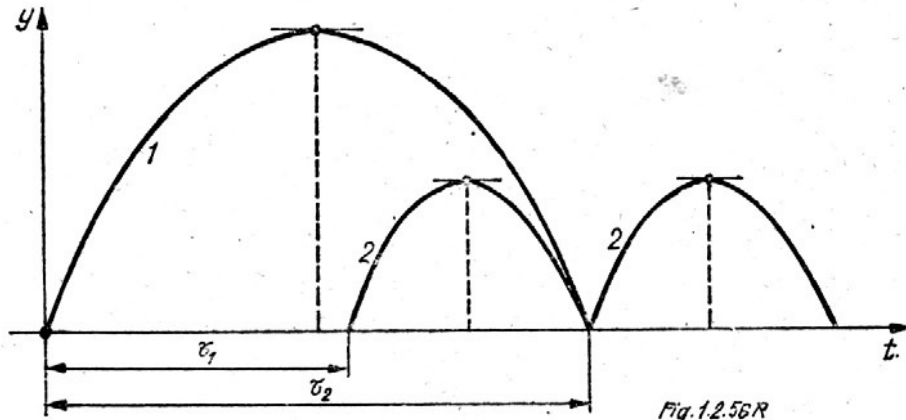


Fig. 1.2.56R

1.2.57. $v_{01}t - \frac{1}{2} gt^2 = \frac{1}{2g} v_{02}^2$, $t = \tau + v_{02}/g$, de unde $v_{02} = 6{,}95$ m/s.

1.2.58. $t = \tau[n + \sqrt{n(n-1)}] = 9{,}0$ s.

(*) **1.2.59.** Din condiţia de întîlnire :

$$v_{01} - \frac{1}{2} gt^2 = v_{02}(t - \tau) - \frac{1}{2} g(t - \tau)^2 \quad (1)$$

rezultă :

$$t = (g\tau^2/2 + v_{02}\tau) : (g\tau - v_{01} + v_{02}) = f(\tau). \quad (2)$$

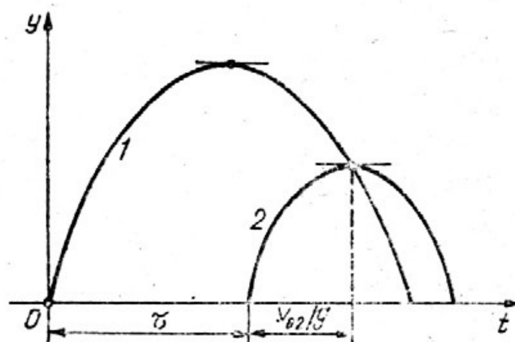


Fig. 1.2.57R

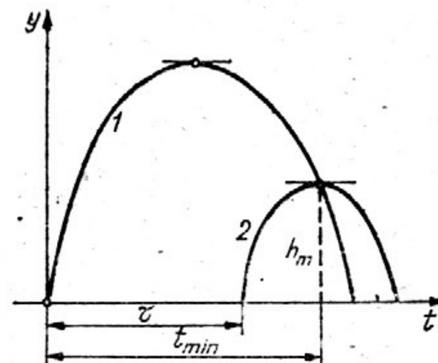


Fig. 1.2.59R

Condiţia de minim pentru t este anularea derivatei :

$$f'(\tau) = \frac{(g\tau + v_{02})(g\tau - v_{01} + v_{02}) - (g\tau^2/2 + v_{02}\tau)g}{(g\tau - v_{01} + v_{02})^2} =$$

$$= \frac{g^2\tau^2/2 - (v_{01} - v_{02})g\tau - v_{02}(v_{01} - v_{02})}{(g\tau - v_{01} + v_{02})^2} = 0$$

care dă rădăcinile:

$$\tau = \frac{1}{g}[v_{01} - v_{02} \pm \sqrt{v_{01}^2 - v_{02}^2}]. \qquad (4)$$

Dacă $v_{01} > v_{02}$ avem o soluţie reală pozitivă, deci există un minim:

$$\tau = \frac{1}{g}(v_{01} - v_{02} + \sqrt{v_{01}^2 - v_{02}^2}), \quad t_{min} = \frac{1}{g}(v_{01} + \sqrt{v_{01}^2 - v_{02}^2}) \qquad (5)$$

$$\text{şi } h_m = \frac{1}{2g}v_{02}^2,$$

adică atunci cînd al doilea corp se află la înălţimea sa maximă. Acest lucru se vede direct, fără nici un calcul din figură.

1.2.60. $R = (v_0^2 + g^2\tau^2)^{3/2} : (gv_0) = 27{,}7$ m.

1.2.61. $v = r\sqrt{g/(2h)} = 25$ m/s.

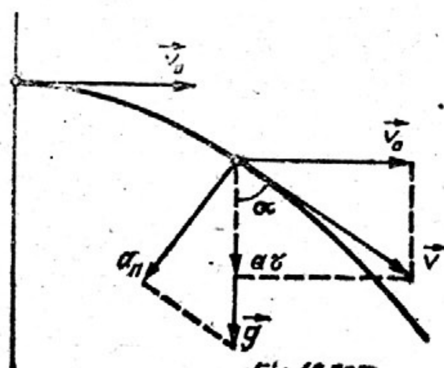


Fig.1.2.60R

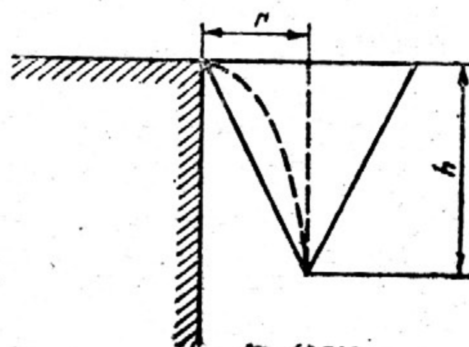


Fig.1.2.61R

(*) **1.2.62.** $v = \sqrt{v_0^2 - 2gh}, \ h = \frac{1}{2}gt^2, \ b = vt, \qquad (1)$

de unde

$$b = v\sqrt{2h/g} = \sqrt{(v_0^2 - 2gh)2h/g}. \qquad (2)$$

Transcriind pe b sub forma:

$$b = \frac{1}{g}\sqrt{(v_0^2 - 2gh)\cdot 2gh}, \qquad (3)$$

se vede imediat că sub radical suma celor doi factori variabili este *constantă*, deci *maximul* produsului lor are loc cînd ei sînt egali:

$v_0^2 - 2gh = 2gh, \ h_m = v_0^2 : (4g) = 3{,}6$ m, $b_{max} = 2h_m = v_0^2/(2g) = 7{,}2$ m. (4)

Desigur putem folosi calculul diferenţial. Bătaia b este funcţie de h. Condiţia de extremum este anularea derivatei:

$$\mathrm{b}(h) = \sqrt{2/g}\cdot\sqrt{v_0^2h - 2gh^2}, \ \mathrm{b}'(h) = \sqrt{\frac{2}{g}}\frac{v_0^2 - 4gh}{2\sqrt{v_0^2h - 2gh^2}} = 0, \qquad (5)$$

de unde $h_m = \frac{v_0^2}{4g}$, etc.

De asemenea, putem observa că în expresia lui b(h) sub radical avem o funcţie pătratică (polinom de gradul doi) care se reprezintă printr-o parabolă, care are un *maxim* ($a = -2g < 0$) pentru

$$h = \left[-\frac{b}{2a}\right] = -\frac{v_0^2}{2\cdot(-2g)} = \frac{v_0^2}{4g}.$$

1.2.63. $t = \frac{1}{g}\sqrt{v_1 v_2} = 1{,}0$ s.

1.2.64. $S = \pi\ v_0^4/g^2 = 314\ \text{m}^2$.

1.2.65. $v_0 = \sqrt{g(b^2 + h^2)/(2h)} = 15{,}6$ m/s.

1.2.66. $h_{max} = h\ \cos^2\alpha + (v^2{}_0/(2g))\ \sin^2\alpha = 4{,}5$ m.

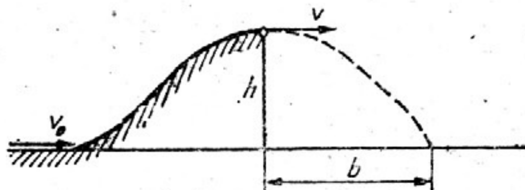


Fig. 1.2.62R

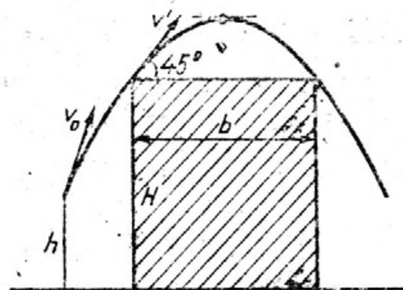


Fig. 1.2.67R

1.2.67. $v_0 = \sqrt{g(b + 2H - 2h)} = 9{,}8$ m/s, $\cos\alpha_0 = v'/(v_0\sqrt{2}) = 0{,}226$
$\alpha_0 = 76°57'$ $d = \frac{1}{2g}v'(\sqrt{2}v_0\ \sin\alpha_0 - v') = 0{,}59$ m.

1.2.68. $h_1 = \frac{1}{2g}v_0^2\ \sin^2\alpha < h_2 = v_0^2 : (2g)$.

1.2.69. $b = \frac{m}{F}v_0^2\ \sin\alpha = 1{,}00$ m.

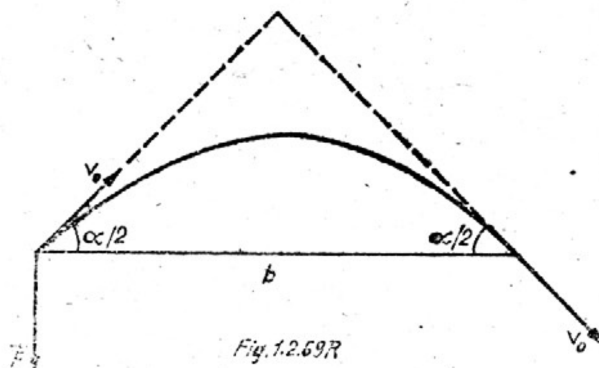


Fig. 1.2.69R

(**) 1.2.70. Prin identificare cu ecuaţia traiectoriei în cazul analog gravitaţional ($a = |a_y|$):

$$y = x\text{tg}\alpha_0 - \frac{1}{2}ax^2 : (v_0^2\ \cos^2\alpha_0), \tag{1}$$

rezultă:

$$k = \text{tg}\alpha_0,\ \ b = a : (2v_0^2 \cos^2\alpha_0) = a(1 + \text{tg}^2\alpha_0)/(2v_0^2) = a(1 + k^2)/(2v_0^2), \tag{2}$$

de unde

$$v_0 = a\sqrt{(1+k^2)/(2b)} = \sqrt{|a_y|(1+k^2)/(2b)} = 5{,}0\ \text{m/s}. \tag{3}$$

Dar putem folosi o metodă mult mai puternică şi mai generală cu ajutorul calculului diferenţial şi integral:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt},\ dv_x = a_x dt;\ \ a_y = \frac{dv_y}{dt},\ dv_y = a_y\,dt, \tag{4}$$

ceea ce dă în cazul nostru:

$$dv_x = 0,\ \ \text{deci}\ \ v_x = \text{const} = v_{0x},\ v_y - v_{0y} = \int_0^t a_y dt = a_y t. \tag{5}$$

Dar

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \; dx = v_x dt, \; v_y = \frac{dy}{dt}, \; dy = v_y dt, \tag{6}$$

ceea ce în cazul nostru dă, considerînd că la momentul $t = 0$ avem $x_0 = 0$, $y_0 = 0$:

$$x = \int dx = \int v_x dt = \int_0^t v_{0x} dt = v_{0x} t,$$

$$y = \int v_y dt = \int_0 (v_{0y} + a_y t) dt = v_{0y} t + \frac{1}{2} a_y t^2. \tag{7}$$

Prin eliminarea lui t găsim ecuaţia traiectoriei:

$$y = x v_{0y}/v_{0x} + \frac{1}{2} a_y x^2/v_{0x}^2 \tag{8}$$

şi mai departe prin identificare, ca mai sus.
Dar pe de altă parte,

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} : \frac{dx}{dt} = \frac{v_y}{v_x}, \; v_y = y'(x) v_x, \; v^2 = v_x^2 + v_y^2 = v_x^2(1 + y'^2). \tag{9}$$

Mai derivăm o dată:

$$y''(x) = \frac{d}{dx} y'(x) = \frac{\frac{d}{dt} y'(x)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{d}{dt}(v_y/v_x)}{v_x} = \frac{\dot{v}_y/v_x - v_y \dot{v}_x/v_x^2}{v_x} =$$

$$= \frac{a_y}{v_x^2} - \frac{a_x v_y}{v_x^3} = \frac{a_y}{v_x^2} - \frac{a_x y'(x)}{v_x^2}, \quad v_x^2 = \frac{a_y - a_x y'(x)}{y''}, \tag{10}$$

deci

$$v^2 = v_x^2(1 + y'^2) = \frac{1}{y''}(a_y - a_x y')(1 + y'^2). \tag{11}$$

În cazul nostru:

$$y'(x) = k - 2bx, \; y'' = -2b, \; a_x \equiv 0, \tag{12}$$

deci

$$v^2 = -\frac{1}{2b} a_y [1 + (k - 2bx)^2], \tag{13}$$

deci în origine ($x = 0$):

$$v_0^2 = -\frac{1}{2b} a_y (1 + k^2) = \frac{1}{2b} |a_y| (1 + k^2). \tag{14}$$

(*)1.2.71. a) Problema se poate rezolva elementar cu ajutorul noţiunii de „parabolă de siguranţă" astfel: Să aruncăm bile cu aceeaşi viteză iniţială v_0 sub diferite unghiuri α. Un punct (x,y) va fi atins de traiectorie dacă coordonatele sale verifică ecuaţia traiectoriei:

$$y = x\operatorname{tg}\alpha - gx^2 : (2v_0^2\cos^2\alpha) = x\operatorname{tg}\alpha - gx^2(1 + \operatorname{tg}^2\alpha)/(2v_0^2) =$$

$$= xm - gx^2(1 + m^2)/(2v_0^2), \quad m = \operatorname{tg}\alpha. \tag{1}$$

Această ecuaţie are soluţii reale pentru $m = \text{tg}\alpha$ dacă discriminantul ei nu este negativ:

$$D = x^2 - (2gx^2/v_0^2)[y + gx^2/(2v_0^2)] \geqslant 0. \quad (2)$$

Pentru $D > 0$ punctul considerat (x, y) este atins de două traiectorii (parabole), pentru $D < 0$ punctul este inaccesibil, iar punctele corespunzătoare lui $D = 0$ sînt atinse de o singură parabolă, aceste puncte sînt situate pe curba

$$D = 0 \text{ sau } y = v_0^2/(2g) - gx^2/(2v_0^2) \quad (3)$$

numită *„parabola de siguranţă"*, ea înfăşoară toate parabolele (traiectoriile) posibile pentru diferite unghiuri α şi aceeaşi viteză iniţială v_0. Punctele exterioare parabolei de siguranţă sînt inaccesibile. Intersectînd parabola de siguranţă cu $y = -h$ obţinem b_{max}:

$$-h = v_0^2/(2g) - gx^2/(2v_0^2), \text{ de unde}$$

$$b_{max} = x_{max} = \frac{1}{g} v_0 \sqrt{v_0^2 + 2gh} = 13{,}86 \text{ m}. \quad (4)$$

Introducînd în (1) găsim (ştiind că $D = 0$):

$$m_0 = \text{tg}\alpha_0 = x_{max} : [2gx_{max}^2/(2v_0^2)] = v_0 : \sqrt{v_0^2 + 2gh} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \ \alpha_0 = 35°16' \quad (5)$$

şi

$$t_m = x_{max} : (v_0 \cos\alpha_0) = \frac{1}{v_0} x_{max} \sqrt{1 + \text{tg}^2\alpha_0} = \frac{1}{g}\sqrt{2(v_0^2 + gh)} = 1{,}73 \text{ s}. \quad (6)$$

b) Ecuaţia parabolei de siguranţă se poate obţine şi cu ajutorul calculului diferenţial ştiind că ea este înfăşurătoarea tuturor parabolelor (1) pentru diferite valori ale parametrului m. Fie ecuaţia acestor curbe ale familiei:

$$\text{F}(x, y, m) \quad - y - xm + gx^2(1 + m^2)/(2v_0^2) = 0. \quad (7)$$

Două curbe infinit vecine se intersectează într-un punct care la limită este punctul de tangenţă cu înfăşurătoarea:

$$\text{F}(x, y, m) = 0, \ \text{F}(x, y, m + \Delta m) = 0 \text{ cu } \Delta m \to 0. \quad (8)$$

În locul celei de-a doua ecuaţii din sistemul (4) putem scrie diferenţa ecuaţiilor:

$$\text{F}(x, y, m + \Delta m) - \text{F}(x, y, m) = 0.$$

Împărţind la Δm şi trecînd la limită găsim, prin definiţie, derivata (parţială): $\frac{\partial \text{F}(x, y, m)}{\partial m} = 0$. Prin urmare avem sistemul:

$$\text{F}(x, y, m) = 0 \text{ şi } \frac{\partial \text{F}(x, y, m)}{\partial m} = 0. \quad (9)$$

Eliminînd parametrul m din aceste două ecuaţii găsim ecuaţia *înfăşurătoarei* familiei de curbe $\text{F}(x, y, m) = 0$.

În cazul nostru, derivînd (7):

$$\frac{\partial \text{F}(x, y, m)}{\partial m} = - x + gx^2 m/v_0^2 = 0, \ m = \frac{v_0^2}{gx}, \quad (10)$$

care introdus în (7) ne dă ecuaţia parabolei de siguranţă (3).

c) O a treia cale de rezolvare este următoarea. Punem condiţia ca traiectoria (1) să treacă prin punctul $(b, -h)$ şi obţinem:

$$\text{F}(b, m) = - h - bm + gb^2(1 + m^2)/(2v_0^2) = 0. \quad (11)$$

Din această ecuaţie putem afla, în principiu, bătaia b ca funcţie de $m = \mathrm{tg}\alpha$, adică $b = \mathrm{f}(m)$. Condiţia de extremum pentru b este anularea derivatei $\mathrm{f}'(m)$. Această derivată se poate calcula prin derivarea funcţiei de mai sus $\mathrm{F}(b, m)$ în raport cu m în care însă $b = \mathrm{f}(m)$, deci trebuie să cunoaştem derivarea parţială şi derivarea funcţiei de funcţie:

$$\frac{\partial F}{\partial m} + \frac{\partial F}{\partial b}\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}m} = 0, \text{ de unde } \frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}m} = -\frac{\partial f}{\partial m} : \frac{\partial F}{\partial m}. \tag{12}$$

Prin urmare, condiţia de extremum $\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}m} = 0$ devine

$$\frac{\partial \mathrm{F}(b, m)}{\partial m} = 0, \text{ adică } -b + gb^2 \cdot 2m/(2v_0^2) = 0, \text{ de unde}$$

$$m_0 = \mathrm{tg}\alpha_0 = v_0^2/(gb) \tag{13}$$

şi ecuaţia traiectoriei devine:

$$-h - b \cdot v_0^2/(gb) + \frac{1}{2v_0^2} gb^2[1 + v_0^4/(g^2b^2)] = 0, \tag{14}$$

de unde

$$b_{\max} = \frac{1}{g} v_0 \sqrt{v_0^2 + 2gh} = 13{,}86 \text{ m} \tag{15}$$

şi deci din (13):

$$m_0 = \mathrm{tg}\alpha_0 = v_0^2/(gb_{\max}) = v_0 : \sqrt{v_0^2 + 2gh} = 1/\sqrt{2}. \tag{16}$$

1.2.72. $t = \frac{1}{g} v_0 \cos\alpha_0(\mathrm{tg}\alpha_0 - \mathrm{tg}\alpha) = 0{,}60$ s, $y = \frac{1}{2g} v_0^2 \cos^2\alpha_0(\mathrm{tg}^2\alpha_0 - \mathrm{tg}^2\alpha) = 6{,}5$ m.

1.2.73. $d = 2v_0 t \sin(\alpha_2 - \alpha_1)/2 = 5{,}17$ m.

1.2.74. $\mathrm{tg}\alpha = \frac{1}{gd} \pm \sqrt{v_0^4/(g^2d^2) - (2v_0^2 \mathrm{tg}\beta)/(gd) - 1} = 2 \pm 1{,}6,$

$\alpha = 74°29'$ sau $21°48'$; $v_0 \geqslant \sqrt{(gd/\cos\beta)(\sin\beta + 1)} = 209$ m/s.

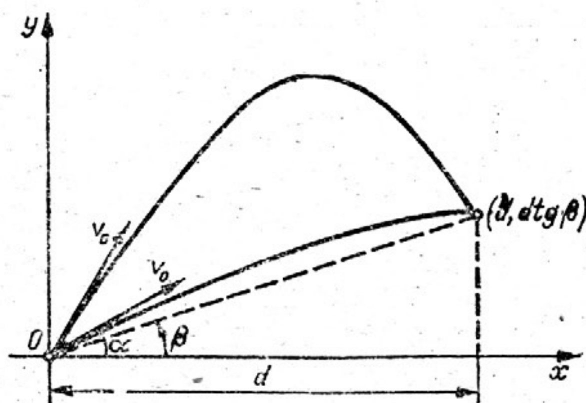


Fig. 1.2.74R

(**)**1.2.75.** a) Teorema variaţiei impulsului sub forma $\vec{F}_m \Delta t = m\Delta\vec{v}$ proiectată pe axa verticală Oy şi luată de la momentul lansării $t = 0$ pînă la momentul cînd corpul atinge înălţimea maximă $t = t_u$ şi apoi de la acest moment pînă la momentul revenirii pe Pămînt $t = t_u + t_c$ ne dă

$$\overline{(-mg - kv_y)}^{(0,t_u)} \cdot t_u = -mv_0 \text{ sau } (-mg - k\overline{v_y}^{(0,t_u)})t_u = -mv_0 \quad (1)$$

sau

$$-mgt_u - k\overline{v_y}^{(0,t_u)} \cdot t_u = -mv_0 \qquad (2)$$

dar $$\overline{v_y}^{(0,t_u)} \cdot t_u = h_m \text{ — înălţimea maximă}, \qquad (3)$$

deci

$$-mgt_u - kh_m = -mv_0. \qquad (4)$$

La fel pentru coborîre:

$$(-mg - k\overline{v_y}^{(t_u,t_c)}) \cdot t_c = -mv', \text{ dar } \overline{v_y}^{(t_u,t_c)} \cdot t_c = -h_m,$$

deci

$$-mgt_c + kh_m = -mv'. \qquad (5)$$

Prin adunarea celor două ecuaţii (4) şi (5) rezultă:

$$t = t_u + t_c = \frac{1}{g}(v_0 + v') = 2{,}0 \text{ s}. \qquad (6)$$

Mai general, cu ajutorul calculului diferenţial şi integral:

$$\int_1^{t_2} \vec{F}\, dt = m\Delta\vec{v} = m(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) \qquad (7)$$

proiectat pe axa Oy dă:

$$\int_0^{t_u}(-mg - kv_y)dt = -mv_0, \text{ dar } \int_0^{t_u} v_y dt = h_m, \qquad (8)$$

deci

$$-mgt_u - kh_m = -mv_0. \qquad (4)$$

La fel:

$$\int_{t_u}^{t_u+t_c}(-mg - kv_y)dt = -mv', \text{ dar } \int_{t_u}^{t_u+t_c} v_y dt = -h_m, \qquad (9)$$

deci

$$-mgt_c + kh_m = -mv', \qquad (5)$$

de unde rezultă ca mai sus timpul total cerut.

b) Teorema variaţiei energiei mecanice:

$$\Delta E = \Delta E_c + \Delta E_p = L_{\text{necons.}} \qquad (10)$$

ne dă pentru întregul proces de mişcare ($\Delta E_p = 0$):

$$\frac{1}{2}mv'^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = L_{\text{necons.}} = -\bar{P}_f \cdot (t_u + t_c), \qquad (11)$$

de unde

$$\bar{P}_f = \left(\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}mv'^2\right) : \left[\frac{1}{g}(v_0 + v')\right] = \frac{1}{2}mg(v_0 - v') = 9{,}8\text{W}. \qquad (12)$$

(*)**1.2.76.** Vom folosi rezultatele problemei **1.2.71.** Intersectăm parabola de siguranţă

$$y = v_0^2/(2g) - gx^2/(2v_0^2) \qquad (1)$$

cu „podeaua" $y = -h$ şi obţinem:

$$x_{max} = \frac{1}{g}v_0\sqrt{v_0^2 + 2gh} = 22 \text{ m} \qquad (2)$$

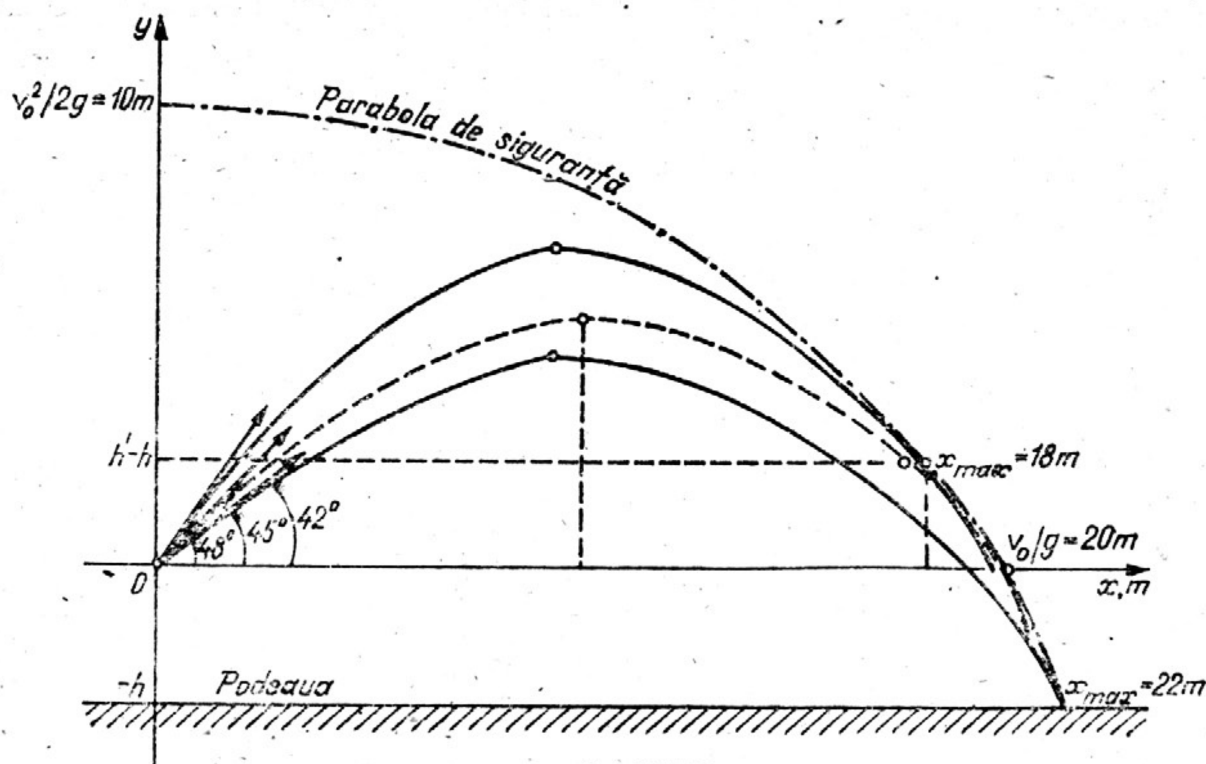


Fig. 1.2.76R

şi din ecuaţia traiectoriei $-h = xm - gx^2(1 + m^2)/(2v_0^2)$, ştiind că **$D = 0$, rezultă :**

$$m_0 = \mathrm{tg}\,\alpha_0 = 1 : \sqrt{1 + 2gh/v_0^2} = \frac{1}{1{,}1}, \quad \alpha_0 = 42°. \tag{3}$$

Reamintim că bătaia maximă *la nivelul punctului de lansare* se obţine pentru $\alpha = 45°$.

Analog în cazul coşului $y = h' - h$:

$$x_{max} = \frac{1}{g} v_0 \sqrt{v_0^2 - 2g(h' - h)} = 18 \text{ m}, \tag{4}$$

$$m_0 = \mathrm{tg}\,\alpha_0 = 1 : \sqrt{1 - 2g(h' - h)/v_0^2} = \frac{1}{0{,}90}, \quad \alpha_0 = 48°. \tag{5}$$

Să vedem acum dacă există restricţie din partea tavanului.

$$\sin^2\alpha = 1 : (1 + \mathrm{ctg}^2\alpha) = 1 : (2 + 2gh/v_0^2) = \frac{1}{2{,}21}, \text{ resp. } \frac{1}{1{,}81}. \tag{6}$$

$$h_{max} = \frac{1}{2g} v_0^2 \sin^2\alpha = 4{,}5 \text{ m, resp. } 5{,}5 \text{ m}, \tag{7}$$

deci înălţimea necesară a sălii de sport :

$$H_{nec} = h + h_{max} = 6{,}6 \text{ m, resp. } 7{,}6 \text{ m}. \tag{8}$$

În cazul sălii $H = 4{,}6 \text{ m} < H_{nec}$ trebuie să reluăm problema :

$$\frac{1}{2g} v_0^2 \sin^2\alpha' = H - h, \quad \alpha' = 30° \tag{9}$$

şi din ecuaţia traiectoriei

$$-h = x\,\mathrm{tg}\,\alpha' - gx^2 : (2v_0^2 \cos^2\alpha'), \text{ (respectiv } = h' - h) \tag{10}$$

obţinem

$$x_{max} = 20{,}4, \text{ (resp. } 12{,}9 \text{ m)}.$$

În cazul sălii $H = 7{,}0$ m, pentru aruncarea în coș ecuația (9) dă $\alpha' = 44°26'$ și (10) dă $x_{max} = 17{,}6$ m.

1.2.77. $b = \frac{1}{g} v_0^2(1 - f^2) = 1{,}53$ m.

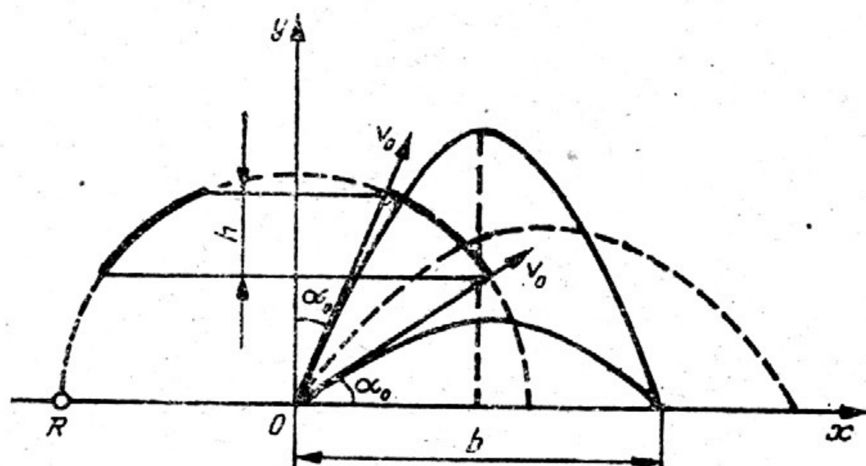


Fig. 1.2.77R

1.2.78. $\text{tg}\alpha = \frac{H}{d}$, $\alpha = 30°$, $v_0 \geqslant \sqrt{g(H^2 + d^2)/(2H)} = 18{,}4$ m/s.

1.2.79. $x \approx h\sqrt{2h/g} \cdot \omega\cos\varphi = 0{,}71$ m. Calculul mai riguros dă un coeficient 2/3.

Forțe de frecare

1.2.80. Da: o ladă așezată liber pe platforma unui vagon care accelerează.

1.2.81. $T = F_1 + (F_2 - F_1)x/l$.

1.2.82. $F_{max} = T_r(m_1 + m_2)/m_2 = 200$ N.

1.2.83. $a_r = \mu g M : (M - m) = 0{,}056$ m/s².

1.2.84. $v' = \frac{1}{n} v_0(n - f) : (1 - f) = 100$ km/h.

1.2.85. $T_2 = F - T_1 = 70$ N.

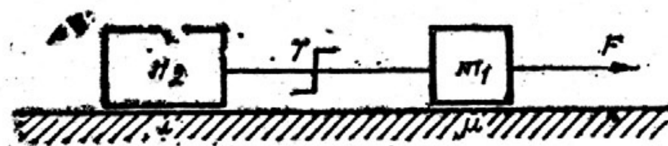


Fig. 1.2.85R

1.2.86. $F_c = \mu mg(1 + m/M) = 49$ N.

1.2.87. $a_1/a_2 = [F\cos\alpha - \mu(mg - F\sin\alpha)] : [F\cos\alpha - \mu(mg + F\sin\alpha)] = 1{,}65$.

1.2.88. $F = [ma\cos\varphi + mg\sin(\alpha + \varphi)] : \cos(\beta - \varphi)$, rezultă $\varphi = \beta = 15°$.

1.2.89. $F = g(m + M)(\mu_1 + \mu_2)\cos\varphi_1 : \cos(\alpha - \varphi_1)$ este minim pentru $\alpha = \varphi_1$,

$$F_{min} = g(m + M)(\varphi_1 + \varphi_2) : \cos\varphi_2 = 138{,}5 \text{ N}.$$

1.2.90. $t = \sqrt{2l : (a - \mu g)} = 2{,}0$ s.

1.2.91. a) $F = mg(1 + m/M) = 5{,}39$ N.
b) $t = \sqrt{2l : (F/m - \mu g - \mu g m/M)} = 0{,}52$ s.

1.2.92. Se rupe firul legat de corpul tras: a) $F = T_r + \mu_3 mg = 5{,}0$ N (static), b) $F = \frac{3}{2} T_r + \frac{mg}{2}(2\mu_1 - \mu_2 - \mu_3) = 7{,}5$ N, ($a = 0{,}53$ m/s²).

1.2.93. $k' = k : (2 - k) = 3{,}0$, $(k < 2)$.

1.2.94. $T_1 = mg = 9{,}8$ N, $F_{f1} = \mu m_1 g = 6{,}86$ N, $T_2 = T_1 - \mu m_1 g = 3{,}0$ N $= F_{f2}$.

1.2.95. $a = g(m/M - \mu) = 2{,}0$ m/s².

1.2.96. $t_0 = \mu \frac{g}{c}(m_1 + m_2) = 5{,}0$ s, $t = \frac{g}{c}(nm_2 + \mu m_1) = 10{,}0$ s.

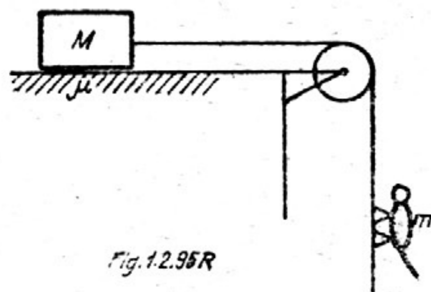


Fig. 1.2.95R

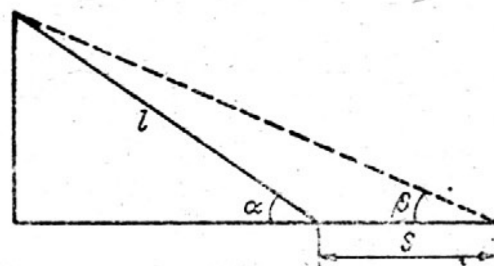


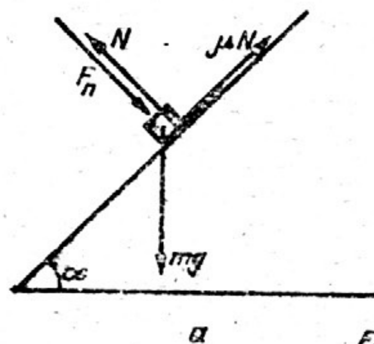
Fig. 1.2.98R

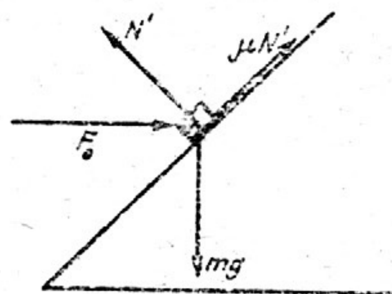
1.2.97. $v_0 = [2lg(\mu_1 + \mu_2)(m_1 + m_2)/m_2]^{1/2} = 5{,}0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

1.2.98. $\varphi = \beta = 6{,}0°$.

1.2.99. $\mu = \frac{n-1}{n+1} \text{tg}\,\alpha = 0{,}33$.

1.2.100. $\mu = \frac{\cos\alpha}{n - \sin\alpha} = 0{,}43$.





a   Fig. 1.2.100R   b

1.2.101. $\mu = \text{tg}\frac{\alpha}{2} = 0{,}27$.

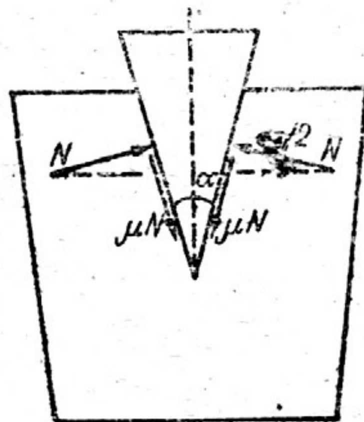
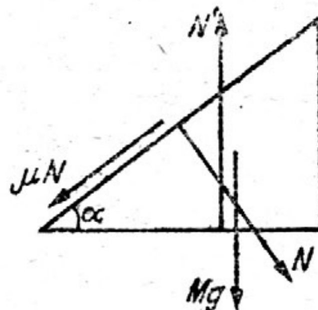
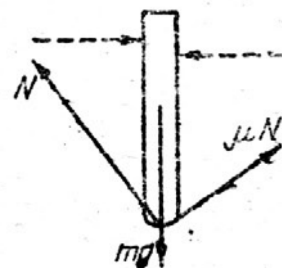


Fig. 1.2.101R





a   Fig. 1.2.106R   b

1.2.102. $a = \frac{F}{m}\left(\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1 \frac{mg - F\sin\alpha_2}{mg - F\sin\alpha_1}\right) = 0{,}82 \text{ m/s}^2.$

1.2.103. $a = F\cos(\alpha - \varphi) : (m\cos\varphi) - g\text{tg}\varphi = \max$ pentru $\alpha = \varphi = 18°$.

1.2.104. $l_2/l_1 = \cos\alpha + \mu\sin\alpha = 1{,}00.$

1.2.105. $s = \frac{1}{2g} v_0^2 \cos\varphi : \sin(\alpha + \varphi) = \min$ dacă $\alpha = 90° - \varphi = 60°$.

1.2.106. $\mu = \text{tg}\alpha = 0{,}27, \quad N = mg\cos\alpha = 4{,}73 \text{ N}.$

1.2.107. $\mu = \text{tg}\alpha[(1+f)^2 - 1] : [(1+f)^2 + 1] = 0{,}38, \quad v_0/v' = 1 + f = 1{,}50; \; -a_u/a_c = (1+f)^2 = 2{,}25.$

1.2.108. $g\text{tg}(\alpha - \varphi) = 2{,}6 \text{ m/s}^2 < a < g\text{tg}(\alpha + \varphi) = 9{,}8 \text{ m/s}^2.$

1.2.109. $F_{min} = mg\text{tg}(\alpha + \varphi) : [\sin\alpha\text{tg}(\alpha + \varphi) + \cos\alpha - m/(m+M)] = 113{,}2 \text{ N},$

$$F_{max} = Mg \text{ ctg } \alpha : (1 - \cos\alpha) = 731{,}5 \text{ N}.$$

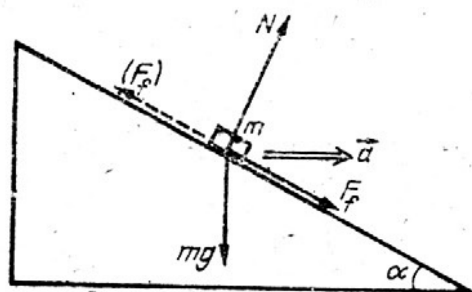
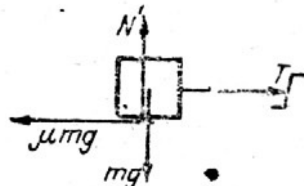
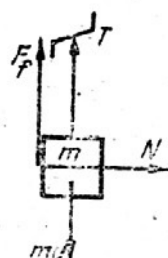


Fig.1.2.108R



a



b

Fig.1.2.111R

1.2.110. $F = \mu(m + M)g : (1 + M/m - \cos\alpha) = 9{,}8 \text{ N}.$

1.2.111. $a_{min} = g(1 - \mu) : (1 + \mu) = 0{,}25\, g,\; a_{max} = g(1 + \mu) : (1 - \mu) = 4{,}0 \; g.$

1.2.112. $s = \frac{1}{2g} v_0^2\, 2m(m + M) : (m + \mu M)^2 = 2{,}18 \text{ m}.$

1.2.113. $1 - 4\mu = 0{,}20 \leqslant m_1/m_2 \leqslant 1 + 4\mu = 1{,}80.$

1.2.114. $\mu = \text{tg}\alpha \sin\frac{\beta}{2} = 0{,}29.$

1.2.115. Cu frînă de motor: $g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) < a < g\sin\alpha$, $0{,}49 \text{ m/s}^2 < a < 0{,}98 \text{ m/s}^2$; cu forță de tracțiune: $g\sin\alpha < a < g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$, $0{,}98 \text{ m/s}^2 < a < 1{,}47 \text{ m/s}^2$.

1.2.116. $t_{min} = 2\sqrt{\frac{l}{g}} : \sqrt{\mu^2\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} = 17{,}7 \text{ s}.$

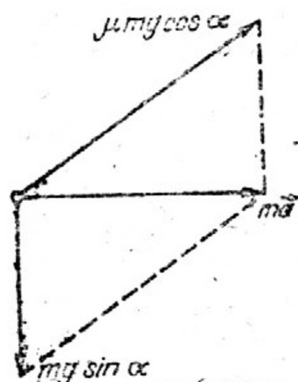


Fig. 1.2.116R

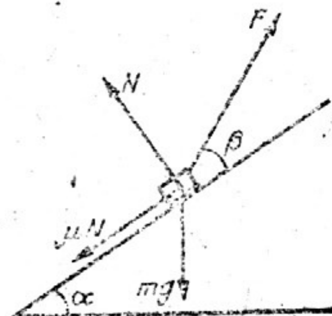


Fig.1.2.117R

1.2.117. $F = m[a\ \cos\varphi + g \sin(\alpha + \varphi)] : \cos(\beta - \varphi) = \min$ pentru $\beta = \varphi = 15°$;

$$F_{\min} = ma\ \cos\varphi + mg \sin(\alpha + \varphi) \text{ şi } N \geqslant 0 \text{ implică}$$

$$a \leqslant g \cos(\alpha + \varphi) : \sin\varphi = 26{,}8\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

altfel ($N = 0$) şi $\mathrm{tg}\beta = g\ \cos\alpha : (g\ \sin\alpha + a)$, $\beta = 13°\ 38' < \varphi$.

1.2.118. $v_0' = v_0\sqrt{\sin(\alpha' - \varphi) : \sin(\alpha - \varphi)} = 100$ km/h.

1.2.119. $a = g(1 + m/M)\sin(\alpha \pm \varphi) : \cos\varphi = 4{,}5$ m/s² în jos (scîndura lunecă în sus), resp. $-1{,}43$ m/s² în sus (scîndura lunecă în jos).

1.2.120. $a = g\ \sin\alpha - g\mathrm{tg}\theta\ \cos\alpha$, $\mathrm{tg}\theta = \mu$, $\theta = \varphi = 5{,}0°$ (înainte),

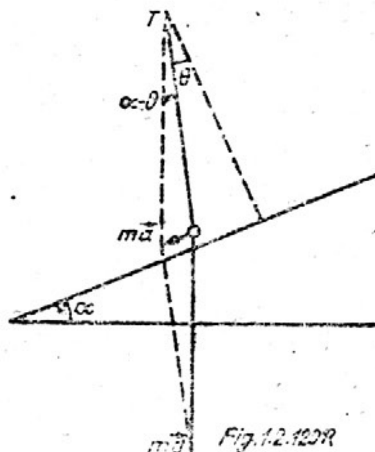


Fig.1.2.120R

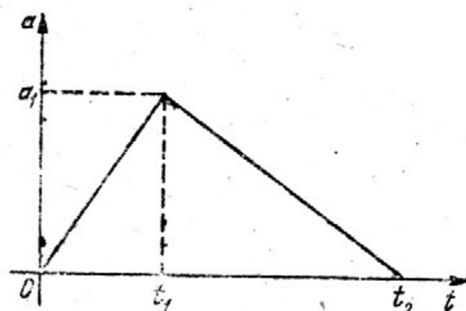


Fig.1.2.123R

1.2.121. $h = \frac{1}{2g}v_0^2 : (1 - \mu\mathrm{ctg}\ \alpha) \approx \frac{1}{2g}v_0^2\alpha : (\alpha - \varphi) = 40$ m, după aceasta camionul va luneca în jos.

1.2.122. $t = \sqrt{2l : (g \sin\alpha)} = 0{,}60$ s şi scîndura va sta în repaus.

1.2.123. $a = ct \cos\alpha : (m + M)$ pentru

$$t \leqslant t_1 = \frac{1}{c}\ \mu mg\ (m + M) : [\mu m\ \sin\alpha + M(\cos\alpha + \mu \sin\alpha)] = 3{,}27 \text{ s},$$

$$a \leqslant a_1 = \frac{1}{M}\mu mg[M \cos\alpha] : [\mu m \sin\alpha + M(\cos\alpha + \mu\ \sin\alpha)] = 0{,}707 \text{ m/s}^2,$$

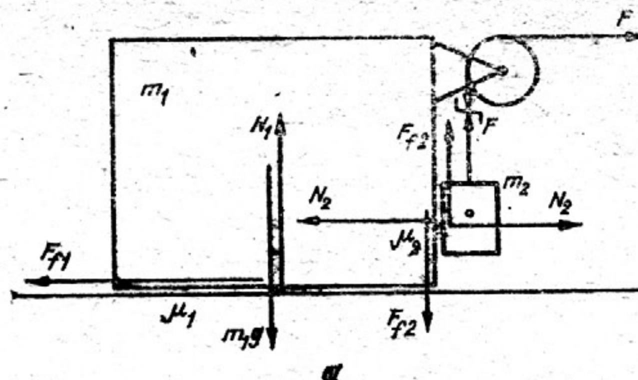
$$\text{apoi } a = \frac{\mu}{M}(mg - ct\sin\alpha) \text{ pînă la } t_2 = \frac{mg}{c}/\sin\alpha = 19{,}8 \text{ s cînd } a = 0.$$

1.2.124. a) $a_1 = 0$, $F_{f2} = 0$ dacă $F < \mu_1 m_1 g : (1 - \mu_1) = 4{,}9$ N $= F_1$.
b) $F > F_1$, $a_{2v} \lesseqgtr 0$, $a_1 = [(1 - \mu_1)F - \mu_1 m_1 g] : [m_1 + m_2(1 \pm \mu_1\mu_2)]$.
c) $a_{2v} = 0$, F_{f2} statică, $a_1 = [F - \mu_1\ (m_1 + m_2)g] : (m_1 + m_2)$;
$F_{2,3} = [m_2(m_1 + m_2)(1 \pm \mu_1\mu_2)g] : [m_1 + m_2(1 \pm \mu_2)] = 9{,}34$ N, resp. $10{,}4$ N;
$a_{1(2,3)} = g[m_2 - \mu_1(m_1 + m_2)] : [m_1 + m_2(1 \pm \mu_2)] = 1{,}15$ m/s², resp. $1{,}51$ m/s².

1.2.125. $F = m_1 m_2\ (2g - w) : (m_1 + m_2) = 11{,}76$ N, $T = 2F$, $a_1 = [(m_1 - m_2)\ g + m_2 w] : (m_1 + m_2) = 5{,}88$ m/s², $a_2 = [(m_2 - m_1)g + m_1 w] : (m_1 + m_2) = 3{,}92$ m/s².

1.2.126. $v' = \sqrt{(n^2 - 1)v_0^2 + n^2v^2} = 3{,}20$ m/s.

1.2.127. $\mu = \dfrac{kl_0(\mathrm{tg}\alpha - \sin\alpha)}{mg - kl_0(1 - \cos\alpha)} = 0{,}20.$



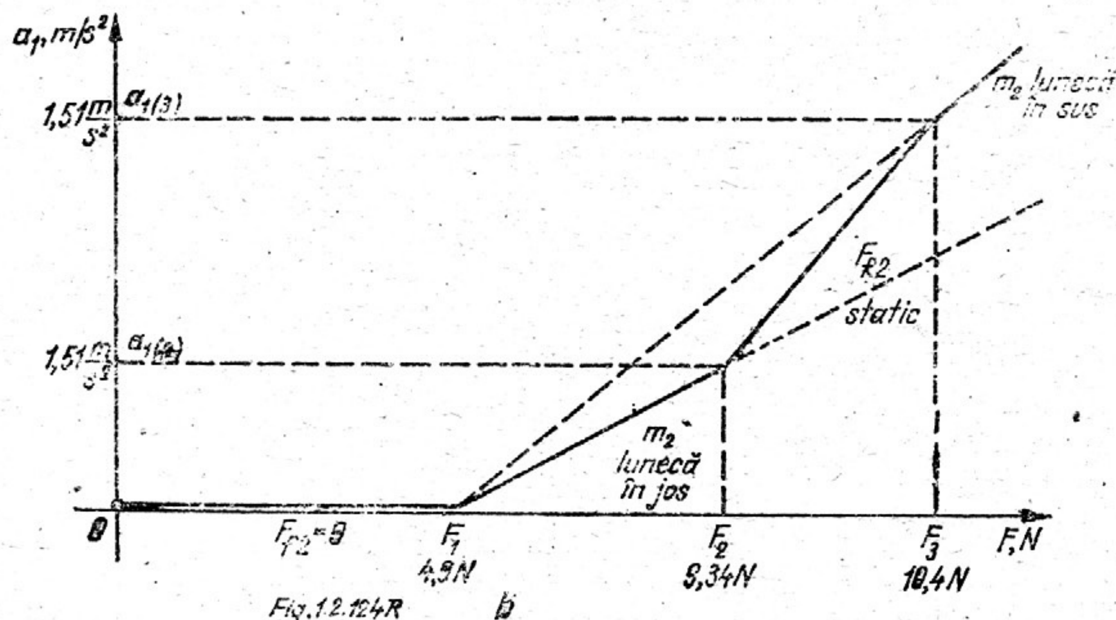


Fig.1.2.124R b

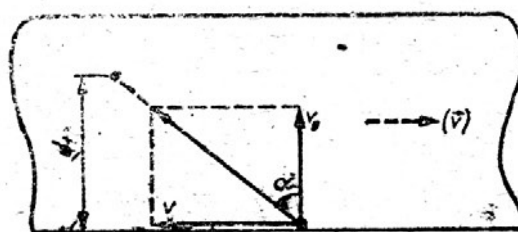


Fig.1.2.126R

** **1.2.128.** $v = \dfrac{dx}{dt}$, $dx = v dt$, $\Delta x = \int dx = \int_0^{t_0} v dt = S$, (1)

unde S este *aria* mărginită de curba $v(t)$. Știind că aria unei elipse este $\pi\, ab$, unde a, b sînt semiaxele, avem

$$\Delta x = v_0 t_0 - \frac{1}{2}\pi\frac{1}{2}t_0 \cdot v_0. \quad (2)$$

Dar
$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{t_0},$$

deci
$$v_0 = \bar{v} : (1 - \pi/4) = 40 \text{ m/s}. \quad (3)$$

* **1.2.129.** $v_1 = \dfrac{dx_1}{dt} = A + 2Bt$, $v_2 = \dfrac{dx_2}{dt} = C + 2Dt + 3Et^2$, (1)

$$v_r = v_1 - v_2 = A - C + 2(B - D)t - 3Et^2. \quad (2)$$

$$* \ \mathbf{1.2.130.} \quad v = \frac{dx}{dt} = 4At^3 - 2Bt \tag{1}$$

este o funcţie impară $v(-t) = -v(t)$, deci are originea, centru de simetrie. Condiţia de extremum pentru $v(t)$ este anularea derivatei :

$$v'(t) = \frac{dv}{dt} = 12\,At^2 - 2B = 0, \quad t = \pm\sqrt{B/(6A)}. \tag{2}$$

Între rădăcinile (2) semnul derivatei este negativ, deci prima rădăcină corespunde unui maxim al vitezei, iar a doua unui minim. Ne interesează de fapt $t \geqslant 0$. Natura extremelor rezultă şi din semnul derivatei a doua :

$$v''(t) = 24\ At, \quad v''(t_{1,2}) = 24\,At_{1,2} \lessgtr 0. \tag{3}$$

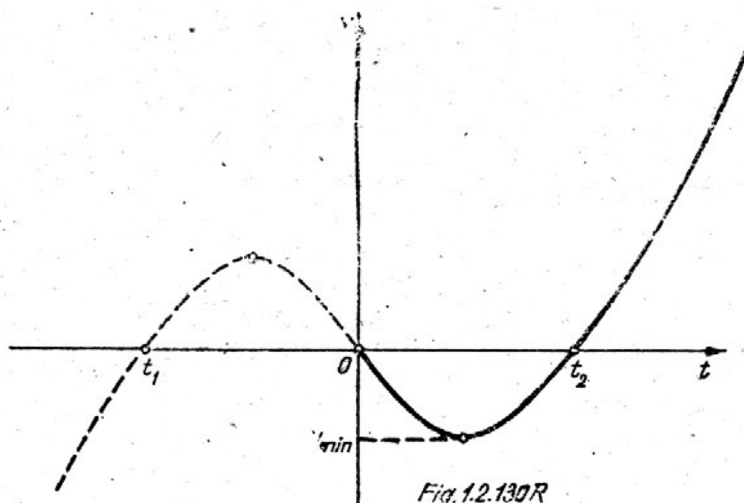


Fig. 1.2.130R

$*$ **1.2.131.** Conform definiţiei :

$$\bar{v} = \frac{s}{\tau} = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau v\mathrm{d}t = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau (At + Bt^2)\mathrm{d}t = \frac{1}{\tau}\left(\frac{1}{2}A\tau^2 + \frac{1}{3}B\tau^3\right) =$$

$$= \frac{1}{2}A\tau + \frac{1}{3}B\tau^2.$$

$$* \ \mathbf{1.2.132.} \quad v = \frac{dx}{dt} = \dot{x} = x'(t) = -b\frac{1}{t^2}, \tag{1}$$

$$a = \frac{dv}{dx} = \dot{v} = v'(t) = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} = x''(t) = 2b\frac{1}{t^3}. \tag{2}$$

$$** \ \mathbf{1.2.133.} \quad a = \frac{dv}{dt},\ dv = a\mathrm{d}t,\ \int dv = v = \int a\mathrm{d}t = \int At^2\mathrm{d}t = \frac{1}{3}At^3 + C,$$

unde constanta de integrare se determină din condiţia iniţială : la $t = 0$ avem $v = 0$, deci $C = 0$,

$$v = \frac{1}{3}At^3. \tag{1}$$

Se putea integra şi definit (limitele de integrare se corespund) :

$$\int_0^v dv = v = \int_0^t At^2\mathrm{d}t = \frac{1}{3}At^3.$$

Integrăm mai departe :

$$v = \frac{dx}{dt},\ dx = vdt,\ \int dx = x = \int vdt = \int \frac{1}{3} At^3 dt = \frac{1}{12} At^4 + C',$$

unde constanta de integrare se determină din condiția inițială : la $t = 0$, $v = 0$ și $x = 0$, deci $C' = 0$:

$$x = \frac{1}{12} At^4. \tag{2}$$

Se poate integra și definit :

$$\int_0^x dx = x = \int_0^t vdt = \int_0^t \frac{1}{3} At^3 dt = \frac{1}{12} At^4.$$

** **1.2.134.** Observăm că *dacă* accelerația ar fi $a = -\omega^2 x$ (cu minus !), atunci am avea $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ — binecunoscuta ecuație diferențială a *oscilatorului armonic!* În cazul problemei noastre : $a = \frac{dv}{dt} = \omega^2 x$.
Înmulțim ambii membri ai ecuației cu dx.

$$\frac{dv}{dt} dx = \omega^2 x dx \text{ sau } vdv = \omega^2 x dx. \tag{1}$$

Dealtfel aceasta este forma diferențială a teoremei variației energiei cinetice :

$$dL = F\, dx = dE_c \text{ sau } ma\, dx = d\left(\frac{1}{2} mv^2\right) = mvdv. \tag{2}$$

Integrăm :

$$\int vdv = \int \omega^2 x dx,\ \frac{1}{2} v^2 = \frac{1}{2} \omega^2 x^2 + C,$$

unde constanta de integrare se determină din condiția inițială :

$$\text{la } x = 0 \text{ corespunde } v = v_0 :\quad \frac{1}{2} v_0^2 = C,$$

$$v^2 = v_0^2 + \omega^2 x^2,\quad v = \sqrt{v_0^2 + \omega^2 x^2}. \tag{3}$$

Se poate integra și definit :

$$\int_{v_0}^{v} vdv = \int_0^x \omega^2 x dx,\ \frac{1}{2}(v^2 - v_0^2) = \frac{1}{2} \omega^2 x^2. \tag{4}$$

Mai departe

$$v = \frac{dx}{dt} = \sqrt{v_0^2 + \omega^2 x^2}. \tag{5}$$

Separăm variabilele și integrăm :

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{v_0^2 + \omega^2 x^2}},\quad t = \int dt = \int \frac{dx}{\sqrt{v_0^2 + \omega^2 x^2}} =$$

$$= \int \frac{dx}{\omega \sqrt{v_0^2/\omega^2 + x^2}} = \frac{1}{\omega} \ln\left(x + \sqrt{v_0^2/\omega^2 + x^2}\right) + C, \tag{6}$$

unde constanta de integrare se determină din condiţia iniţială:

$$\text{la} \quad t = 0 \text{ avem } x = 0: \quad 0 = \frac{1}{\omega}\ln(v_0/\omega) + C, \text{ rezultă}$$

$$t = \frac{1}{\omega}\ln\frac{x + \sqrt{v_0^2/\omega^2 + x^2}}{v_0/\omega} = \frac{1}{\omega}\ln\frac{\omega x + \sqrt{v_0^2 + \omega^2 x^2}}{v_0}. \qquad (7)$$

Se putea integra şi definit:

$$\int_0^t \mathrm{d}t = \int_0^x \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{v_0^2 + \omega^2 x^2}} = \frac{1}{\omega}\ln(x + \sqrt{v_0^2/\omega^2 + x^2})\Big|_0^x =$$

$$= \frac{1}{\omega}\ln\frac{x + \sqrt{v_0^2/\omega^2 + x^2}}{v_0/\omega}. \qquad (8)$$

Rezolvăm (7) în raport cu x:

$$\omega x + \sqrt{v_0^2 + \omega^2 x^2} = v_0 e^{\omega t}, \quad v_0^2 + \omega^2 x^2 = (v_0 e^{\omega t} - \omega x)^2,$$

$$x = \frac{1}{2}\frac{v_0}{\omega}(e^{\omega t} - e^{-\omega t}) = \frac{v_0}{\omega}\,\mathrm{sh}\,\omega t, \qquad (9)$$

unde apare funcţia *sinus hiperbolic* sh. Dealtfel cine cunoaşte funcţiile hiperbolice, putea scrie integrala (6) aşa:

$$t = \int \frac{\mathrm{d}x}{\omega\sqrt{v_0^2/\omega^2 + x^2}} = \frac{1}{\omega}\,\mathrm{argsh}\frac{\omega x}{v_0} + C', \qquad (10)$$

unde apare „argument sinus hiperbolic", iar constanta de integrare C' se determină din condiţia iniţială: la $t = 0$ avem $x = 0$, şi deoarece argsh $0 = 0$, rezultă $C' = 0$:

$$t = \frac{1}{\omega}\,\mathrm{argsh}\frac{\omega x}{v_0}, \quad \text{de unde} \quad \frac{\omega x}{v_0} = \mathrm{sh}\,\omega t, \qquad (11)$$

$$x = \frac{v_0}{\omega}\,\mathrm{sh}\,\omega t = \frac{v_0}{\omega}\frac{1}{2}(e^{\omega t} - e^{-\omega t}). \qquad (12)$$

Legea vitezei rezultă din (3) şi (9):

$$v = \sqrt{v_0^2 + \omega^2\frac{1}{4}\frac{v_0^2}{\omega^2}(e^{2\omega t} - 2 + e^{-2\omega t})} = v_0\frac{1}{2}(e^{\omega t} + e^{-\omega t}) =$$

$$= v_0\,\mathrm{ch}\,\omega t, \qquad (13)$$

unde apare „cosinus hiperbolic" ch. Dealtfel legea vitezei se poate obţine direct prin derivarea legii mişcării (9) (derivata sinusului hiperbolic este cosinusul hiperbolic şi derivata cosinusului hiperbolic este sinusul hiperbolic).

** **1.2.135.** a) $a = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$, $\mathrm{d}v = a\mathrm{d}t$. (1)

Integrăm (limitele de integrare se corespund):

$$\int_{v_0}^{v} \mathrm{d}v = \int_0^t a\mathrm{d}t, \quad v - v_0 = \int_0^t \mathrm{f}(t)\mathrm{d}t, \qquad (2)$$

de aici obţinem, punînd $t = t_m$, deci $v = 0$:

$$-v_0 = \int_0^{t_m} f(t)dt, \text{ deci } v = \int_0^t f(t)dt - \int_0^{t_m} f(t)dt =$$

$$= -\int_t^0 f(t)dt - \int_0^{t_m} f(t)dt = -\int_t^{t_m} f(t)dt. \tag{3}$$

b) $$v = \frac{dx}{dt}, \; dx = vdt, \; \int_0^{x_m} dx = \int_0^{t_m} vdt \text{ sau } x_m = \int_0^{t_m} vdt. \tag{4}$$

Integrăm prin părţi:

$$x_m = \int_0^{t_m} vdt = vt\Big|_0^{t_m} - \int_0^{t_m} tdv = -\int_0^{t_m} t \cdot a\, dt = -\int_0^{t_m} tf(t)dt. \tag{5}$$

Primul termen de la integrarea prin părţi dispare fiindcă pentru $t = t_m$ avem $v = 0$.

∗ 1.2.136. $$v = \frac{dx}{dt} = \dot{x} = x'(t) = A - 3Bt^2. \tag{1}$$

Condiţia de oprire:

$$v = 0 = A - 3Bt^2, \quad t = \sqrt{A/(3B)}. \tag{2}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -6Bt, \; F_f = ma = -6mBt, \tag{3}$$

dar

$$F_0 = -6mB\sqrt{A/(3B)} = -\frac{6}{\sqrt{3}} m\sqrt{AB}, \; m = -\frac{\sqrt{3}}{6} F_0/\sqrt{AB}, \tag{4}$$

care introdusă în (3) dă legea cerută:

$$F_f = \sqrt{3}\, F_0 \sqrt{B/A} \cdot t. \tag{5}$$

∗ 1.2.137. $$t = \sqrt{(2l/g) : (\sin\alpha - \mu\cos\alpha)} = \sqrt{(2b/g) : [\cos\alpha(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)]}. \tag{1}$$

Minimul timpului t corespunde maximului numitorului de sub radical. Anulăm derivata acestuia:

$$-\sin\alpha(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) + \cos\alpha(\cos\alpha + \mu\sin\alpha) = 0 \tag{2}$$

sau $$\cos^2\alpha - \sin^2\alpha + 2\mu\sin\alpha\cos\alpha = 0, \; \cos 2\alpha + \mu\sin 2\alpha = 0, \tag{3}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{1}{\mu} \quad \text{sau} \quad \operatorname{ctg} 2\alpha = -\mu. \tag{4}$$

Trebuie luat 2α în cadranul doi, fiindcă α este evident în cadranul 1. Derivata a doua:

$$-2\sin 2\alpha + 2\mu\cos 2\alpha \tag{5}$$

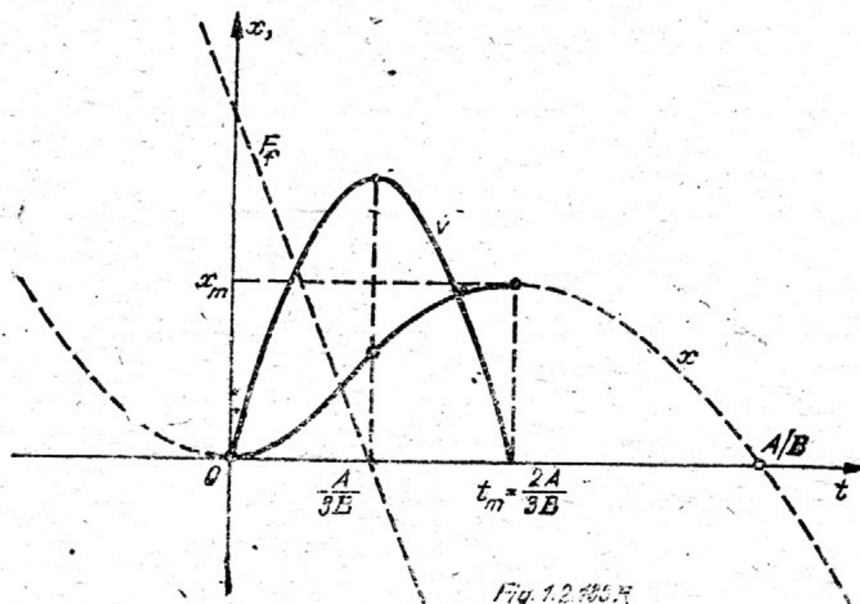
şi înlocuind pe μ din (4) găsim: $-2/\sin 2\alpha < 0$, deci numitorul are un maxim şi timpul t are un *minim*:

$$t_{\min} = \sqrt{(4b/g) \; [\text{illegible}] \; \mu + \sqrt{1 + \mu^2})}. \tag{6}$$

∗ 1.2.138. a) $$v = \frac{dx}{dt} = 2At - 3Bt^2. \tag{1}$$

Condiţia de oprire:

$$v = 0 = 2At - 3Bt^2,$$
$$t_m = 2A/(3B). \tag{2}$$



Distanţa pînă la oprire:

$$x_m = At_m^2 - Bt_m^3 = 4A^3 : (27B^2). \tag{3}$$

b) $a = \frac{dv}{dt} = 2A - 6Bt$, $F = ma = 2m(A - 3Bt)$. (4)

Pînă la momentul $t_0 = A/(3B)$ vehiculul merge accelerat, apoi merge frînat. c) Vd. figura.

** **1.2.139.** Principiul II al dinamicii se scrie:

$$F = F_0 \cos\omega t = ma = m\frac{dv}{dt}. \tag{1}$$

Separăm variabilele şi integrăm:

$$m dv = F_0 \cos\omega t\, dt,$$
$$\int m dv = \int F_0 \cos\omega t dt, \quad mv = \frac{1}{\omega} F_0 \sin\omega t + C,$$

unde constanta de integrare se determină din condiţia iniţială: la $t = 0$ avem $v = 0$, rezultă $C = 0$:

$$v = \frac{1}{m\omega} F_0 \sin\omega t, \quad v_{max} = \frac{1}{m\omega} F_0. \tag{2}$$

Se putea integra şi definit (limitele de integrare se corespund):

$$\int_0^v m dv = mv = \int_0^t F_0 \cos\omega t\, dt = F_0 \frac{1}{\omega} \sin\omega t \Big|_0^t = \frac{1}{\omega} F_0 \sin\omega t.$$

Continuăm integrarea:

$$dx = v dt, \int dx = \int \frac{1}{m\omega} F_0 \sin\omega t dt,$$
$$x = \frac{1}{m\omega^2} F_0(-\cos\omega t + C'),$$

unde constanta de integrare C' se determină din condiția inițială: la $t = 0$ avem $x = 0$; rezultă $C' = 1$:

$$x = \frac{1}{m\omega^2} F_0(1 - \cos \omega t). \qquad (3)$$

Se poate integra și definit (limitele de integrare se corespund):

$$\int_0^x \mathrm{d}x = x = \int_0^t \frac{1}{m\omega} F_0 \sin \omega t \mathrm{d}t = -\frac{1}{m\omega^2} F_0 \cos\omega t \Big|_0^t.$$

Se vede că mișcarea este *oscilatorie armonică* cu frecvența unghiulară ω, în jurul punctului de echilibru:

$$x_0 = \frac{1}{m\omega^2} F_0 = \frac{1}{k} F_0, \quad k = m\omega^2 \qquad (4)$$

cu amplitudinea

$$A = \frac{1}{m\omega^2} F_0 = \frac{1}{k} F_0. \qquad (5)$$

Forța aplicată se poate scrie și astfel:

$$F = F_0 \cos \omega t = F_0 - kx. \qquad (6)$$

** **1.2.140.** a) $F + F_r = F - kv = ma = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$. (1)

Separăm variabilele și integrăm:

$$\mathrm{d}t = \frac{m\mathrm{d}v}{F - kv}, \quad \int \mathrm{d}t = t = \int \frac{m\mathrm{d}v}{F - kv} =$$

$$= -\frac{m}{k}\int \frac{-k\mathrm{d}v}{F - kv} = -\frac{m}{k}\ln(F - kv) + C,$$

unde constanta de integrare se determină din condiția inițială: la $t = 0$, avem $v = 0$:

$$0 = -\frac{m}{k}\ln F + C, \; C = \frac{m}{k}\ln F,$$

$$t = -\frac{m}{k}\ln\frac{F - kv}{F}, \qquad v = \frac{F}{k}(1 - \mathrm{e}^{-kt/m}). \qquad (2)$$

Se poate integra și definit:

$$\int_0^t \mathrm{d}t = t = -\frac{m}{k}\int_0^v \frac{-k\mathrm{d}v}{F - kv} = -\frac{m}{k}\ln\frac{F - kv}{F}.$$

Integrăm mai departe:

$$\mathrm{d}x = v\mathrm{d}t, \; \int \mathrm{d}x = x = \int \frac{F}{k}(1 - \mathrm{e}^{-kt/m})\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{F}{k}t + \frac{F}{k}\frac{m}{k}\mathrm{e}^{-kt/m} + C',$$

unde constanta de integrare C' se determină din condiţia iniţială: la $t = 0$ avem $x = 0$:

$$0 = \frac{Fm}{k^2} + C', \quad C' = -\frac{Fm}{k^2},$$

$$x = \frac{F}{k}t + \frac{Fm}{k^2}(e^{-kt/m} - 1). \tag{3}$$

Se poate integra şi definit astfel:

$$\int_0^x dx = x = \int_0^t \frac{F}{k}(1 - e^{-kt/m})dt = \frac{F}{k}t\Big|_0^t + \frac{Fm}{k^2}e^{-kt/m}\Big|_0^t =$$

$$= \frac{F}{k}t + \frac{Fm}{k^2}(e^{-kt/m} - 1).$$

b) $$F - kv^2 = ma = m\frac{dv}{dt}, \tag{4}$$

separăm variabilele şi integrăm:

$$dt = \frac{mdv}{F - kv^2} = \frac{m}{k}\frac{dv}{F/k - v^2}.$$

Amintim integrala:

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{argth}\frac{x}{a} = \frac{1}{2}\ln\frac{a + x}{a - x}, \tag{5}$$

unde „argument tangenta hiperbolică" $\operatorname{argth}\frac{x}{a}$ este funcţia inversă „tangentei hiperbolice"

$$\operatorname{th}\frac{x}{a} = (e^{x/a} - e^{-x/a}) : (e^{x/a} + e^{-x/a}) = \operatorname{sh}\frac{x}{a} : \operatorname{ch}\frac{x}{a}.$$

În cazul nostru:

$$\int dt = t = \frac{m}{k}\int \frac{dv}{F/k - v^2} = \frac{m}{k}\sqrt{\frac{k}{F}}\operatorname{argth} v\sqrt{\frac{k}{F}} + C,$$

unde constanta de integrare C se determină din condiţia iniţială: la $t = 0$ avem $v = 0$ ($\operatorname{argth} 0 = 0$); rezultă $C = 0$,

$$t = \frac{m}{\sqrt{kF}}\operatorname{argth} v\sqrt{\frac{k}{F}}, \quad v = \sqrt{\frac{F}{k}}\operatorname{th}\frac{t}{m}\sqrt{kF}. \tag{6}$$

Se poate integra şi definit:

$$\int_0^t dt = t = \frac{m}{k}\int_0^v \frac{dv}{F/k - v^2} = \frac{m}{k}\sqrt{\frac{k}{F}}\operatorname{argth} v\sqrt{\frac{k}{F}}\Big|_0^v = \frac{m}{\sqrt{kF}}\operatorname{argth} v\sqrt{\frac{k}{F}}.$$

Continuăm integrarea:

$$dx = vdt, \quad \int dx = x = \int\sqrt{\frac{F}{k}}\operatorname{th}\frac{t}{m}\sqrt{kF}\cdot dt.$$

Amintim integrala:

$$\int \operatorname{th}ax\, dx = \frac{1}{a}\ln \operatorname{ch}ax, \tag{7}$$

unde „cosinusul hiperbolic”

$$\operatorname{ch} ax = \frac{1}{2}(e^{ax} + e^{-ax}).$$

În cazul nostru:

$$x = \sqrt{\frac{F}{k}}\int \operatorname{th}\frac{t}{m}\sqrt{kF}\,dt = \sqrt{\frac{F}{k}}\frac{m}{\sqrt{kF}}\ln\operatorname{ch}\frac{t}{m}\sqrt{kF} + C',$$

unde constanta de integrare C' se determină din condiția inițială: la $t = 0$ avem $x = 0$ ($\operatorname{ch} 0 = 1$, $\ln 1 = 0$), rezultă $C' = 0$,

$$x = \frac{m}{k}\ln\operatorname{ch}\frac{t}{m}\sqrt{kF}. \tag{8}$$

Se poate integra și definit:

$$\int_0^x dx = x = \sqrt{\frac{F}{k}}\int_0^t \operatorname{th}\frac{t}{m}\sqrt{kF}\,dt = \sqrt{\frac{F}{k}}\frac{m}{\sqrt{kF}}\ln\operatorname{ch}\frac{t}{m}\sqrt{kF}\Big|_0^t = \frac{m}{k}\ln\operatorname{ch}\frac{t}{m}\sqrt{kF}.$$

Putem găsi $x = x(v)$ eliminînd timpul t din (6) și (8). Dar vom proceda altfel. Înmulțim ecuația (4) cu dx:

$$(F - kv^2)dx = m\frac{dv}{dt}dx = mv\,dv,$$

separăm variabilele și integrăm:

$$dx = \frac{mv\,dv}{F - kv^2} = -\frac{m}{2k}\frac{d(-kv^2)}{F - kv^2},$$

$$\int dx = x = -\frac{m}{2k}\int\frac{d(-kv^2)}{F - kv^2} = -\frac{m}{2k}\ln(F - kv^2) + C,$$

unde constanta de integrare C se determină din condiția inițială: la $t = 0$ avem $v = 0$ și $x = 0$:

$$0 = -\frac{m}{2k}\ln F + C, \quad C = \frac{m}{2k}\ln F,$$

$$x = \frac{m}{2k}\ln\frac{F}{F - kv^2}. \tag{9}$$

Se poate integra și definit:

$$\int_0^x dx = x = -\frac{m}{2k}\int_0^v\frac{d(-kv^2)}{F - kv^2} = -\frac{m}{2k}\ln\frac{F - kv^2}{F}.$$

** **1.2.141.** $F_r = -kv^3 = ma = m\frac{dv}{dt}$. (1)

Separăm variabilele și integrăm:

$$dt = -\frac{m}{k}\frac{dv}{v^3}, \quad \int dt = t = -\frac{m}{k}\int\frac{dv}{v^3} = \frac{m}{2k}\frac{1}{v^2} + C.$$

Constanta de integrare se determină din condiția inițială: la $t = 0$ avem $v = v_0$:

$$0 = \frac{m}{2k}\frac{1}{v_0^2} + C, \quad C = -\frac{m}{2kv_0^2},$$

$$t = \frac{m}{2k}(1/v^2 - 1/v_0^2), \quad v = 1 : \sqrt{1/v_0^2 + 2kt/m}. \tag{2}$$

Se putea integra şi definit (limitele de integrare trebuie să se corespundă):

$$\int_0^t dt = t = -\frac{m}{k}\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{v^3} = \frac{m}{2k}\frac{1}{v^2}\Big|_{v_0}^{v} = \frac{m}{2k}\left(\frac{1}{v^2} - \frac{1}{v_0^2}\right).$$

Continuăm integrarea:

$$dx = v dt, \int dx = x = \int \frac{dt}{\sqrt{1/v_0^2 + 2kt/m}} =$$

$$= \frac{m}{k}\int \frac{d(2kt/m)}{2\sqrt{1/v_0^2 + 2kt/m}} = \frac{m}{k}\sqrt{1/v_0^2 + 2kt/m} + C',$$

unde constanta de integrare se determină din condiţia iniţială: la $t = 0$ avem $v = v_0$ şi $x = 0$:

$$0 = \frac{m}{kv_0} + C', \quad C' = -\frac{m}{kv_0},$$

$$x = \frac{m}{k}\sqrt{1/v_0^2 + 2kt/m} - m/(kv_0). \tag{3}$$

Se putea integra şi definit:

$$\int_0^v dx = x = \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{1/v_0^2 + 2kt/m}} = \frac{m}{k}\sqrt{1/v_0^2 + 2kt/m}\Big|_0^t.$$

** **1.2.142.** Din semnificaţia unghiului de frecare rezultă imediat că $\varphi = 30°$ este chiar unghiul de frecare ($\mu = \text{tg}\varphi$). La coborîrea liberă în jos:

$$mg\sin\alpha - mg\cos\alpha - kc^2 = 0, \ (a = 0),$$

de unde

$$k = \frac{1}{c^2}mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) = \frac{1}{c^2}mg\sin(\alpha - \varphi) : \cos\varphi. \tag{1}$$

Pentru urcarea liberă în sus de-a lungul planului înclinat:

$$-mg\sin\alpha - \mu\, mg\cos\alpha - kv^2 = m\frac{dv}{dt}. \tag{2}$$

Am putea separa variabilele şi integra, şi am găsi $v = v(t)$, dar ne interesează *distanţa* parcursă pe plan *pînă la oprire* (şi nu timpul). Pentru aceasta înmulţim ecuaţia (2) cu dx:

$$-dx(mg\sin\alpha + \mu\, mg\cos\alpha + kv^2) = m\frac{dv}{dt}dx = mv\,dv,$$

separăm acum variabilele şi integrăm:

$$dx = \frac{-mvdv}{mg\sin\alpha + \mu mg\cos\alpha + kv^2}, \quad s = \int_0^s dx = \int_{v_0}^{0}\frac{-mvdv}{mg\sin\alpha + \mu mg\cos\alpha + kv^2} =$$

$$= -\frac{m}{2k}\int_{v_0}^{0}\frac{d(v^2)}{mg\sin\alpha + \mu mg\cos\alpha + kv^2} = -\frac{m}{2k}\ln(mg\sin\alpha + \mu mg\cos\alpha + kv^2)\Big|_{v_0}^{0} =$$

$$= -\frac{m}{2k}\ln\frac{mg\sin\alpha + \mu mg\cos\alpha}{mg\sin\alpha + \mu mg\cos\alpha + kv_0^2}. \tag{3}$$

La coborîre:

$$mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha - kv^2 = m\frac{dv}{dt}. \qquad (4)$$

Înmulţim ambii membri cu dx, apoi separăm variabilele şi integrăm:

$$dx(mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha - kv^2) = m\frac{dv}{dt}dx = mv dv,$$

$$dx = \frac{mv\,dv}{mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha - kv^2}, \quad s = \int_0^s dx =$$

$$= -\frac{m}{2k}\int_0^{v'}\frac{d(v^2)}{mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha - kv^2} = \qquad (5)$$

$$= -\frac{m}{2k}\ln\frac{mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha - kv'^2}{mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha}.$$

Egalăm distanţele (3) şi (5):

$$s = -\frac{m}{2k}\ln\frac{mg\sin\alpha + \mu mg\cos\alpha}{mg\sin\alpha + \mu mg\cos\alpha + kv_0^2} =$$

$$= -\frac{m}{2k}\ln\frac{mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha - kv'^2}{mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha},$$

înlocuim pe k din (1) şi înlocuim pe $\mu = \mathrm{tg}\varphi$; obţinem:

$$1 - v'^2/c^2 = \sin(\alpha + \varphi) : [\sin(\alpha + \mu) + \sin(\alpha - \varphi)v_0^2/c^2],$$

de unde

$$v' = v_0 : \sqrt{v_0^2/c^2 + \sin(\alpha + \varphi) : \sin(\alpha - \varphi)} = 1{,}0 \text{ m/s}. \qquad (6)$$

(*) **1.2.143.** Luăm un element de curbă ds în jurul minimului. Forţa de revenire a particulei este componenta tangenţială a greutăţii:

$$F_t = mg\sin\frac{d\theta}{2} = mg\frac{d\theta}{2}. \qquad (1)$$

Dar d$s = R_0$ dθ, deci

$$F_t = \frac{mg}{R_0}\frac{ds}{2} = k\frac{ds}{2}, \ (=kx), \qquad (2)$$

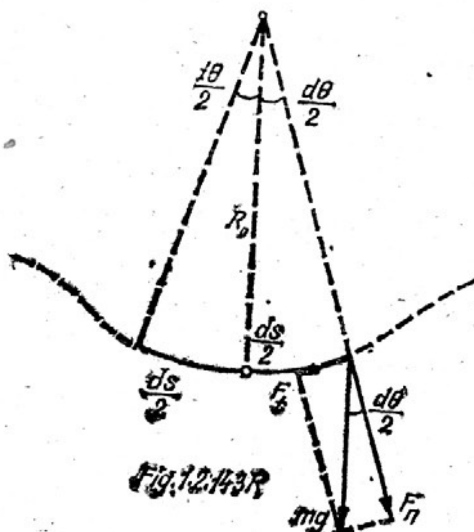


Fig. 1.2.143R

forţa este de tip elastic cu constanta $k = mg/R_0$, prin urmare perioada oscilaţiilor:

$$T = 2\pi\sqrt{m/k} = 2\pi\sqrt{R_0/g}. \tag{3}$$

Desigur, putem judeca şi cu variaţii foarte mici (în loc de diferenţiale), care descresc către zero: $\Delta\theta$, $\Delta s = R_0\Delta\theta$ şi să folosim aproximaţia bine cunoscută:

$$\sin\frac{\Delta\theta}{2} \to \frac{\Delta\theta}{2} \text{ cînd } \Delta\theta \to 0. \tag{4}$$

** **1.2.144.** $F_r = -kv^2 = ma = m\dfrac{dv}{dt}$. (1)

Separăm variabilele şi integrăm:

$$dt = -\frac{m\,dv}{kv^2}, \quad \int dt = \frac{-m\,dv}{kv^2}, \quad t = \frac{m}{kv} + C,$$

unde constanta de integrare C se determină din condiţia iniţială: la $t = 0$, $v = v_0$; $0 = m/(kv_0) + C$, $C = -m/(kv_0)$, deci

$$t = \frac{m}{k}(1/v - 1/v_0). \tag{2}$$

Se poate integra şi definit (limitele de integrare se corespund):

$$\int_0^t dt = \int_{v_0}^{v} \frac{-m\,dv}{kv^2}, \quad t = \frac{m}{k}\frac{1}{v}\Big|_{v_0}^{v} = \frac{m}{k}\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v_0}\right).$$

Timpul cerut este $(v = v_0/n)$:

$$\tau = \frac{m}{kv_0}(n - 1). \tag{3}$$

** **1.2.145.** $F_r = -kv^2 = ma = m\dfrac{dv}{dt}$. (1)

Separăm variabilele şi integrăm:

$$dt = -\frac{m dv}{kv^2}, \quad \int dt = -\frac{m}{k}\int\frac{dv}{v^2}, \quad t = \frac{m}{kv} + C,$$

unde constanta de integrare se determină din condiţia iniţială: la $t = 0$, $v = v_0$: $0 = m/(kv_0) + C$, $C = -m/(kv_0)$,

$$t = \frac{m}{k}\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v_0}\right), \tag{2}$$

$$k = \frac{m}{t}\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v_0}\right) = \frac{m}{v_0\tau}(e - 1). \tag{3}$$

Se poate integra şi definit (limitele de integrare se corespund):

$$\int_0^t dt = \frac{m}{k}\int_{v_0}^{v} -\frac{dv}{v^2} = \frac{m}{k}\frac{1}{v}\Big|_{v_0}^{v} = \frac{m}{k}\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v_0}\right).$$

Mai departe aflăm legea mişcării: $dx = v dt$, dar din (2):

$$v = \frac{v_0}{1 + kv_0t/m}, \tag{4}$$

deci

$$x = \int v dt = \int\frac{v_0}{1 + kv_0t/m}dt = \frac{m}{k}\int\frac{(kv_0/m)dt}{1 + kv_0t/m} = \frac{m}{k}\ln(1 + kv_0t/m) + C,$$

unde constanta de integrare se determină din condiţia iniţială:
la $t = 0$ avem $x = 0$:

$$0 = \frac{m}{k}\ln 1 + C, \quad C = 0,$$

$$x = \frac{m}{k}\ln(1 + kv_0t/m). \tag{5}$$

Se poate integra şi definit:

$$\int_0^x dx = x = \int_0^t \frac{v_0 dt}{1 + kv_0t/m} = \frac{m}{k}\ln(1 + kv_0t/m).$$

Distanţa cerută se onţine înlocuind în (5) pe k din (3):

$$x_m = \frac{m}{k}\ln(1 + kv_0\tau/m) = v_0\tau : (e - 1) = 100 \text{ m}. \tag{6}$$

Putem proceda şi altfel: Inmulţim ambii membri ai ecuaţiei (1) cu dx

$$-kv^2dx = m\frac{dv}{dt}dx = mv\,dv, \ \left(\frac{dx}{dt} = v\right),$$

separăm variabilele şi integrăm:

$$dx = \frac{mdv}{-kv}, \ \int dx = \int -\frac{mdv}{kv} = -\frac{m}{k}\int\frac{dv}{v}, \ x = -\frac{m}{k}\ln v + C,$$

unde constanta de integrare se determină din condiţia iniţială:
la $x = 0$ avem $v = v_0$:

$$0 = -\frac{m}{k}\ln v_0 + C, \ C = \frac{m}{k}\ln v_0,$$

$$x = \frac{m}{k}\ln\frac{v_0}{v} \tag{7}$$

Se poate integra şi definit:

$$\int_0^x dx = -\frac{m}{k}\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{v}, \ x = -\frac{m}{k}\ln\frac{v}{v_0}.$$

Punînd în (7) condiţia $v = v_0/e$ şi înlocuind pe k din (3), găsim distanţa cerută (6).

** **1.2.146.** a) $-kv = ma = m\dfrac{dv}{dt}$, (1)

separăm variabilele şi integrăm:

$$dt = -\frac{m}{k}\frac{dv}{v}, \ \int dt = -\frac{m}{k}\int\frac{dv}{v}, \ t = -\frac{m}{k}\ln v + C,$$

unde constanta de integrare se determină din condiţia iniţială:
la $t = 0$, avem $v = v_0$:

$$0 = -\frac{m}{k}\ln v_0 + C, \ C = \frac{m}{k}\ln v_0,$$

$$t = \frac{m}{k}\ln\frac{v_0}{v}. \tag{2}$$

Se poate integra şi definit (limitele de integrare trebuie să se corespundă) :

$$\int_0^t dt = t = -\frac{m}{k}\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{v} = -\frac{m}{k}\ln\frac{v}{v_0}.$$

Punînd condiţia $v = v_0/e$ în (2) obţinem :

$$\tau = \frac{m}{k}\ln e, \quad k = \frac{m}{\tau} = 10 \text{ kg/s}. \tag{3}$$

b) Din (2) avem legea vitezei :

$$v = v_0 e^{-kt/m}. \tag{4}$$

$$dx = v dt, \quad x = \int v dt = \int v_0 e^{-kt/m}\, dt = -\frac{m}{k} v_0\, e^{-kt/m} + C,$$

unde constanta de integrare se determină din condiţia iniţială : la $t = 0$ avem $x = 0$:

$$0 = -\frac{m}{k} v_0 + C, \; C = \frac{m}{k} v_0,$$

$$x = \frac{m}{k} v_0(1 - e^{-kt/m}). \tag{5}$$

Se poate integra şi definit (limitele de integrare se corespund) :

$$\int_0^x dx = x = \int_0^t v_0 e^{-kt/m} dt = -\frac{m}{k} v_0 e^{-kt/m}\Big|_0^t = -\frac{m}{k} v_0(e^{-kt/m} - 1).$$

Înlocuind în (5) pe k din (3), găsim

$$x = v_0\tau(1 - e^{-1}) = v_0\tau\frac{e-1}{e} = 6{,}3 \text{ m}.$$

Se poate proceda şi altfel, găsind $x = x(v)$. Pentru aceasta înmulţim ecuaţia (1) cu dx :

$$-kv\, dx = m\frac{dv}{dt} dx = mv dv,$$

separăm variabilele şi integrăm :

$$dx = -\frac{m\, dv}{k}, \quad x = \int dx = -\frac{m}{k}\int dv = -\frac{m}{k} v + C,$$

unde constanta de integrare se determină din condiţia iniţială : la $t = 0$ avem $x = 0$ şi $v = v_0$:

$$0 = -\frac{m}{k} v_0 + C, \quad C = \frac{m}{k} v_0,$$

$$x = \frac{m}{k}(v_0 - v). \tag{6}$$

Se poate integra şi definit (limitele de integrare se corespund) :

$$\int_0^x dx = x = -\frac{m}{k}\int_{v_0}^{v} dv = -\frac{m}{k}(v - v_0).$$

Punînd în (6) condiţia $v = v_0/\mathrm{e}$ şi înlocind pe k din (3), găsim distanţa cerută:

$$x = v_0\tau(1 - 1/\mathrm{e}) = 6{,}3 \text{ m}.$$

c) Punînd în (6) condiţia de oprire $v = 0$ şi înlocuind pe k din (3), găsim

$$x_m = v_0\tau = 10 \text{ m}.$$

Dar timpul în care se parcurge această distanţă este (teoretic) *infinit*, aceasta rezultă din (2) sau (4) punînd $v = 0$.

**** 1.2.147.** $F = mg - kv = ma = m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$. **(1)**

Separăm variabilele:

$$\mathrm{d}t = \frac{m\,\mathrm{d}v}{mg - kv}.$$

Observăm că într-un membru trebuie să fie $\mathrm{d}t$ împreună cu *factori* care depind de t (nu avem aici), iar în celălalt membru $\mathrm{d}v$ cu *factori* care depind de v. Factorii constanţi pot fi lăsaţi în oricare membru. Integrăm:

$$\int \mathrm{d}t = t = \int \frac{m\,\mathrm{d}v}{mg - kv} = -\frac{m}{k}\int \frac{-k\,\mathrm{d}v}{mg - kv} = -\frac{m}{k}\ln(mg - kv) + C,$$

unde constanta de integrare C se determină din condiţia iniţială: la $t = 0$ avem $v = 0$:

$$0 = -\frac{m}{k}\ln mg + C, \quad C = \frac{m}{k}\ln mg,$$

$$t = \frac{m}{k}\ln\frac{mg}{mg - kv}. \qquad (2)$$

Se poate integra şi definit (limitele de integrare se corespund):

$$\int_0^t \mathrm{d}t = t = \int_0^v \frac{m\,\mathrm{d}v}{mg - kv} = -\frac{m}{k}\ln(mg - kv)\Big|_0^v = -\frac{m}{k}\ln\frac{mg - kv}{mg}.$$

Pe de altă parte, viteza limită se atinge cînd forţele îşi fac echilibru: forţa de frecare creşte cu viteza pînă cînd egalează forţa de greutate, atunci în (1) acceleraţia se anulează şi viteza rămîne constantă:

$$mg - kc = 0, \; k = mg/c. \qquad (3)$$





Fig. 1.2.147R-ER

-kv²
m
mg
O
x

Fig. 1.2.149 R

$$t = \frac{c}{g}\ln(1 - v/c). \qquad (4)$$

Punînd condiţia $v = fc$:

$$t = \frac{c}{g}\ln(1-f) = 2{,}3\frac{c}{g}\lg(1-f) = 23 \text{ ms}.$$

** **1.2.148.** $F = mg - kv = ma = m\frac{dv}{dt}$. (1)

Viteza limită c se obţine cînd forţele îşi fac echilibru (forţa de rezistenţă echilibrează greutatea), atunci în (1) acceleraţia se anulează:

$$mg - kc = 0, \ k = mg/c. \qquad (2)$$

Separăm variabilele în (1) şi integrăm:

$$dt = \frac{mdv}{mg - kv} = \frac{dv}{g(1 - v/c)}, \ \int dt = t = \int\frac{dv}{g(1-v/c)} =$$

$$= -\frac{c}{g}\ln(1 - v/c) + C,$$

unde constanta de integrare se determină din condiţia iniţială: la $t = 0$ avem $v = 0$:

$$0 = -\frac{c}{g}\ln 1 + C, \quad C = 0,$$

$$t = -\frac{c}{g}\ln(1 - v/c), \ 1 - v/c = e^{-gt/c}, \ v = c(1 - e^{-gt/c}). \qquad (3)$$

Se putea integra şi definit:

$$\int_0^t dt = t = \int_0^v \frac{dv}{g(1-v/c)} = -\frac{c}{g}\ln(1 - v/c)\Big|_0^v = -\frac{c}{g}\ln(1 - v/c).$$

Mai departe,

$$dx = vdt, \ x = \int dx = \int vdt = \int c(1 - e^{-gt/c})dt =$$

$$= \int cdt - \int c\, e^{-gt/c}dt = ct + \frac{1}{g}c^2 e^{-gt/c} + C,$$

unde constanta de integrare se determină din condiţia iniţială: la $t = 0$ avem $x = 0$: $\quad 0 = c^2/g + C, \ C = -c^2/g,$

$$x = ct + \frac{1}{g}c^2(e^{-gt/c} - 1). \qquad (4)$$

Se putea integra şi definit:

$$\int_0^x dx = x = \int_0^t c(1 - e^{-gt/c})dt =$$

$$= ct\Big|_0^t + \frac{1}{g}c^2 e^{-gt/c}\Big|_0^t = ct + \frac{1}{g}c^2(e^{-gt/c} - 1).$$

** **1.2.149.** a) $F = mg - kv^2 = ma = m\frac{dv}{dt}$. (1)

Separăm variabilele şi integrăm:

$$dt = \frac{m\,dv}{mg - kv^2}, \ \int dt = t = \int\frac{m\,dv}{mg - kv^2} = \frac{m}{k}\int\frac{dv}{mg/k - v^2}.$$

Amintim integrala:

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{a + x}{a - x} = \frac{1}{a} \operatorname{argth} \frac{x}{a}, \tag{2}$$

unde „argument tangenta hiperbolică" argth x este funcţia inversă „tangentei hiperbolice":

$$\operatorname{th} x = (e^x - e^{-x}) : (e^x + e^{-x}) = \operatorname{sh} x : \operatorname{ch} x.$$

Integrala noastră devine atunci

$$t = \frac{m}{kg} \operatorname{argth} v \sqrt{\frac{k}{mg}} + C,$$

unde constanta de integrare se determină din condiţia iniţială: la $t = 0$ avem $v = 0$; rezultă $C = 0$ (căci argth $0 = 0$).

$$t = \sqrt{\frac{m}{kg}} \operatorname{argth} \frac{v}{\sqrt{mg/k}}, \quad v = \sqrt{\frac{mg}{k}} \operatorname{th} \sqrt{\frac{kg}{m}}\, t. \tag{3}$$

Se putea integra şi definit:

$$\int_0^t dt = t = \frac{m}{k} \int_0^v \frac{dv}{mg/k - v^2} = \sqrt{\frac{m}{kg}} \operatorname{argth} v \sqrt{\frac{k}{mg}}.$$

Pe de altă parte viteza limită se obţine cînd forţele se echilibrează (forţa de rezistenţă echilibrează greutatea) şi acceleraţia devine zero:

$$mg - kc^2 = 0, \quad k = mg/c^2. \tag{4}$$

Atunci legea vitezei devine:

$$v = c \operatorname{th} \frac{g}{c} t. \tag{5}$$

b) $dx = v dt, \quad x = \int dx = \int v dt = \int c \operatorname{th} \frac{g}{c} t \cdot dt.$

Amintim integrala:

$$\int \operatorname{th} ax\, dx = \frac{1}{a} \ln \operatorname{ch} ax + C, \tag{6}$$

unde „cosinus hiperbolic" este funcţia

$$\operatorname{ch} ax = \frac{1}{2} (e^{ax} + e^{-ax}).$$

În cazul nostru obţinem:

$$x = \frac{1}{g} c^2 \ln \operatorname{ch}(gt/c) + C,$$

unde constanta de integrare se obţine din condiţia iniţială: la $t = 0$, $x = 0$. (ch $0 = 1$, ln $1 = 0$), rezultă $C = 0$,

$$x = \frac{1}{g} c^2 \ln \operatorname{ch} \frac{gt}{c}. \tag{7}$$

c) Dependenţa $x = x(v)$ s-ar putea obţine eliminînd timpul din (5) şi (7), dar vom proceda altfel, mai direct. Înmulţim ecuaţia (1) cu dx:

$$(mg - kv^2)dx = m \frac{dv}{dt} dx = mv\, dv.$$

Separăm variabilele şi integrăm:

$$\mathrm{d}x = \frac{mv\mathrm{d}v}{mg - kv^2}, \quad \int \mathrm{d}x = x = \int \frac{mv\mathrm{d}v}{mg - kv^2} =$$

$$= -\frac{m}{2k}\int \frac{d(-kv^2)}{mg - kv^2} = -\frac{m}{2k}\ln(mg - kv^2) + C,$$

unde constanta de integrare se determină din condiţia iniţială: la $t = 0$ avem $x = 0$ şi $v = 0$:

$$0 = -\frac{m}{2k}\ln mg + C, \quad C = \frac{m}{2k}\ln mg,$$

$$x = \frac{m}{2k}\ln\frac{mg}{mg - kv^2}. \tag{8}$$

Se putea integra şi definit:

$$\int_0^x \mathrm{d}x = \int_0^v \frac{mv\mathrm{d}v}{mg - kv^2} = -\frac{m}{2k}\ln\frac{mg - kv^2}{mg}.$$

Introducînd în (8) pe k din (4), obţinem:

$$x = \frac{1}{2g}c^2\ln\frac{1}{1 - v^2/c^2}. \tag{9}$$

**** 1.2.150.** Viteza limită de cădere liberă se atinge cînd forţele se echilibrează şi acceleraţia devine zero:

$$mg - kc^2 = 0, \; k = mg/c^2. \tag{1}$$

a) La urcare:

$$-mg - kv^2 = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}. \tag{2}$$

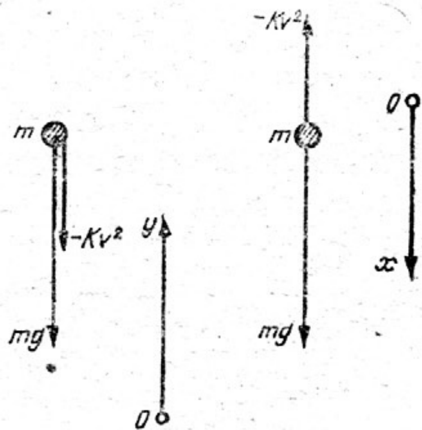


Fig. 1.2.150R

Separăm variabilele şi integrăm:

$$\mathrm{d}t = -\frac{m\mathrm{d}v}{mg + kv^2} = -\frac{m}{k}\frac{\mathrm{d}v}{mg/k + v^2},$$

$$\int \mathrm{d}t = t = -\frac{m}{k}\int\frac{\mathrm{d}v}{mg/k + v^2} = -\frac{1}{g}c^2\int\frac{\mathrm{d}v}{c^2 + v^2} = -\frac{c}{g}\operatorname{arctg}\frac{v}{c} + C,$$

unde constanta de integrare se determină din condiţia iniţială: la $t = 0$, $v = v_0$:

$$0 = -\frac{c}{g}\,\text{arctg}\,(v_0/c) + C, \quad C = \frac{c}{g}\,\text{arctg}(v_0/c),$$

$$t = \frac{c}{g}\left(\text{arctg}\,\frac{v_0}{c} - \text{arctg}\,\frac{v}{c}\right). \tag{3}$$

Am putea integra şi definit (limitele de integrare se corespund):

$$\int_0^t \mathrm{d}t = -\frac{1}{g}\,c^2\int_{v_0}^{v}\frac{\mathrm{d}v}{c^2+v^2} = -\frac{c}{g}\,\text{arctg}\,\frac{v}{c}\Big|_{v_0}^{v} = \frac{c}{g}\left(\text{arctg}\,\frac{v_0}{c} - \text{arctg}\,\frac{v}{c}\right).$$

Punînd în (3) $v = 0$ (condiţia de oprire la înălţimea maximă), obţinem timpul de urcare:

$$t_m = \frac{c}{g}\,\text{arctg}\,\frac{v_0}{c}. \tag{4}$$

Mai departe, am putea în principiu rezolva (3) $v = \mathrm{v}(t)$ şi continua integrarea: $\mathrm{d}y = v\mathrm{d}t$, pentru a obţine $y = \mathrm{y}(t)$. dar în cazul nostru este mai simplu de aflat $y = \mathrm{y}(v)$. Pentru aceasta înmulţim ecuaţia (2) cu $\mathrm{d}y$:

$$-(mg + kv^2)\,\mathrm{d}y = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}y = mv\mathrm{d}v, \quad \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = v\right).$$

(Aceasta este de fapt forma diferenţială a teoremei variaţiei energiei cinetice: $\mathrm{d}L = F\mathrm{d}y = \mathrm{d}E_c = mv\mathrm{d}v$). Separăm variabilele şi integrăm:

$$\mathrm{d}y = \frac{-mv\mathrm{d}v}{mg + kv^2} = -\frac{m}{2k}\,\frac{\mathrm{d}(v^2)}{mg/k + v^2} = -\frac{1}{2g}\,c^2\,\frac{\mathrm{d}(v^2)}{c^2+v^2},$$

$$\int \mathrm{d}y = y = -\frac{1}{2g}\,c^2\int\frac{\mathrm{d}(v^2)}{c^2+v^2} = -\frac{1}{2g}\,c^2\ln(c^2+v^2) + C',$$

unde constanta de integrare C' se determină din condiţia iniţială: la $t = 0$, $v = v_0$, $y = 0$:

$$0 = -\frac{1}{2g}\,c^2\ln(c^2+v_0^2) + C', \quad C' = \frac{1}{2g}\,c^2\ln(c^2+v_0^2),$$

$$y = \frac{1}{2g}\,c^2\ln\frac{c^2+v_0^2}{c^2+v^2}. \tag{5}$$

Se putea integra şi definit (limitele de integrare se corespund):

$$\int_0^y \mathrm{d}y = y = -\frac{1}{2g}\,c^2\int_{v_0}^{v}\frac{\mathrm{d}(v^2)}{c^2+v^2} = -\frac{1}{2g}\,c^2\ln\frac{c^2+v^2}{c^2+v_0^2}.$$

Punînd în (5) $v = 0$ (condiţia de oprire la înălţimea maximă), găsim înălţimea maximă la care urcă corpul:

$$h_m = \frac{1}{2g}\,c^2\ln(1 + v_0^2/c^2). \tag{6}$$

b) La coborîre:

$$mg - kv^2 = m\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}. \tag{7}$$

Separăm variabilele şi integrăm:

$$\mathrm{d}t = \frac{m\mathrm{d}v}{mg - kv^2} = \frac{m}{k}\,\frac{\mathrm{d}v}{mg/k - v^2} = \frac{1}{g}\,c^2\,\frac{\mathrm{d}v}{c^2 - v^2}.$$

Amintim integrala:

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{a + x}{a - x} = \frac{1}{a} \operatorname{argth} \frac{x}{a}. \tag{8}$$

unde „argument tangenta hiperbolică", argth x/a, este funcţia inversă „tangentei hiperbolice":

$$\operatorname{th} \frac{x}{a} = (e^{x/a} - e^{-x/a}) : (e^{x/a} + e^{-x/a}) = \operatorname{sh} \frac{x}{a} : \operatorname{ch} \frac{x}{a}.$$

Atunci integrala noastră devine:

$$\int dt = t = \frac{1}{g} c^2 \int \frac{dv}{c^2 - v^2} = \frac{c}{g} \operatorname{argth} \frac{v}{c} + C,$$

unde constanta de integrare se determină din condiţia iniţială: la $t = 0$, $v = 0$, atunci rezultă $C = 0$, (argth $0 = 0$):

$$t = \frac{c}{g} \operatorname{argth} \frac{v}{c}, \quad v = c \operatorname{th} \frac{gt}{c}. \tag{9}$$

Se putea integra şi definit:

$$\int_0^t dt = t = \frac{1}{g} c^2 \int_0^v \frac{dv}{c^2 - v^2} = \frac{c}{g} \operatorname{argth} \frac{v}{c} \Big|_0^v = \frac{c}{g} \operatorname{argth} \frac{v}{c}.$$

Continuăm integrarea pentru a găsi $x = x(t)$:

$$dx = v\, dt = c \cdot \operatorname{th} \frac{gt}{c} dt, \quad \int dx = x = c \int \operatorname{th} \frac{gt}{c} dt.$$

Amintim integrala:

$$\int \operatorname{th} ax\, dx = \frac{1}{a} \operatorname{lnch} ax, \tag{10}$$

atunci integrala noastră devine:

$$x = c \int \operatorname{th} \frac{gt}{c} dt = \frac{1}{g} c^2 \operatorname{lnch} \frac{gt}{c} + C',$$

unde constanta de integrare C' se determină din condiţia iniţială: pentru $t = 0$, $x = 0$, (ch $0 = 1$, ln $1 = 0$), rezultă $C' = 0$:

$$x = \frac{1}{g} c^2 \operatorname{lnch} \frac{gt}{c}. \tag{11}$$

Se putea integra şi definit:

$$\int_0^x dx = x = c \int_0^t \operatorname{th} \frac{gt}{c} dt = \frac{1}{g} c^2 \operatorname{lnch} \frac{gt}{c} \Big|_0^t = \frac{1}{g} c^2 \operatorname{lnch} \frac{gt}{c}.$$

Timpul de coborîre se poate obţine din (11) punînd condiţia $x = h_m$ (6):

$$h_m = \frac{1}{2g} c^2 \ln(1 + v_0^2/c^2) = \frac{1}{g} c^2 \operatorname{lnch} \frac{gt'}{c},$$

$$\sqrt{1 + v_0^2/c^2} = \operatorname{ch} \frac{gt'}{c}, \quad t' = \frac{c}{g} \operatorname{argch} \sqrt{1 + v_0^2/c^2}. \tag{12}$$

Amintim formula:

$$\operatorname{argch} x = \pm \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), \quad x \geqslant 1,$$

astfel încît (12) se mai poate scrie astfel :

$$t' = \frac{c}{g}\,\mathrm{argch}\sqrt{1 + v_0^2/c^2} = \frac{c}{g}\ln(\sqrt{1 + v_0^2/c^2} - v_0/c). \qquad (13)$$

Viteza cu care corpul ajunge jos s-ar putea găsi în principiu introducînd pe t' (13) în (9). Dar preferăm să găsim $x = x(v)$ astfel: Înmulţim ecuaţia (7) cu $\mathrm{d}x$:

$$(mg - kv^2)\mathrm{d}x = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}x = mv\mathrm{d}v,$$

(aceasta este forma diferenţială a teoremei variaţiei energiei cinetice : $\mathrm{d}L = F\mathrm{d}x = \mathrm{d}E_c = mv\mathrm{d}v$). Separăm variabilele şi integrăm :

$$\mathrm{d}x = \frac{mv\mathrm{d}v}{mg - kv^2} = -\frac{m}{2k}\,\frac{\mathrm{d}(-v^2)}{mg/k - v^2} = -\frac{1}{2g}\,c^2\frac{\mathrm{d}(-v^2)}{c^2 - v^2},$$

$$\int \mathrm{d}x = x = -\frac{1}{2g}\,c^2\int\frac{\mathrm{d}(-v^2)}{c^2 - v^2} = -\frac{1}{2g}\,c^2\ln(c^2 - v^2) + C,$$

unde constanta de integrare C se determină din condiţia iniţială : la $t = 0$, avem $x = 0$, $v = 0$, deci $0 = -\frac{1}{2g}c^2\ln c^2 + C$, $C = \frac{c^2}{2g}\ln c^2$,

$$x = \frac{c^2}{2g}\ln\frac{c^2}{c^2 - v^2}, \quad v^2 = c^2(1 - \mathrm{e}^{-2gx/c^2}). \qquad (14)$$

Se putea integra şi definit :

$$\int_0^x \mathrm{d}x = x = -\frac{c^2}{2g}\int_0^v\frac{\mathrm{d}(-v^2)}{c^2 - v^2} = -\frac{c^2}{2g}\ln\frac{c^2 - v^2}{c^2}.$$

Dacă punem în (14) $x = h_m$ (6) obţinem v' :

$$v'^2 = c^2(1 - \mathrm{e}^{-\ln(1+v_0^2/c^2)}) = c^2\left(1 - \frac{1}{1 + v_0^2/c^2}\right) = \frac{v_0^2}{1 + v_0^2/c^2},$$

$$v' = v_0 : \sqrt{1 + v_0^2/c^2} = 1 : \sqrt{1/v_0^2 + 1/c^2}. \qquad (15)$$

** **1.2.151.** a) $F\cos\alpha - \mu(mg - F\sin\alpha) - kv = ma = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$. (1)

Viteza limită, maximă posibilă, se obţine cînd forţele îşi fac echilibru $\left(\text{atunci în membrul drept } a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0 \text{ şi } v = c\right)$:

$$c = \frac{1}{k}[F\cos\alpha - \mu(mg - F\sin\alpha)]. \qquad (2)$$

b) Folosind (2) putem scrie (1) astfel :

$$kc - kv = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}. \qquad (3)$$

Separăm variabilele şi integrăm :

$$\mathrm{d}t = \frac{m}{k}\,\frac{\mathrm{d}v}{c - v}, \quad \int\mathrm{d}t = t = \frac{m}{k}\int\frac{\mathrm{d}v}{c - v} = -\frac{m}{k}[\ln(c - v) + C],$$

unde constanta de integrare se determină din condiţia iniţială : la $t = 0$ avem $v = 0$: $0 = \ln c + C$, $C = -\ln c$,

$$t = -\frac{m}{k}\ln\frac{c - v}{c} = \frac{m}{k}\ln\frac{c}{c - v}, \quad v = c(1 - \mathrm{e}^{-kt/m}). \qquad (4)$$

Se putea integra și definit (limitele de integrare se corespund):

$$\int_0^t \mathrm{d}t = t = \frac{m}{k}\int_0^v \frac{\mathrm{d}v}{c-v} = -\frac{m}{k}\ln\frac{c-v}{c}.$$

Se vede din (4) că viteza limită c se obține teoretic pentru $t \to \infty$. Continuăm integrarea:

$$\mathrm{d}x = v\mathrm{d}t, \int \mathrm{d}x = x = \int c(1 - \mathrm{e}^{-kt/m})\mathrm{d}t = ct + \frac{cm}{k}\mathrm{e}^{-kt/m} + C',$$

unde constanta de integrare C' se obține din condiția inițială: la $t = 0$ avem $v = 0$, $x = 0$: $0 = \frac{mc}{k} + C'$, $C' = -\frac{mc}{k}$,

$$x = ct + c\frac{m}{k}(\mathrm{e}^{-kt/m} - 1). \tag{5}$$

Se putea integra și definit (limitele de integrare se corespund):

$$\int_0^x \mathrm{d}x = x = \int_0^t c(1 - \mathrm{e}^{-kt/m})\,\mathrm{d}t = ct + c\,\frac{m}{k}\,\mathrm{e}^{-kt/m}\Big|_0^t.$$

Dacă introducem $t(4)$ în $x(5)$ găsim:

$$x = \frac{mc}{k}\left(\ln\frac{c}{c-v} - \frac{v}{c}\right). \tag{6}$$

Această ecuație se poate obține printr-o integrare directă, înmulțind ecuația (3) cu $\mathrm{d}x = v\mathrm{d}t$:

$$k(c-v)\mathrm{d}x = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}v\,\mathrm{d}t = mv\,\mathrm{d}v,$$

(aceasta este de fapt forma diferențială a teoremei variației energiei cinetice: $\mathrm{d}L = F\mathrm{d}x = \mathrm{d}E_c = mv\mathrm{d}v$),

$$\mathrm{d}x = \frac{mv\mathrm{d}v}{k(c-v)} = \frac{m}{k}\,\frac{v-c+c}{c-v}\,\mathrm{d}v,$$

$$\int \mathrm{d}x = x = \frac{m}{k}\int\frac{v-c+c}{c-v}\,\mathrm{d}v = \frac{m}{k}\left[\int -\mathrm{d}v - c\int\frac{\mathrm{d}(-v)}{c-v}\right] =$$

$$= \frac{m}{k}\,[-v - c\ln(c-v) + C''],$$

unde constanta de integrare C'' se determină din condiția inițială: la $t = 0$ avem $v = 0$: $0 = -c\ln c + C''$, $C'' = c\ln c$.

$$x = \frac{m}{k}\left[-v + c\ln\frac{c}{c-v}\right]. \tag{6}$$

Se poate integra și definit (limitele de integrare se corespund):

$$\int_0^x \mathrm{d}x = x = \frac{m}{k}\int_0^v\left(-1 + \frac{c}{c-v}\right)\mathrm{d}v = \frac{m}{k}\left(-v - c\ln\frac{c-v}{c}\right).$$

**** 1.2.152.** Fie $x < l$ distanța cu care intră pe asfalt frontul saniei. Atunci forța de frecare:

$$F_f = \mu\,mg\,\frac{x}{l} = kx,\ k = \frac{\mu mg}{l}, \tag{1}$$

iar ecuaţia principiului II al mecanicii dă:

$$- mg\frac{x}{l} = - kx = ma = m\frac{dv}{dt} = m\ddot{x}, \tag{2}$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \text{ sau } \ddot{x} + \frac{\mu g}{l}x = 0 \text{ sau } \ddot{x} + \omega^2 x = 0,$$

$$\omega = \sqrt{\mu g/l} = \sqrt{k/m}. \tag{3}$$

Am obţinut binecunoscuta ecuaţie diferenţială a oscilatorului armonic a cărei soluţie este:

$$x = A\sin(\omega t + \alpha), \tag{4}$$

unde constantele de integrare A — amplitudinea şi α — faza iniţială se determină din condiţiile iniţiale.

O cale mai fizică de a găsi soluţia ecuaţiei (3) este următoarea. Înmulţim ambii membri ai ecuaţiei cu $2\frac{dx}{dt} = 2\dot{x}$:

$$2\dot{x}\ddot{x} + \omega^2 x\dot{x} = 0 \text{ sau } (\dot{x}^2)^{\cdot} + \omega^2(x^2)^{\cdot} = 0$$

$$\text{sau } \frac{d}{dt}(\dot{x})^2 + \omega^2\frac{d}{dt}(x^2) = 0 \text{ sau } \frac{d}{dt}(\dot{x}^2 + \omega^2 x^2) = 0,$$

ceea ce înseamnă (prin integrare) că

$$\dot{x}^2 + \omega^2 x^2 = \text{const} \quad \text{sau} \quad \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = E = \text{const}, \tag{5}$$

$$(k = m\omega^2,\ E = E_c + E_p),$$

deci această *primă integrală* reprezintă legea conservării energiei; constanta de integrare din (5) este chiar energia care se conservă. Scoatem viteza din (3) şi continuăm integrarea:

$$v = \sqrt{2E/m - kx^2/m} = \frac{dx}{dt}, \text{ de unde } dt = \frac{dx}{\sqrt{2E/m - \omega^2 x^2}},$$

$$\int_{t_0}^{t} dt = t - t_0 = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{2E/m - \omega^2 x^2}} = \omega \arcsin\frac{\omega x}{\sqrt{2E/m}}.$$

$$x = \frac{1}{\omega}\sqrt{2E/m}\sin\omega(t - t_0) = A\sin(\omega t + \alpha), \left(E = \frac{1}{2}kA^2\right). \tag{6}$$

Revenim la problema noastră. Constanta α din (4) se determină din condiţia iniţială: la $t = 0$ avem $x = 0$, deci $\alpha = 0$; $x = A\sin\omega t$.
Viteza este

$$v = \dot{x} = \omega A\cos\omega t. \tag{7}$$

Constanta A se determină din condiţia iniţială: la $t = 0$ avem $v = v_0$:

$$v_0 = \omega A,\ A = v_0/\omega, \text{ atunci}$$

$$v = v_0\cos\omega t,\ x = \frac{1}{\omega}v_0\sin\omega t,\ x \leqslant l. \tag{8}$$

Condiţia de oprire şi timpul pînă la oprire:

$$v = 0 = v_0\cos\omega t,\ \omega t = \pi/2,\ \tau = \frac{\pi}{2\omega} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{\mu g}}, \quad \text{(un sfert de ,,perioadă'')}, \tag{9}$$

dacă distanța pînă la oprire $x_m \leqslant l$:

$$x_m = \frac{v_0}{\omega}\sin\omega\tau = \frac{v_0}{\omega} = v_0\sqrt{\frac{l}{\mu g}} \leqslant l, \text{ adică } l \geqslant \frac{v_0^2}{\mu g}\cdot \qquad (10)$$

Dacă însă $v_0/\omega > l$, adică $l < v_0^2/(\mu g)$, atunci calculăm timpul t' și viteza $\boldsymbol{v}'$ cînd sania intră complet pe asfalt : $x = l$:

$$l = \frac{1}{\omega}v_0\sin\omega t', \;\; t' = \frac{1}{\omega}\arcsin\frac{\omega l}{v_0} = \sqrt{\frac{l}{\mu g}}\arcsin\frac{\sqrt{\mu g l}}{v_0}, \qquad (11)$$

$$v' = v_0\cos\omega t' = v_0\sqrt{1 - \omega^2 l^2/v_0^2} = \sqrt{v_0^2 - \omega^2 l^2} = \sqrt{v_0^2 - \mu g l}. \qquad (12)$$

De aici încolo sania lunecă uniform încetinit cu accelerația $a = -\mu g$, deci timpul suplimentar și distanța suplimentară parcursă :

$$t_m = -\frac{v'}{a} = \frac{v'}{\mu g} = \frac{1}{\mu g}\sqrt{v_0^2 - \mu g l}, \;\; x_m = -\frac{v'^2}{2a} =$$

$$= \frac{v'^2}{2\mu g} = \frac{1}{2\mu g}(v_0^2 - \mu g l). \qquad (13)$$

Timpul total și distanța totală pînă la oprire vor fi atunci în acest caz :

$$T = \sqrt{\frac{l}{\mu g}}\arcsin\frac{\sqrt{\mu g l}}{v_0} + \frac{1}{\mu g}\sqrt{v_0^2 - \mu g l},$$

$$L = l + \frac{1}{2\mu g}(v_0^2 - \mu g l), \text{ dacă } l < \frac{v_0^2}{\mu g}. \qquad (14)$$

** **1.2.153.** $-kv^3 = ma = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$, (1)

Separăm variabilele și integrăm :

$$\mathrm{d}t = -\frac{m\mathrm{d}v}{kv^3}, \int\mathrm{d}t = t = -\frac{m}{k}\int\frac{\mathrm{d}v}{v^3} = \frac{m}{2kv^2} + C,$$

unde constanta de integrare se determină din condiția inițială : la $t = 0$ avem $v = v_0$; rezultă $C = -m/(2kv_0^2)$,

$$t = \frac{m}{2k}(1/v^2 - 1/v_0^2), \;\; v^2 = 1 : (1/v_0^2 + 2kt/m). \qquad (2)$$

Se poate integra și definit (limitele de integrare se corespund) :

$$\int_0^t \mathrm{d}t = t = -\frac{m}{k}\int_{v_0}^{v}\frac{\mathrm{d}v}{v^3} = \frac{m}{2k}\frac{1}{v^2}\Bigg|_{v_0}^{v} = \frac{m}{2k}\left(\frac{1}{v^2} - \frac{1}{v_0^2}\right).$$

Continuăm integrarea :

$$\mathrm{d}x = v\mathrm{d}t, \int\mathrm{d}x = x = \int v\mathrm{d}t = \int\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1/v_0^2 + 2kt/m}} = \frac{m}{k}\sqrt{1/v_0^2 + 2kt/m} + C',$$

unde constanta de integrare se determină din condiția inițială : la $t = 0$ avem $x = 0$: $0 = m/(kv_0) + C'$, $C' = -m/(kv_0)$,

$$x = \frac{m}{k}(\sqrt{1/v_0^2 + 2kt/m} - 1/v_0). \qquad (3)$$

Se putea integra și definit (limitele de integrare se corespund) :

$$\int_0^x \mathrm{d}x = x = \int_0^t\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1/v_0^2 + 2kt/m}} = \frac{m}{k}\sqrt{1/v_0^2 + 2kt/m}\Bigg|_0^t.$$

Introducem $t(2)$ în $x(3)$:

$$x = \frac{m}{k}(1/v - 1/v_0). \qquad (4)$$

Putem obţine această ecuaţie prin integrare directă înmulţind ambii membri ai ecuaţiei fundamentale (1) cu $dx = vdt$:

$$-kv^3 dx = m\frac{dv}{dt}vdt = mvdv.$$

Separăm variabilele şi integrăm:

$$dx = -\frac{mdv}{kv^2}, \int dx = x = \frac{m}{k}\int -\frac{dv}{v^2} = \frac{m}{kv} + C'',$$

unde constanta de integrare C'' se determină din condiţia iniţială: la $t = 0$ avem $v = v_0$ şi $x = 0$: $0 = \frac{m}{kv_0} + C''$, $C'' = -\frac{m}{kv_0}$,

$$x = \frac{m}{k}(1/v - 1/v_0).$$

Se putea integra şi definit (limitele de integrare se corespund):

$$\int_0^x dx = x = \frac{m}{k}\int_{v_0}^{v} -\frac{dv}{v^2} = \frac{m}{k}\frac{1}{v}\Bigg|_{v_0}^{v} = \frac{m}{k}\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v_0}\right).$$

Punem în (4) condiţia la margine: $x = h$, $v = v'$:

$$h = \frac{m}{k}(1/v' - 1/v_0), \quad \frac{m}{k} = h : (1/v' - 1/v_0), \qquad (5)$$

pe care o introducem în timpul $t(2)$:

$$t = \frac{1}{2}h(1/v^2 - 1/v_0^2) : (1/v' - 1/v_0). \qquad (6)$$

Timpul de traversare cerut se obţine de aici punînd $v = v'$:

$$\tau = \frac{1}{2}h(1/v'^2 - 1/v^2) : (1/v' - 1/v_0) = \frac{1}{2}h(1/v' + 1/v_0) = 1{,}67 \text{ ms}. \qquad (7)$$

** **1.2.154.** a) Luăm un element de fir de lungime ds, care subîntinde un unghi la centru infinit mic $d\theta$. Cele două tensiuni de la capetele sale diferă infinit de puţin între ele (considerăm $T_0 > T'$, $dT < 0$), de aceea rezultanta lor este la limită (Vd. figura):

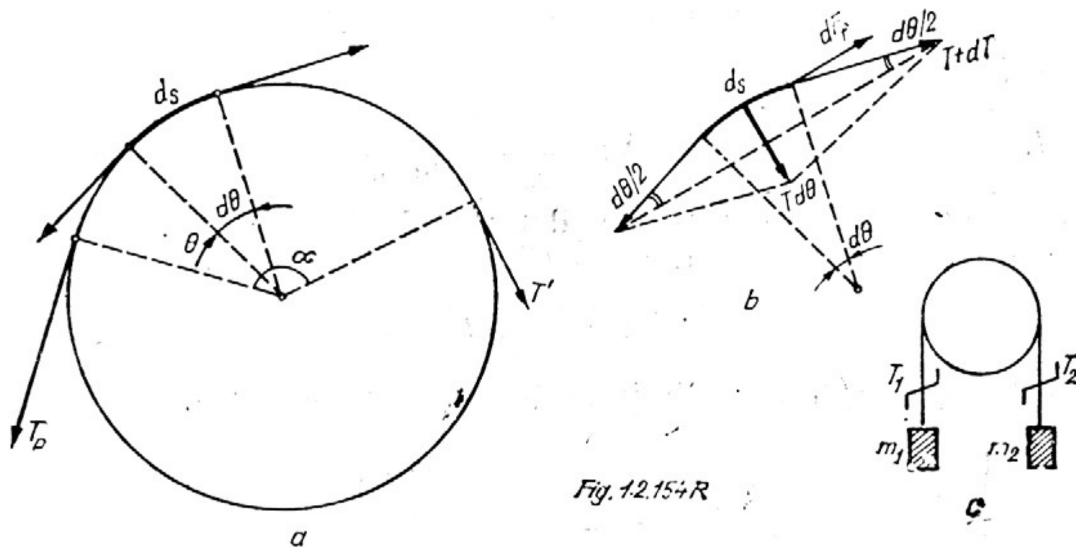


Fig. 1.2.154R

$$2T\sin\frac{\mathrm{d}\theta}{2} = 2T\frac{\mathrm{d}\theta}{2} = T\mathrm{d}\theta, \quad \textbf{(1)}$$

această rezultantă reprezintă forța de apăsare normală. În cazul lunecării forța de frecare la lunecare pentru elementul ds considerat va fi:

$$\mathrm{d}F_f = \mu \mathrm{d}N = \mu T \mathrm{d}\theta. \quad (2)$$

La *limita lunecării* (cînd firul este gata-gata să lunece sau chiar a pornit să lunece infinit de puțin) accelerația este încă zero și avem încă satisfăcută condiția de echilibru pe direcția tangențială:

$$\mathrm{d}T = -\mathrm{d}F_f = -\mu T \mathrm{d}\theta.$$

Separăm variabilele și integrăm:

$$\frac{\mathrm{d}T}{T} = -\mu\mathrm{d}\theta, \int\frac{\mathrm{d}T}{T} = -\mu\int\mathrm{d}\theta, \ \ln T = -\mu\theta + C,$$

unde constanta de integrare se determină din condiția la margine: pentru $\theta = 0$ avem $T = T_0(\neq 0)$: $\ln T_0 = C$,

$$\ln\frac{T}{T_0} = -\mu\theta, \ T = T_0\,\mathrm{e}^{-\mu\theta}, \ (\theta < \alpha). \quad \textbf{(3)}$$

Se putea integra și definit (limitele se corespund):

$$\int_{T_0}^{T}\frac{\mathrm{d}T}{T} = -\mu\int_0^{\theta}\mathrm{d}\theta, \ \ln\frac{T}{T_0} = -\mu\theta, \ T = T_0\mathrm{e}^{-\mu\theta}.$$

b) Punînd în (3) condiția $\theta = \alpha$, găsim raportul tensiunilor de la capete la limită în momentul lunecării:

$$T' = T_0\,\mathrm{e}^{-\mu\alpha}, \ T_0/T' = \mathrm{e}^{\mu\alpha}. \quad \textbf{(4)}$$

c) Condiția de lunecare este evident (4) în care tensiunile sînt greutățile respective:

$$m_1/m_2 \geqslant \mathrm{e}^{(2n+1)\pi\mu}. \quad (5)$$

$$m_1g - T_1 = m_1a, \ T_2 - m_2g = m_2a, \ T_2 = T_1\,\mathrm{e}^{-(2n+1)\pi\mu}, \quad \textbf{(6)}$$

$$a = g[m_1/m_2 - \mathrm{e}^{(2n+1)\pi\mu}] : [m_1/m_2 + \mathrm{e}^{(2n+1)\pi\mu}], \quad \textbf{(7)}$$

$$T_1 = T_2\,\mathrm{e}^{(2n+1)\pi\mu}, \ T_2 = 2m_1g : [m_1/m_2 + \mathrm{e}^{(2n+1)\pi\mu}], \quad \textbf{(8)}$$

$$T_1 - T_2 = 2m_2g[\mathrm{e}^{(2n+1)\pi\mu} - 1] : [m_1/m_2 + \mathrm{e}^{(2n+1)\pi\mu}]. \quad \textbf{(9)}$$

**** 1.2.155.** Pentru un corp cu *masa variabilă* avem ecuația (I.V. Meșcerski 1897):

$$\vec{F} + \vec{F}_r = ma, \text{ unde } \vec{F}_r = \vec{v}_{\mathrm{rel}}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}, \quad (1)$$

unde $\vec{F}_r$ este *forța reactivă* și $\vec{v}_{\mathrm{rel}}$ — viteza relativă (față de corp) de expulzare a masei.

În cazul nostru, $\vec{F} = 0$:

$$\vec{v}_{\mathrm{rel}}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = m\vec{a} = m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}, \ \mathrm{d}\vec{v} = \vec{v}_{\mathrm{rel}}\frac{\mathrm{d}m}{m},$$

$$\int_0^{\vec{v}}\mathrm{d}\vec{v} = \vec{v} = \int_{m_0}^{m}\vec{v}_{\mathrm{rel}}\frac{\mathrm{d}m}{m} = \vec{v}_{\mathrm{rel}}\ln\frac{m}{m_0} = -\vec{v}_{\mathrm{rel}}\ln\frac{m_0}{m}. \quad (2)$$

Viteza rachetei este opusă vitezei de expulzare a gazelor. Cînd masa rachetei se reduce la jumătate, viteza atinsă de rachetă va fi:

$$\vec{v} = -\vec{v}_{\mathrm{rel}}\ln 2 = -0{,}693\,\vec{v}_{\mathrm{rel}} = -0{,}7\,\vec{v}_{\mathrm{rel}}.$$

Abia cînd masa rachetei se reduce de e ori viteza devine $\vec{v} = -\vec{v}_{\mathrm{rel}}$.

** **1.2.156.** Pentru un corp cu *masa variabilă* avem ecuația (**I.V. Meșcerski 1897**):

$$\vec{F} + \vec{F}_r = m\vec{a},\ \vec{F}_r = \vec{v}_{rel}\frac{dm}{dr} \text{ — forța reactivă.} \qquad (1)$$

În cazul nostru:

$$m\vec{g} + \vec{v}_{rel}\frac{dm}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \text{ sau } \vec{g}\,dt + \vec{v}_{rel}\frac{dm}{m} = d\vec{v}. \qquad (2)$$

Integrăm:

$$\int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}} d\vec{v} = \vec{v} - \vec{v}_0 = \int_0^t \vec{g}\,dt + \int_{m_0}^{m} \vec{v}_{rel}\frac{dm}{m} = \vec{g}\,t + \vec{v}_{rel}\ln\frac{m}{m_0},$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g}\,t - \vec{v}_{rel}\ln(m_0/m). \qquad (3)$$

În cazul lansării rachetei pe verticală din repaus, avem:

$$v = |v_{rel}|\ \ln\ (m_0/m) - gt. \qquad (4)$$

Condiția de desprindere de Pămînt:

$$F_r \geqslant m_0 g,\ \left|v_{rel}\frac{dm}{dt}\right| \geqslant m_0 g \text{ sau } D = \left|\frac{dm}{dt}\right| = -\frac{dm}{dt} \geqslant \frac{m_0 g}{|v_{rel}|},$$

unde D este debitul de ejectare a gazelor.

** **1.2.157.** a) Ecuația mișcării unui corp cu *masa variabilă* este (**I.V.** Meșcerski 1897):

$$\vec{F} + \vec{F}_r = m\vec{a},\ \vec{F}_r = \vec{v}_{rel}\frac{dm}{dt} \text{ — forța reactivă.} \qquad (1)$$

În cazul nostru $\vec{F} = 0$:

$$\vec{v}_{rel}\frac{dm}{dt} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt}. \qquad (2)$$

Proiectăm această ecuație pe direcția de mișcare a navei (pe direcția vitezei $\vec{v}$ și pe direcția transversală, perpendiculară pe direcția de mișcare a navei (pe direcția normală pe viteza navei), în sensul spre centrul de curbură:

$$0 = ma_t = m\frac{dv}{dt}, \qquad (3)$$

$$-v_{rel}\frac{dm}{dt} = ma_n = m\frac{v^2}{R}. \qquad (4)$$

Din prima ecuație rezultă $v = |\vec{v}| = \text{const} = v_0$, adică viteza navei rămîne constantă în *modul*. Pe de altă parte (vd. figura):

$$|d\vec{v}| = 2v\sin\frac{d\theta}{2} = v\,d\theta,\ d\theta = \frac{|d\vec{v}|}{v}.$$

Luînd modulul ecuației (2) avem

$$\left|\vec{v}_{rel}\frac{dm}{dt}\right| = -v_{rel}\frac{dm}{dt} = m\frac{|d\vec{v}|}{dt},$$

astfel încît ecuația (4) devine:

$$-v_{rel}\frac{dm}{dt} = \frac{mv^2}{R} = m\frac{|d\vec{v}|}{dt},$$

deci $$d\theta = \frac{|d\vec{v}|}{v} = -\frac{v_{rel}}{v}\frac{dm}{m} = -\frac{v_{rel}}{v_0}\frac{dm}{m}.$$

Integrăm (limitele de integrare se corespund):

$$\int_0^\theta d\theta = \theta = -\frac{v_{rel}}{v_0}\int_{m_0}^{m}\frac{dm}{m} = -\frac{v_{rel}}{v_0}\ln\frac{m}{m_0} = \frac{v_{rel}}{v_0}\ln\frac{m_0}{m}. \qquad (5)$$

Se poate integra și nedefinit:

$$\int d\theta = \theta = -\frac{v_{rel}}{v_0}\int\frac{dm}{m} = -\frac{v_{rel}}{v_0}(\ln m + C),$$

unde constanta de integrare C se determină din condiția inițială: la $\theta = 0$ avem $m = m_0$: $0 = \ln m_0 + C$, $C = -\ln m_0$, deci

$$\theta = \frac{1}{v_0} v_{rel} \ln (m_0/m). \qquad (5)$$

Din ecuația (4) rezultă prin separarea variabilelor:

$$\frac{dm}{m} = -\frac{v^2}{v_{rel}R}dt = -\frac{1}{Rv_{rel}}v_0^2 dt,$$

care integrată dă:

$$\int_{m_0}^{m}\frac{dm}{m} = -\frac{1}{Rv_{rel}}v_0^2\int_0^t dt, \ \ln\frac{m}{m_0} = -\frac{1}{Rv_{rel}}v_0^2 t,$$

$$m = m_0 \exp\left\{-\frac{1}{Rv_{rel}}v_0^2 t\right\}. \qquad (6)$$

Se poate integra și nedefinit:

$$\int\frac{dm}{m} = \ln m = -\frac{1}{Rv_{rel}}v_0^2\int dt = -\frac{1}{Rv_{rel}}v_0^2 t + C,$$

unde constanta de integrare se determină din condiția inițială: la $t = 0$ avem $m = m_0$: $\ln m_0 = C$, deci

$$\ln\frac{m}{m_0} = -\frac{1}{Rv_{rel}}v_0^2 t.$$

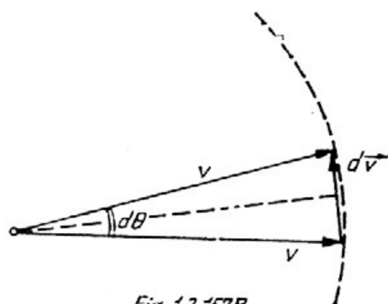


Fig. 1.2.157R

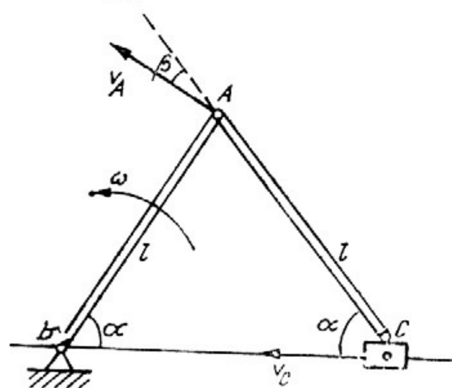


Fig. 1.2.158R

Mișcarea circulară

1.2.158. $v_C = 2v_A \sin \omega t$, $v_{Cmax} = 2\ \omega l = 10{,}0$ m/s, $a_{Cmax} = 2\omega^2 l = 50$ m/s².

1.2.159. Perioada T din enunț este față de stelele „fixe". Pămîntul are o mișcare de revoluție în jurul Soarelui de 365 zile, deaceea trecerea Soarelui la meridian „întîrzie" cu $T/365$:

$$T' = 23 \text{ h } 56 \text{ min } 4 \text{ s}\left(1 + \frac{1}{365}\right) = 24 \text{ h}.$$

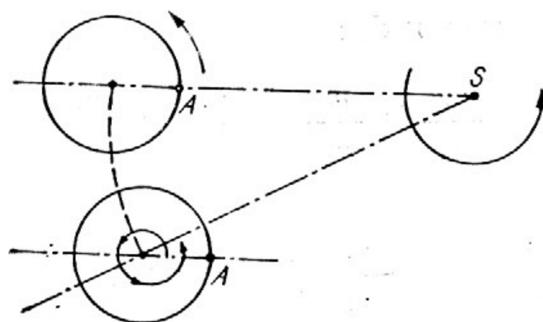


Fig. 1.2.159R

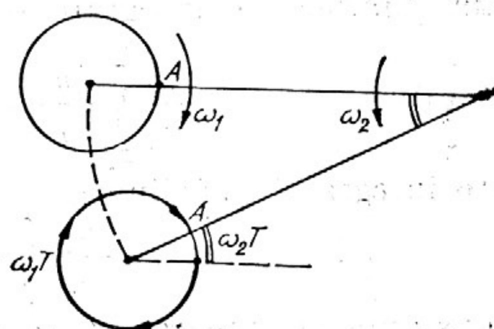


Fig. 1.2.160R

1.2.160. $T = T_1T_2 : (T_1 + T_2) = 117$ zile terestre.

1.2.161. Un cerc orizontal. La solstițiul de vară (iarnă) cercul este la înălțimea unghiulară de 23°30′ deasupra (dedesubtul) orizontului, iar la echinocțiu cercul este chiar la orizont.

1.2.162. La echinocțiu: un semicerc cu înălțimea unghiulară maximă de 23°30′ deasupra sudului. La solstițiul de vară: un cerc care atinge orizontul la nord și are înălțimea unghiulară de 47° deasupra sudului.

1.2.163. $\mathrm{tg}\,\alpha = [m\omega^2 r\sin\varphi] : [mg - m\,\omega^2 r\cos\varphi] \approx \dfrac{1}{2g}\omega^2 R\sin 2\varphi$, $x = R\sin\varphi \approx \dfrac{1}{2g}\omega^2R^2\sin 2\varphi$, $x_{\max} \approx \dfrac{1}{2g}\omega^2R^2 = 10$ km, $(\omega = 2\pi/T)$.

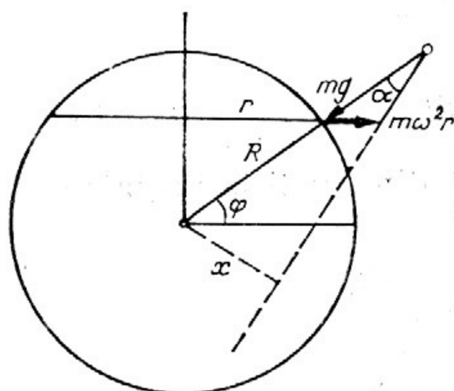


Fig. 1.2.163R

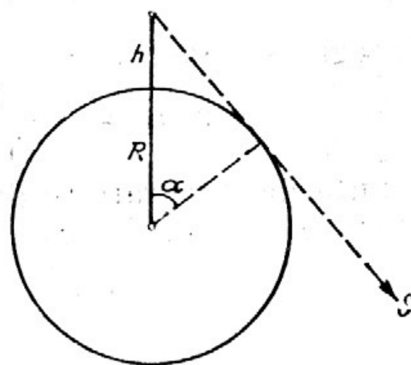


Fig. 1.2.164R

1.2.164. $t = T\dfrac{\alpha}{2\pi} \approx \dfrac{T}{2\pi}\sqrt{2h/R} = 12{,}8$ min.

1.2.165. a) $T_r = TT' : (T - T') = 30{,}33$ zile. b) În T_r steaua se deplasează față de planetă cu $\theta = (\omega_0 - \omega)T_r = 2\pi\cdot 30{,}24 = 2\pi\cdot\dfrac{756}{25}$; $\dfrac{\theta}{2\pi} = \dfrac{m}{N}$ = număr rațional, atunci $T_r' = NT_r = 758{,}25$ zile și eclipsa se produce la intervale T_r' în cele N puncte de pe ecuator.

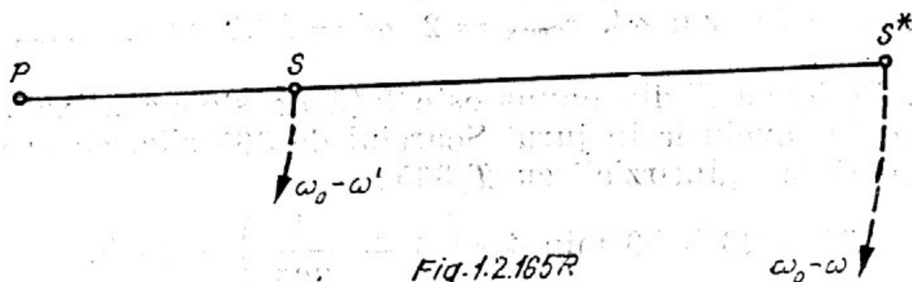


Fig. 1.2.165R

1.2.166. $[l/b] = n = 9,\ t = \frac{l\alpha}{v} + \frac{\pi}{2v}(n+1)(l - nb/2) = 1{,}67$ s.

1.2.167. $R = \frac{l}{2}(\omega_2 + \omega_1) : (\omega_2 - \omega_1) = 5{,}6$ m, $\Omega = (\omega_2 - \omega_1)r/l =$
$= 0{,}25$ rad/s.

(*) **1.2.168.** $h = l \sin\theta + \frac{1}{2g}v^2 \cos^2\theta = f(\theta),$ (1)

h este funcţie de θ. Condiţia de extremum este anularea derivatei $f'(\theta)$:

$$h'(\theta) = l \cos\theta - \frac{1}{g}v^2 \cos\theta \sin\theta = 0, \quad (2)$$

de unde $\cos\theta = 0,\ \theta = \pm 90°,\ h = \pm l$ (3)

şi piatra pleacă orizontal, înălţimea fiind minimă (soluţie banală). Cealaltă soluţie (dacă $v^2 > lg$):

$$\sin\theta = lg/v^2 = g/(4\pi^2 n^2 l) = 0{,}248,\quad \theta = 14°22', \quad (4)$$

dă înălţimea maximă:

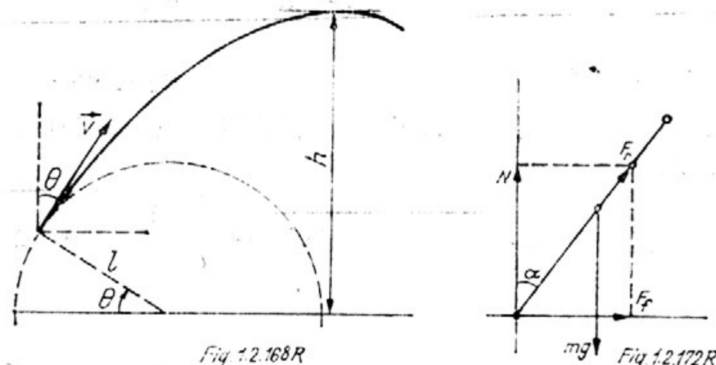


Fig. 1.2.168R Fig. 1.2.172R

$$h_{max} = l^2g/(2v^2) + v^2/(2g) = 2{,}12 \text{ m}. \quad (5)$$

Soluţia (4) se poate obţine şi elementar, fără derivate. În adevăr:

$$h = l \sin\theta + \frac{1}{2g} v^2(1 - \sin^2\theta) = f(\sin\theta) \quad (1)$$

este o funcţie pătratică în $\sin\theta$ (graficul este o parabolă) care are un *maxim* $(a = -v^2/(2g) < 0)$ pentru

$$\sin\theta = \left[-\frac{b}{2a}\right] = -\frac{l}{2[-v^2/(2g)]}. \quad \textbf{(4)}$$

Or, sinusul este monoton crescător cu unghiul θ în primul cadran. Cazurile extreme („marginale") $\theta = \pm 90°$ se studiază direct.

1.2.169. Dreapta.

1.2.170. $n > \frac{1}{2\pi}\sqrt{g/(\mu R)} = 0{,}80$ rot/s.

1.2.171. $\omega \geqslant \sqrt{\mu mg/(MR)} = 2{,}0$ rad/s.

1.2.172. $\alpha_{max} = \varphi,\ v_{max} = \sqrt{\mu g R} = 7{,}84\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

1.2.173. $a_{max} = \mu(g \mp v^2/R) = 2{,}4$ m/s², resp. 7,4 m/s².

1.2.174. $F'_{max} = F_{max}(1 \mp v^2/(gR)) = 0$, resp. 30 kN.

1.2.175. $v^2_{max} = gR\left(\cos\frac{l}{2R} - \frac{1}{\mu}\sin\frac{l}{2R}\right),\ v_{max} = 10$ m/s.

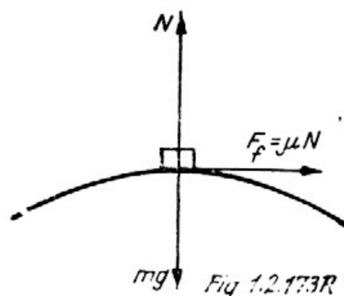


Fig. 1.2.173R

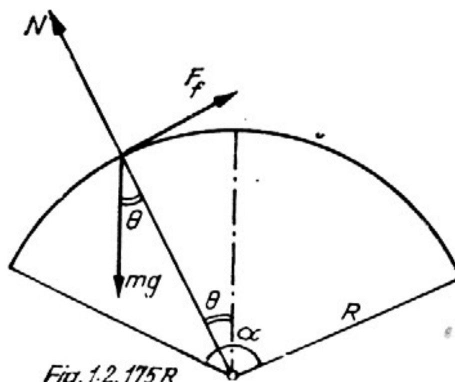


Fig. 1.2.175R

1.2.176. $\mu \geqslant (gR + v^2 \mathrm{tg}\,\alpha) : (gR\mathrm{tg}\,\alpha - v^2) = 0{,}38.$

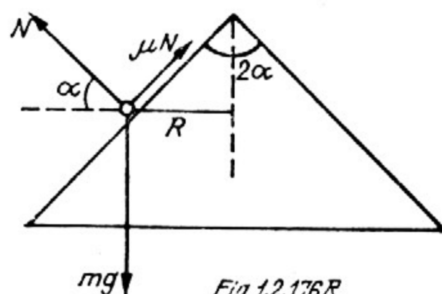


Fig. 1.2.176R

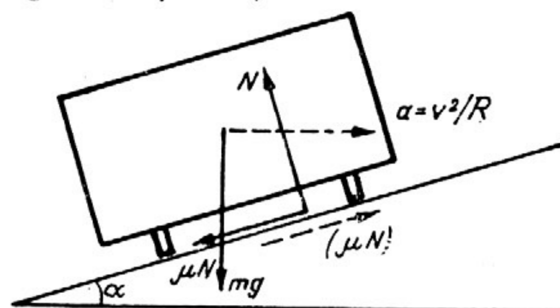
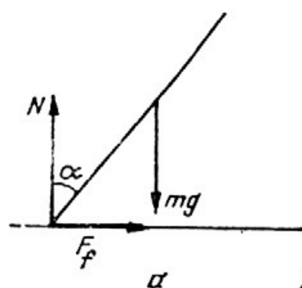


Fig. 1.2.177R

1.2.177. $\mathrm{tg}(\alpha + \varphi) = v_{\max}^2/(Rg) = 0{,}5774, \quad \varphi = 10°; \quad gR\mathrm{tg}(\alpha - \varphi) = v_{\min}^2, \; v_{\min} = 11$ m/s.

1.2.178. $v'_{\max} : v_{\max} = \mathrm{tg}\sqrt{(\varphi + \beta) : \mathrm{tg}\,\varphi} = \sqrt{\frac{1}{\mu}(\mu + \mathrm{tg}\,\beta) : (1 - \mu\,\mathrm{tg}\,\beta)} = 1{,}15.$



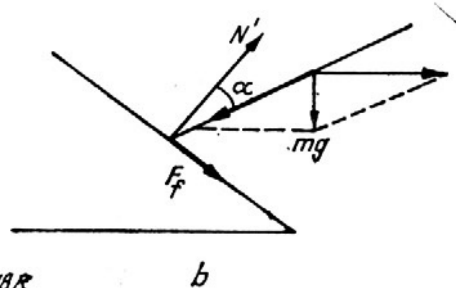


Fig. 1.2.178R

1.2.179. $\cos\theta = g/(\omega^2 R)$, a) $\theta = 0$, b) $\theta = 60°$, $h = R(1 - \cos\theta) = 19{,}6$ cm.

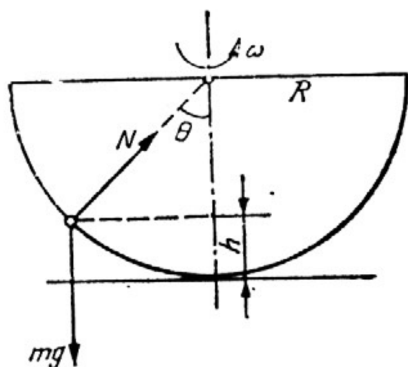


Fig. 1.2.179R

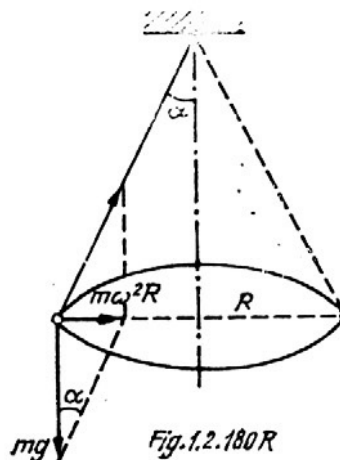


Fig. 1.2.180R

1.2.180. $R = \sqrt{l^2 - g^2/\omega^4} = 0{,}79$ m, dacă $\omega > \sqrt{g/l}$, altfel $R = 0$.

1.2.181. $T_2 = T_1\sqrt{(g\cos\alpha_2) : [(g - a)\cos\alpha_1]} = 1{,}19$ s.

1.2.182. $N \cong \sqrt{2gh} : (2\pi v) \cong 3$ rot.

1.2.183. $N = 4\pi^2 dmM : [(m + M)T^2] = 4{,}0$ kN.

1.2.184. $n_0 = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{g} : \sqrt[4]{(l + r)^2 - (R + r)^2} = 0{,}56$ rot/s.

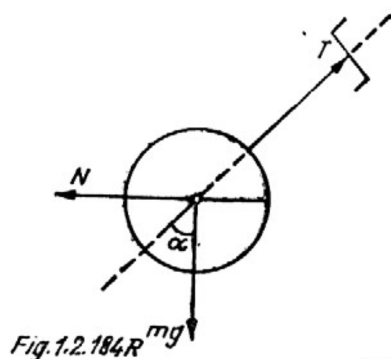


Fig.1.2.184R

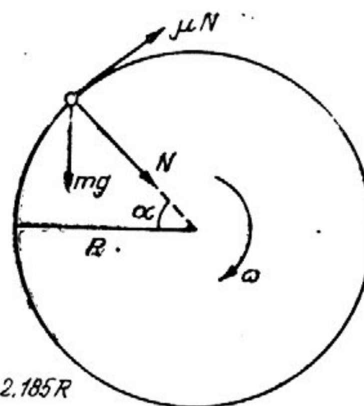


Fig.1.2.185R

1.2.185. $v_{min} = \sqrt{gR : \sin\varphi} = 4{,}9$ m/s, pentru $\alpha = \varphi$.

1.2.186. $\omega = \sqrt{2k\left(\cos\dfrac{\alpha}{2} - \cos\dfrac{\pi}{4}\right) : \left[(M - m)\cos\dfrac{\alpha}{2}\right]} = 1{,}42$ rad/s.

1.2.187. $v_0 = (1/\cos\alpha)\sqrt{Rg\sin(\alpha - \varphi) : \cos\varphi} = 0{,}23$ m/s.

1.2.188. $k = m\,\mathrm{tg}\,\alpha/R \cong 1 \cdot 10^{-2}$ kg/m.

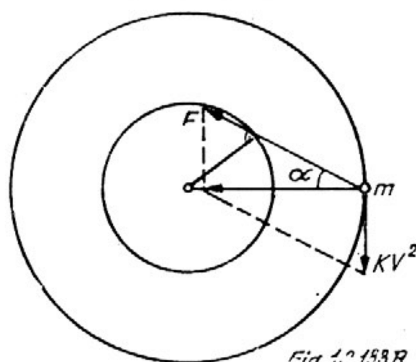


Fig.1.2.188R

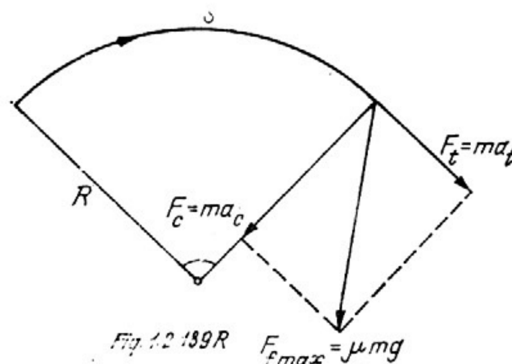


Fig.1.2.189R

1.2.189. $v_{max} = \sqrt{\mu g} : \sqrt[4]{1/R^2 + 1/(4s^2)} = 14\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}}$.

1.2.190. $v_{max} = \sqrt{gR} : \sqrt[4]{1 + 1/(4\alpha^2)} = 14{,}6$ m/s.

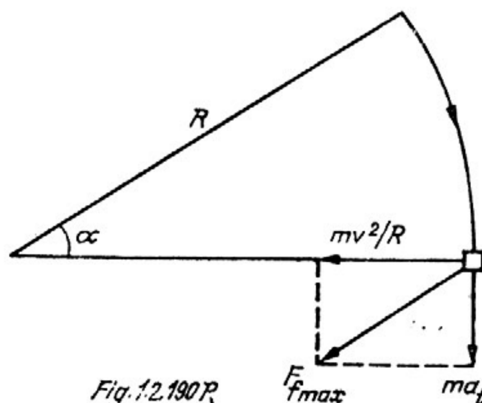


Fig.1.2.190R

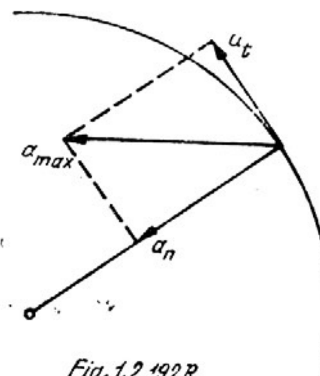


Fig.1.2.192R

1.2.191. $T = 2\pi n\sqrt{L} : \sqrt{g(1 + m_2/m_1)} = 12{,}56$ s.

1.2.192. $\Delta t' = \Delta v : \sqrt{(\Delta v/\Delta t)^2 - v_0^4/R^2} = 0{,}17$ s, $R' = v_0^2\Delta t/\Delta v = 80$ m.

1.2.193. $v = \sqrt{R}\sqrt[4]{\mu^2 g^2 - a_t^2} = 17$ m/s, $P = m a_t v = 17$ kN.

1.2.194. $T = m v_0^2 \sin^2\alpha : [l \cos^4 (\alpha - \beta)] = 250$ N.

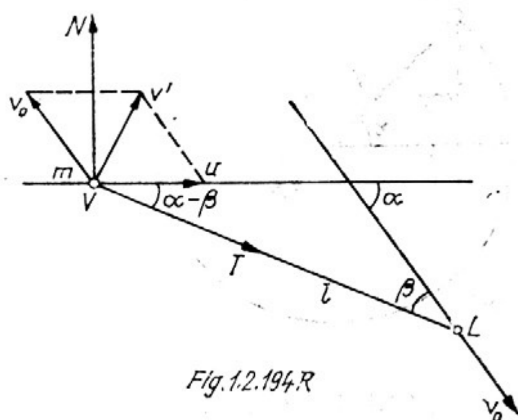


Fig. 1.2.194 R

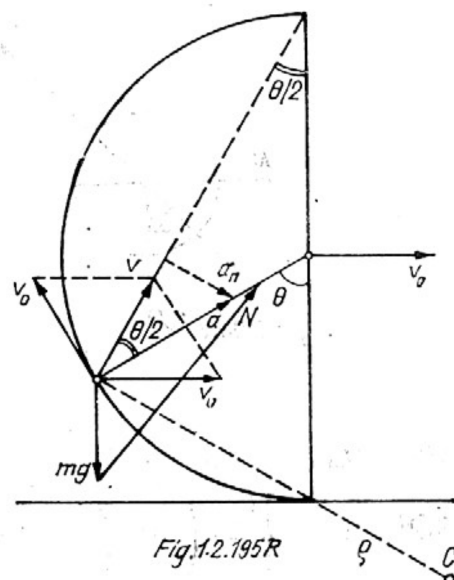


Fig. 1.2.195 R

1.2.195. $N^2 = (mg)^2 + (mv_0^2/R)^2 + 2mg \cdot (mv_0^2/R)\cos\theta$, $\rho = 4R\sin\dfrac{\theta}{2}$.

1.2.196. $\omega^2 > g\,\mathrm{ctg}\,\alpha : (D/2 + h\,\mathrm{tg}\,\alpha)$, deci $(h \to 0)$ $n > \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{2g\,\mathrm{ctg}\,\alpha/D} =$
$= 0{,}24\,\dfrac{\text{rot}}{\text{s}}$.

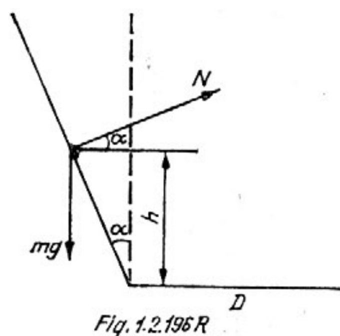


Fig. 1.2.196 R

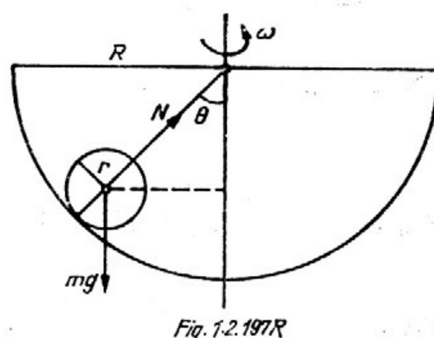
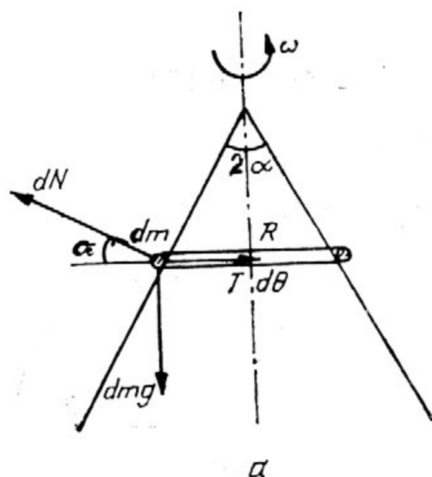


Fig. 1.2.197 R

1.2.197. $\cos\theta = g : [4\pi^2 n^2 (R - r)]$, $\theta = 60°$, ($\theta = 0$ — poziție instabilă).

(*) **1.2.198.** Considerăm un element de masă $\mathrm{d}m$ al lănțișorului care subîntinde un unghi la centru elementar $\mathrm{d}\theta$ (în radiani). Lănțișorul fiind uniform și omogen avem $\dfrac{\mathrm{d}m}{m} = \dfrac{\mathrm{d}\theta}{2\pi}$. Asupra elementului de masă $\mathrm{d}m$ acționează următoarele forțe: $\mathrm{d}m \cdot g$ — greutatea vertical în jos, $\mathrm{d}N$ — reacțiunea normală a conului, și cele două tensiuni T de la capete. Compunem întîi cele două tensiuni: conform figurii rezultanta lor este



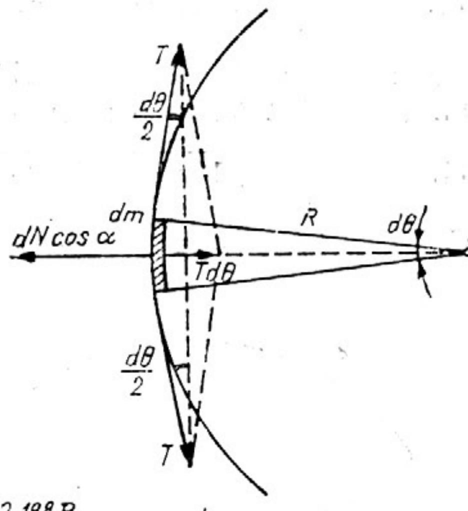


Fig. 1.2.198 R

$$2T \sin\frac{d\theta}{2} = 2T\left[\sin\frac{d\theta}{2} : \frac{d\theta}{2}\right] \cdot \frac{d\theta}{2}. \quad (1)$$

Dar

$$\frac{\sin x}{x} \to 1 \text{ cînd } x \to 0, \quad (2)$$

deci $\sin\frac{d\theta}{2} : \frac{d\theta}{2} = 1$ deoarece este limita lui $\sin\frac{\Delta\theta}{2} : \frac{\Delta\theta}{2}$ cînd $\frac{\Delta\theta}{2} \to$ $\to 0$ sau altfel spus totdeauna $\sin dx = dx$ dacă dx este infinit mic (în radiani). Prin urmare, *rezultanta este* $Td\theta$.

Merită reţinut acest rezultat fiindcă va interveni şi în alte probleme. Elementul dm avînd o mişcare circulară uniformă, acceleraţia sa este centripetă, deci ecuaţiile mişcării pe direcţia verticală şi pe direcţia radială, centripetă, sînt :

$$dN \sin\alpha - dm\, g = 0,\ T d\theta - dN \cos\alpha = dm \cdot \omega^2 R. \quad (3)$$

Înlocuind $d\theta = 2\pi \frac{dm}{m}$ şi eliminînd dN, găsim :

$$T = \frac{m}{2\pi}(g \operatorname{ctg} \alpha + \omega^2 R) = 1{,}30\ \text{N}. \quad (4)$$

Problema se poate rezolva şi fără a folosi diferenţiale, ci judecînd cu variaţii foarte mici care descresc (tind) către zero : Δm, $\Delta\theta$ şi cunoscînd faptul că pentru unghiuri mici $\alpha < 6°$ avem binecunoscuta aproximaţie : $\sin\alpha \approx \alpha$ (în radiani), care este cu atît mai precisă cu cît α este mai mic, adică $\sin\alpha \to \alpha$ cînd $\alpha \to 0$ (adică *la limită* $\sin_{\alpha\to 0} \alpha = \alpha$).

1.2.199. $T_1 = (m\omega^2 R \cos\beta + mg \sin\beta) : \sin(\alpha + \beta)$, $T_2 = (m\omega^2 R\cos\alpha - mg \sin\alpha) : \sin(\alpha + \beta)$, dacă $\omega \geqslant \sqrt{g \operatorname{tg}\alpha / R)}$. a) Dacă $\beta < \alpha$, atunci $T_1 > T_2$ şi se rupe întîi firul superior. b) Dacă $\beta > \alpha$, pentru $\omega_0^2 = \frac{g}{R}(\sin\alpha + \sin\beta) : (\cos\alpha - \cos\beta)$ avem $T_1 = T_2 = T_0 = mg : (\cos\alpha - \cos\beta)$, după care $T_2 > T_1$. Pentru $T_r < T_0$ se rupe întîi firul superior, pentru $T_r > T_0$ cel inferior.

1.2.200. $N_{1,2} = mg \cos\varphi \cos(\alpha \pm \varphi) : \sin 2\alpha = 4{,}73$ N, resp. $8{,}2$ N.

1.2.201. $v_2/v_1 = \sqrt{\operatorname{tg}(\alpha + \varphi) : \operatorname{tg}\varphi} = 1{,}2$.

1.2.202. $v = \frac{g}{v_0}\sqrt{RR_0} = 20$ m/s, $\mu = v_0^2/(R_0 g) = 0{,}245$, $\alpha = \varphi = 13°46'$, $\operatorname{tg}\alpha' = Rg/v'^2$, $\alpha' = 11°27'$.

1.2.203. $a \cong gl/(2R) = 0{,}10$ m/s², $\mu > l/(2R) = 0{,}010$.

1.2.204. $\mu = \frac{1}{g} v_0^2\sqrt{1/R^2 + 1/(4s^2)} = 0{,}20$.

1.2.205. $\mu = (g - a\operatorname{tg}\alpha) : (a + g\operatorname{tg}\alpha) = 0{,}33$.

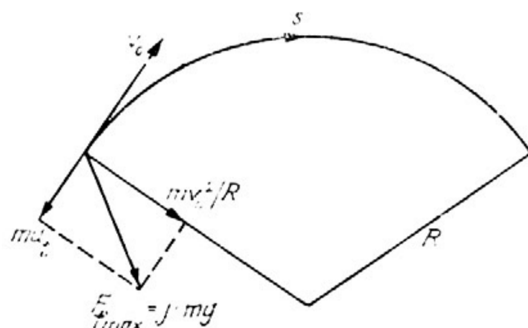


Fig. 1.2.204R

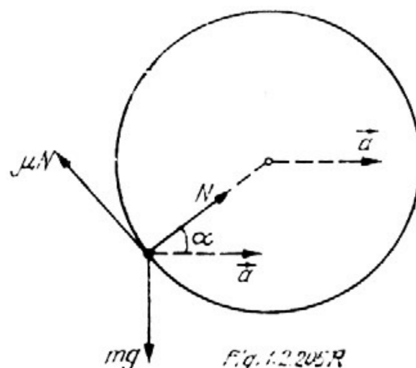


Fig. 1.2.205R

1.2.206. $\theta = \varphi = 30°$, $F_f = mg\sin\varphi = 294$ N.

1.2.207. $a_2 = g\sin^2\alpha(m_1 + m_2) : (m_1 + m_2\sin^2\alpha) = 9{,}0$ m/s².

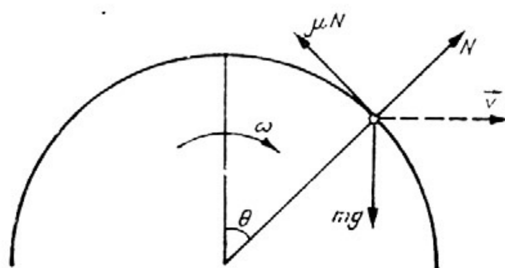


Fig. 1.2.206R

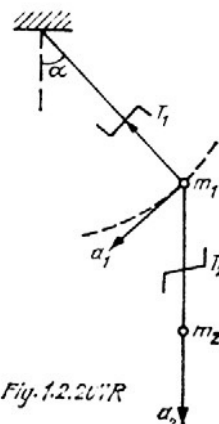


Fig. 1.2.207R

** **1.2.208.** $a_n = v^2/R$, $v = \sqrt{R(A + Bt + Ct^2)}$,

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \sqrt{R}(B + 2Ct) : [2\sqrt{A + Bt + Ct^2}],$$

$$ds = v dt, \quad \int ds = s = \int v dt =$$

$$= \int \sqrt{R}\sqrt{A + Bt + Ct^2}\, dt = \sqrt{R}\left[\frac{1}{4C}(B + 2Ct)\sqrt{A + Bt + Ct^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{4AC - B^2}{8C}\int\frac{dt}{\sqrt{A + Bt + Ct^2}}\right],$$

unde ultima integrală are expresii diferite după semnul lui C și al discriminantului, de exmplu pentru $C < 0$ și $D = B^2 - 4AC > 0$:

$$\int\frac{dt}{\sqrt{A + Bt + Ct^2}} = \frac{1}{\sqrt{-C}}\arccos\frac{B + 2Ct}{\sqrt{B^2 - 4AC}} + \text{const.}$$

* **1.2.209.** $v = \frac{ds}{dt} = \dot{s} = 3ct^2,\ t = \sqrt{v/(3c)},$

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \dot{v} = 6ct = 6c\sqrt{v/(3c)} = 2\sqrt{3cv} = 6{,}0\ \mathrm{m/s^2}.$$

• **1.2.210.** $\omega = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} = \theta'(t) = b - 3ct^2, \qquad (1)$

$$\omega = 0 = b - ct^2,\ t_m = \sqrt{b/(3c)}, \qquad (2)$$

$$\langle\omega\rangle = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\theta_m}{t_m} = \frac{2}{3}b, \qquad (3)$$

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} = \omega'(t) = -6ct, \qquad (4)$$

$$\langle\varepsilon\rangle = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_0}{t_m} = \frac{b}{\sqrt{b/(3c)}} = \sqrt{3bc}. \qquad (5)$$

** **1.2.211.** $a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d(\omega R)}{dt} = \frac{d\omega}{dt}R = \varepsilon R,$

$$\mathrm{tg}\beta = \frac{a_n}{a_t} = \frac{\omega^2 R}{\varepsilon R} = \frac{\omega^2}{\varepsilon}\ \text{nu depinde de } R. \qquad (1)$$

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt},\ d\omega = \varepsilon dt, \int d\omega = \omega = \int \varepsilon dt = \int \frac{b dt}{(t+c)^2} = -\frac{b}{t+c} + C,$$

unde constanta de integrare se determină din condiţia iniţială:
la $t = 0$ avem $\omega = 0$: $0 = -\frac{b}{c} + C,\ C = b/c,$

$$\omega = \frac{bt}{c(t+c)}. \qquad (2)$$

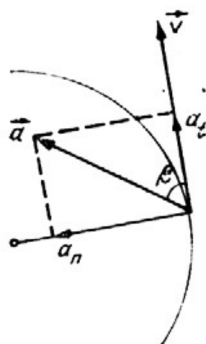


Fig. 1.2.211R

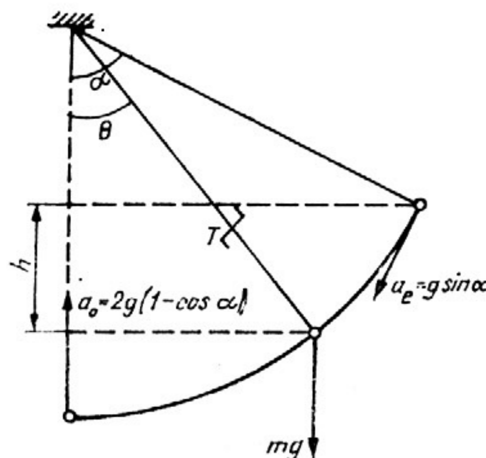


Fig. 1.2.213a R

Se poate integra şi definit (limitele de integrare se corespund):

$$\int_0^{\omega} d\omega = \omega = \int_0^t \varepsilon dt = \int_0^t \frac{b dt}{(t+c)^2} = -\frac{b}{t+c}\Big|_0^t = -\frac{b}{t+c} + \frac{b}{c}.$$

Introducînd în (1) găsim :

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\omega^2}{\varepsilon} = \frac{b}{c^2}\, t. \tag{3}$$

* **1.2.212.** a) Volumul de bandă înfășurată în timpul t este $(R^2 - R_0^2)b = bhv_0 t$, de unde

$$R = \sqrt{R_0^2 + \frac{1}{\pi} hv_0 t}, \tag{1}$$

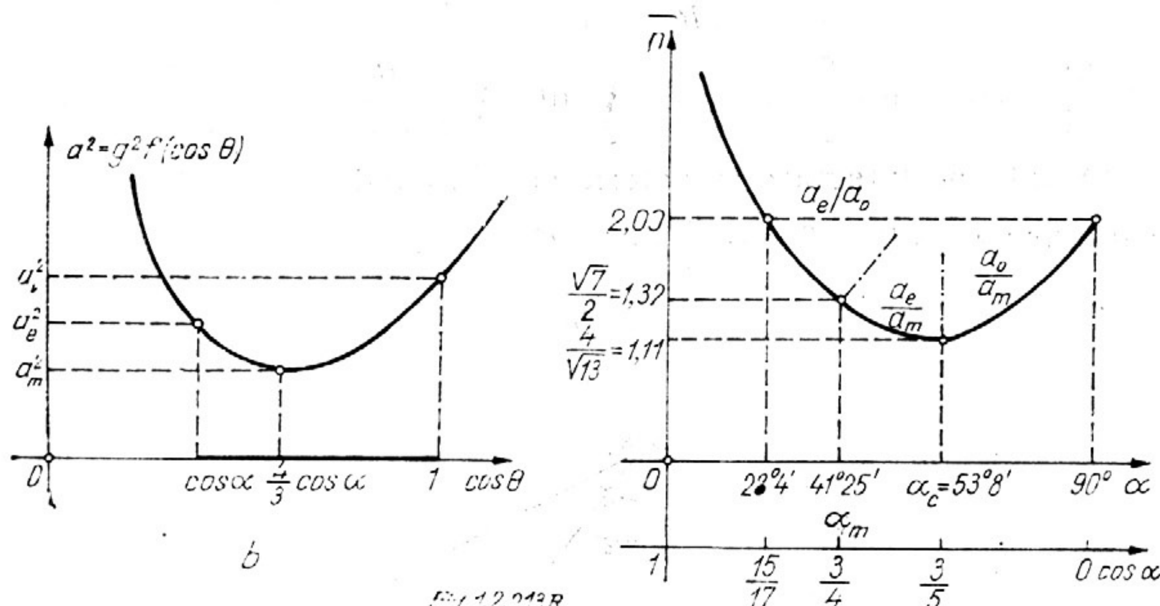
$$v = \frac{dR}{dt} = \frac{1}{2\pi} hv_0 : \sqrt{R_0^2 + \frac{1}{\pi} hv_0 t}. \tag{2}$$

b) $\omega = v_0/R = v_0 : \sqrt{R_0^2 + \frac{1}{\pi} hv_0 t},$ (3)

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = -\frac{1}{2\pi} hv_0^2 : \left(R_0^2 + \frac{1}{\pi} hv_0 t\right)^{3/2}. \tag{4}$$

Propunem cititorului să calculeze momentul cinetic $L = I\omega = f(t)$ (I — momentul de inerție) și momentul aplicat $M = \frac{dL}{dt}$.

(*) **1.2.213.** Să calculăm accelerația pentru un unghi de deviație θ oarecare.



care. Proiectăm ecuația $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T}$ pe direcția tangențială și cea radială (normală) spre centru :

$$ma_t = mg\sin\theta, \quad ma_n = mv^2/l = T - mg\cos\theta. \tag{1}$$

Ecuația de conservare a energiei dă :

$$mgh = mg(l\cos\theta - l\cos\alpha) = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{l}{2} ma_n, \tag{2}$$

de unde accelerația totală :

$a^2 = a_t^2 + a_n^2 = g^2(3\cos^2\theta - 8\cos\alpha\cos\theta + 4\cos^2\alpha + 1) = g^2 f(\cos\theta)$. (3)

Problema se reduce la studiul funcției pătratice în $\cos\theta$, pe intervalul $(\cos\alpha,\ \cos 0 = 1)$.

Reamintim că o funcţie pătratică $f(x) = ax^2 + bx + c$ se reprezintă printr-o parabolă care are un extremum pentru

$$x_m = -b/(2a),\ f_m = -(b^2 - 4ac) : (4a), \qquad (4)$$

minim, dacă $a > 0$. Acest rezultat se obţine şi cu ajutorul derivatelor. Extremul are loc acolo unde se anulează derivata :

$$f'(x) = 2ax + b = 0,\ x_m = -b/(2a),\ f''(x) = 2a,\ \text{sgn } f'' = \text{sgn } a.$$

În cazul nostru ($x = \cos\theta$) :

$$f'(\cos\theta) = 6 \cos\theta - 8 \cos\alpha = 0,\ \cos\theta_m = \frac{4}{3}\cos\alpha,$$

$$a_m^2 = g^2\left(1 - \frac{4}{3}\cos^2\alpha\right),\ f''(\cos\theta) = 6 > 0. \qquad (5)$$

Deci există un *minim dacă* (vd. figura) :

$$\cos\theta_m = \frac{4}{3}\cos\alpha < 1,\ \alpha > \alpha_m = \text{arc}\cos\frac{3}{4} = 41°25',$$

$$(6)$$

$$a_m^2 = g^2\left(1 - \frac{4}{3}\cos^2\alpha\right) > 0.$$

Să calculăm acceleraţiile de la capetele intervalului :

$$\theta = 0 :\quad a_0 = 2g\ (1 - \cos\alpha),\ (\text{normală}),$$
$$\theta = \pm\alpha :\quad a_e = g\ \sin\alpha,\ (\text{tangenţială}). \qquad (7)$$

Raportul acestor acceleraţii :

$$\frac{a_0}{a_e} = 2\ \text{tg}\frac{\alpha}{2},\ a_0 = a_e \text{ pentru } \alpha_c = 2\ \text{arctg}\frac{1}{2} = 53°8',$$

$$\text{pentru } \alpha < \alpha_c \to a_0 < a_e, \qquad (8)$$
$$\text{pentru } \alpha > \alpha_c \to a_0 > a_e.$$

Intervalul $\alpha \in (0, \pi/2)$ se împarte astfel în 3 subintervale :

a) $\alpha < \alpha_m = 41°25'$, adică $\cos\alpha > \frac{3}{4}$, ($\sin\alpha < \sqrt{7}/4$). (9)

În acest caz nu există minimul a_m şi $a_0 < a_e$, prin urmare

$$n = \frac{a_{max}}{a_{min}} = \frac{a_e}{a_0} = \frac{\sin\alpha}{2(1 - \cos\alpha)} = \frac{1}{2\text{tg}\frac{\alpha}{2}} > \frac{\sqrt{7}}{2} = 1{,}32, \qquad (10)$$

$$\text{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2n},\ \text{dacă } n > \frac{\sqrt{7}}{2} = 1{,}32, \text{ atunci } \alpha < \alpha_m = 41°25', \qquad (11)$$

α scade monoton cu creşterea lui n.

b) $\alpha \in (\alpha_m, \alpha_c)$ sau $\alpha \in (41°25', 53°8')$, adică $\cos\alpha \in \left(\frac{3}{5}, \frac{3}{4}\right)$. (12)

În acest caz există $a_m = a_{min}$ şi $a_{max} = a_e$, prin urmare :

$$n = \frac{a_{max}}{a_{min}} = \frac{a_e}{a_m} = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1 - \frac{4}{3}\cos^2\alpha}} \in \left(\frac{4}{\sqrt{13}} = 1{,}11,\ \frac{\sqrt{7}}{2} = 1{,}32\right), \qquad (13)$$

$\sin\alpha = \frac{n}{\sqrt{4n^2 - 3}}$, scade monoton cu creşterea lui n.

c) $\alpha > \alpha_c = 53°8'$ sau $\cos\alpha < \frac{3}{5}$. **(14)**

În acest caz există $a_m = a_{min}$ și $a_{max} = a_0$, prin urmare:

$$n = \frac{a_{max}}{a_{min}} = \frac{a_0}{a_m} = \frac{2(1-\cos\alpha)}{\sqrt{1-\frac{4}{3}\cos^2\alpha}}. \quad (15)$$

Aici n scade cu creșterea lui $\cos\alpha$ (n crește odată cu α), fiindcă derivata

$$n'(\cos\alpha) = 2\frac{\frac{4}{3}\cos\alpha - 1}{\left(1-\frac{4}{3}\cos^2\alpha\right)^{3/2}} \quad (16)$$

este negativă pe intervalul considerat: $\cos\alpha < \frac{3}{5}$.

$$\cos\alpha = \frac{6 - n\sqrt{3(n^2-1)}}{2(n^2+3)}. \quad (17)$$

d) Prin urmare, n poate lua valorile

$$n \geqslant \frac{4}{\sqrt{13}} = 1{,}11, \quad (18)$$

iar pentru

$$n \in (4/\sqrt{13},\ 2) \quad (19)$$

există două valori pentru amplitudine: una din ele $\in (28°4',\ \alpha_c = 53°8')$, iar cealalta $\in (\alpha_c = 53°8',\ \pi/2 = 90°)$ (vd. figura).

** **1.2.214.** $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = A - B\omega$,

separăm variabilele și integrăm:

$$dt = \frac{d\omega}{A - B\omega},\ \int dt = t = \frac{d\omega}{A - B\omega} = -\frac{1}{B}\ln(A - B\omega) + C,$$

unde constanta de integrare se determină din condiția inițială: la $t = 0$ avem $\omega = \omega_0$: $0 = -\frac{1}{B}\ln(A - B\omega_0) + C$, $C = \frac{1}{B}\ln(A - B\omega_0)$,

$$t = \frac{1}{B}\ln\frac{A - B\omega_0}{A - B\omega},\ \omega = \frac{A}{B} - \left(\frac{A}{B} - \omega_0\right)e^{-Bt}.$$

Se poate integra și definit (limitele de integrare se corespund):

$$\int_0^t dt = t = \int_{\omega_0}^{\omega}\frac{d\omega}{A - B\omega} = -\frac{1}{B}\ln\frac{A - B\omega}{A - B\omega_0}.$$

Viteza staționară se obține cînd $\omega = \text{const}$, deci $\varepsilon = \dot{\omega} = 0$, adică $\omega_s = A/B$. Dacă $\omega_0 < \omega_s$ atunci roata se învîrte accelerat, iar dacă $\omega_0 > \omega_s$,

roata se va învîrti încetinit, în ambele cazuri viteza (unghiulară) ω_s se atinge teoretic cînd $t \to \infty$.

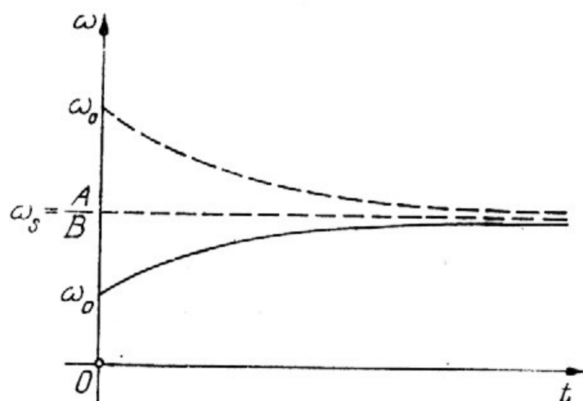


Fig.1.2.214R

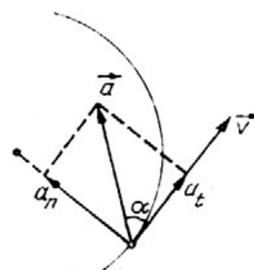


Fig 1.2.216R

* **1.2.215.** $v = \frac{ds}{dt} = \dot{s} = s'(t) = \omega A \cos(\omega t + \alpha),$ (1)

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = \ddot{s} = s''(t) = -\omega^2 A \sin(\omega t + \alpha) = -\omega^2 s. \quad (2)$$

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{1}{R}\omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \alpha), \quad (3)$$

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \omega^2 A\sqrt{\sin^2(\omega t + \alpha) + (A^2/R^2)\cos^4(\omega t + \alpha)}.$$

Condiţia de extremum este anularea derivatei:

$$\frac{da}{dt} \sim 2\sin(\omega t+\alpha)\cdot\omega\cos(\omega t+\alpha) - 4(A^2/R^2)\cos^3(\omega t+\alpha)\cdot\omega\sin(\omega t+\alpha) = 0, \quad (4)$$

de unde rezultă:

$$\sin(\omega t + \alpha) = 0, \text{ deci } \cos(\omega t + \alpha) = \pm 1 \text{ şi } a = \omega^2 A^2/R, \quad (5)$$

$$\cos(\omega t + \alpha) = 0, \text{ deci } \sin(\omega t + \alpha) = \pm 1 \text{ şi } a_{max} = \omega^2 A; \quad (6)$$

$$\cos(\omega t + \alpha) = \pm\frac{R}{A\sqrt{2}}, \text{ deci } s = \sqrt{A^2 - R^2/2},$$

este posibil dacă $R \leqslant A\sqrt{2}$, atunci

$$a_{min} = \omega^2 A\sqrt{1 - R^2/(4A^2)}. \quad (7)$$

Prima valoare (5) va fi un maxim dacă $R < A\sqrt{2}$, altfel va fi un minim (natura extremumului rezultă din variaţia semnului derivatei).

Se poate proceda şi altfel. Exprimăm acceleraţia prin arcul s:

$$a = \omega^2\sqrt{s^2 + (A^2 - s^2)^2/R^2}. \quad (8)$$

Condiţia de extremum:

$$\frac{da}{ds} \sim 2s\,[1 - 2(A^2 - s^2)/R^2] = 0,$$

de unde

$$s = 0, \; a = \omega^2 A^2/R; \quad (9)$$

$$s = \sqrt{A^2 - R^2/2}, \; a_{min} = \omega^2\sqrt{A^2 - R^2/4}. \quad (10)$$

** **1.2.216.** $\text{ctg}\,\alpha = \frac{a_t}{a_n} = \frac{dv/dt}{v^2/R}.$ (1)

Separăm variabilele și integrăm :

$$\mathrm{ctg}\,\alpha \mathrm{d}t = R\frac{\mathrm{d}v}{v^2}, \quad \int \mathrm{ctg}\,\alpha \mathrm{d}t = \int R\frac{\mathrm{d}v}{v^2}, \quad \mathrm{ctg}\,\alpha \cdot t = -\frac{R}{v} + C, \qquad (2)$$

unde constanta de integrare se determină din condiția inițială :

la $t = 0$, $v = v_0$: $0 = -\dfrac{R}{v_0} + C$,

$$\mathrm{ctg}\,\alpha \cdot t = R\left(\frac{1}{v_0} - \frac{1}{v}\right), \quad v = \frac{v_0 R}{R - v_0 t\, \mathrm{ctg}\,\alpha}. \qquad (3)$$

Se poate integra și definit (limitele de integrare se corespund) :

$$\int_0^t \mathrm{ctg}\,\alpha \mathrm{d}t = \int_{v_0}^{v} R\frac{\mathrm{d}v}{v^2}, \quad \mathrm{ctg}\,\alpha \cdot t = -R\frac{1}{v}\Bigg|_{v_0}^{v} = -R\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v_0}\right). \qquad (4)$$

** **1.2.217.** Fie la un moment dat t lungimea firului x. În acest moment firul este tangent la suprafața stîlpului și viteza bilei este perpendiculară pe fir, întrucît firul este inextensibil și bila nu poate avea viteză pe direcția firului. Forța verticală de greutate a bilei este echilibrată de reacțiunea normală a planului orizontal, frecările sînt neglijabile și deci rămîne numai forța de tensiune din fir, care este perpendiculară pe viteză, deci nu efectuează lucru mecanic și deci viteza *nu se schimbă în modul*. După un timp *infinit mic* $\mathrm{d}t$, la momentul imediat următor $t + \mathrm{d}t$, lungimea liberă (neînfășurată) a firului va fi $x - |\mathrm{d}x| = x + \mathrm{d}x$, punctul de contact al firului se deplasează cu $|\mathrm{d}x| = R\mathrm{d}\theta$. Dacă x este lungimea liberă a firului, atunci variația sa $\mathrm{d}x$ va fi *negativă* în procesul înfășurării firului. Pe de altă parte, *la limită* avem o mișcare instantanee infinitezimală, circulară, în jurul punctului de contact, cu raza x, deci $\mathrm{d}s = v\mathrm{d}t = x\mathrm{d}\theta$. Dar $-\mathrm{d}x = R\mathrm{d}\theta$, de unde eliminînd $\mathrm{d}\theta$ rezultă

$$v\mathrm{d}t = x\frac{-\mathrm{d}x}{R}, \quad \mathrm{d}t = -\frac{x\mathrm{d}x}{Rv}, \qquad (1)$$

care prin integrare dă (limitele de integrare se corespund) :

$$\int_0^t \mathrm{d}t = t = \int_l^x -\frac{x\mathrm{d}x}{Rv} = -\frac{x^2}{2Rv}\Bigg|_l^x = \frac{l^2 - x^2}{2Rv}. \qquad (2)$$

Se poate integra și nedefinit :

$$t = \int \mathrm{d}t = -\int \frac{x\mathrm{d}x}{Rv} = -\frac{1}{Rv}\int x\mathrm{d}x = -\frac{x^2}{2Rv} + C.$$

Constanta de integrare se determină din condiția inițială : la $t = 0$, $x = l$: $0 = -l^2/(2Rv) + C$, $C = l^2/(2Rv)$, deci

$$t = \frac{l^2 - x^2}{2Rv}, \qquad (2)$$

care ne dă timpul în care se înfășoară orice porțiune $l - x$. Punînd $l - x = fl$, rezultă timpul cerut, precum și timpul total :

$$t = l^2 f(2 - f)/(2Rv) \quad \text{și} \quad t_{\text{total}} = l^2/(2Rv). \qquad (3)$$

** **1.2.218.** Folosim rezultatele de la problema precedentă. Timpul de desfășurare este egal cu cel de înfășurare : $l^2/(2Rv)$. Dar mai trebuie adău-

gat timpul intermediar de trecere de la desfășurare la înfășurare, conform figurii : $\pi l/v$. Deci timpul total cerut :

$$T = 2 \cdot l^2/(2Rv) + \pi l/v = \frac{l}{v}\left(\frac{l}{R} + \pi\right) = 2{,}00 \text{ s}.$$

** **1.2.219.** $N \cos\alpha = mv^2/R, \; N \sin\alpha - mg = 0,$ (1)

$$-\mu N = ma_t = m\frac{dv}{dt}. \qquad (2)$$

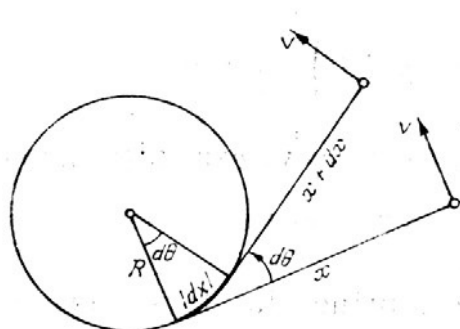


Fig. 1.2.217R

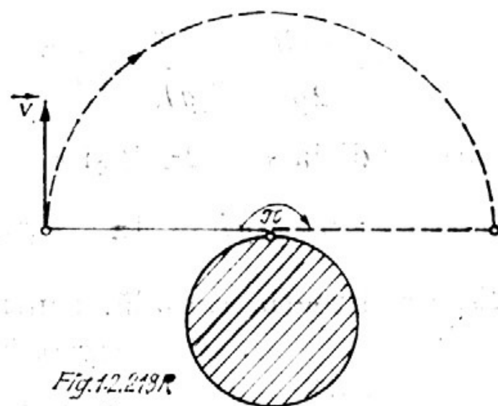


Fig. 1.2.219R

Din (1) rezultă

$$N = m\sqrt{g^2 + v^4/R^2},$$

care introdus în (2) dă ecuația :

$$-\mu m\sqrt{g^2 + v^4/R^2} = m\frac{dv}{dt}. \qquad (3)$$

Pentru a găsi $s = s(v)$ înmulțim ecuația (3) cu $ds = v dt$:

$$-\mu\sqrt{g^2 + v^4/R^2}\cdot ds = \frac{dv}{dt}ds = v dv, \; \left(\frac{ds}{dt} = v\right),$$

separăm variabilele și integrăm :

$$ds = -\frac{Rv dv}{\mu\sqrt{g^2R^2 + v^4}} = -\frac{R}{2\mu}\frac{d(v^2)}{\sqrt{g^2R^2 + v^4}}.$$

Amintim integrala :

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \text{argsh}\frac{x}{a} + C = \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2}) + C', \qquad (4)$$

unde funcția „argument sinus hiperbolic" argsh x/a este funcția inversă „sinusului hiperbolic"

$$\text{sh}\frac{x}{a} = \frac{1}{2}(e^{x/a} - e^{-x/a}).$$

În cazul nostru obținem :

$$\int ds = s = -\frac{R}{2\mu}\int\frac{d(v^2)}{\sqrt{g^2R^2 + v^4}} = -\frac{R}{2\mu}\text{argsh}\frac{v^2}{gR} + C =$$

$$= -\frac{R}{2\mu}\ln\left(\frac{v^2}{gR} + \sqrt{1 + v^4/(g^2R^2)}\right) + C,$$

unde constanta de integrare se determină din condiția inițială : la $t = 0$, $s = 0$ și $v = v_0$:

$$0 = -\frac{R}{2\mu}\text{argsh}\frac{v_0^2}{gR} + C = -\frac{R}{2\mu}\ln\left(\frac{v_0^2}{gR} + \sqrt{1 + v^4/(g^2R^2)}\right) + C,$$

atunci

$$s = \frac{R}{2\mu}\left(\operatorname{argsh}\frac{v_0}{gR} - \operatorname{argsh}\frac{v^2}{gR}\right) = \frac{R}{2\mu}\ln\frac{v_0^2 + \sqrt{g^2R^2 + v_0^4}}{v^2 + \sqrt{g^2R^2 + v^4}}. \qquad (5)$$

Se putea integra și definit (limitele de integrare se corespund):

$$\int_0^s \mathrm{d}s = s = \frac{-R}{2\mu}\int_{v_0}^{v}\frac{\mathrm{d}(v^2)}{\sqrt{g^2R^2 + v^4}} = \frac{-R}{2\mu}\operatorname{argsh}\frac{v^2}{gR}\Bigg|_{v_0}^{v} =$$

$$= \frac{-R}{2\mu}\ln\left(\frac{v^2}{gR} + \sqrt{1 + v^4/(g^2R^2)}\right)\Bigg|_{v_0}^{v} = \text{etc.}$$

Punînd în (5) condiția $s = 2\pi R$ și $v = 0$, obținem viteza inițială necesară:

$$v_0 = gR\operatorname{sh} 4\pi\mu = gR\frac{1}{2}\left(e^{4\pi\mu} - e^{-4\pi\mu}\right). \qquad (6)$$

* **1.2.220.** Pe direcția radială, centripet, principiul II se scrie:

$$F - mg\cos\theta = mv^2/l, \qquad (1)$$

$$v = l\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = l\omega A\cos(\omega t + \alpha) = \pm l\omega\sqrt{A^2 - \theta^2}, \qquad (2)$$

$$F = mg\cos\theta + m\omega^2 l(A^2 - \theta^2) = mg\cos[A\sin(\omega t + \alpha)] + $$
$$+ m\omega^2 l A^2\cos^2(\omega t + \alpha). \qquad (3)$$

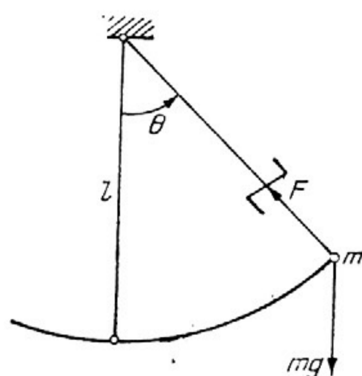


Fig. 1.2.220R

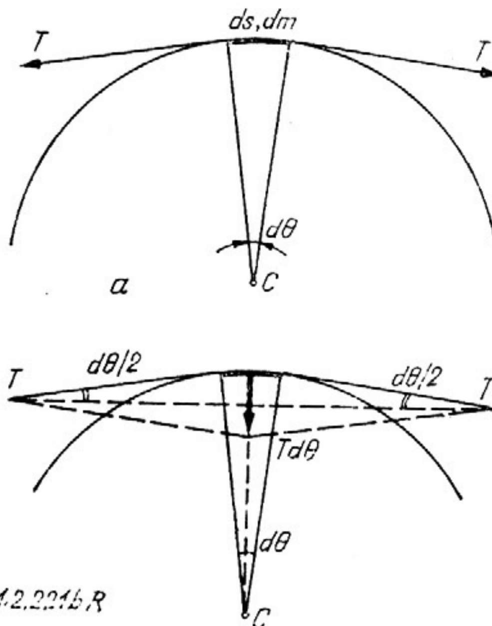


Fig 1.2.221b R

(*) **1.2.221.** Luăm un element de lanț ds cu masa dm, care subîntinde un unghi la centru infinit mic dθ, (d$s = R$dθ). Asupra elementului de lanț acționează cele două tensiuni de la capetele sale care dau rezultanta centripetă (căci n = const):

$$2T\sin\frac{\mathrm{d}\theta}{2} = 2T\frac{\mathrm{d}\theta}{2} = T\mathrm{d}\theta,$$

(rezultat cunoscut).

Atunci, lex secunda dă

$$T\mathrm{d}\theta = \mathrm{d}m\,\omega^2 R = \frac{m}{l}\mathrm{d}s\,\omega^2 R = \frac{m}{l}R\mathrm{d}\theta\, 4\pi^2 n^2 R = mn^2 l\mathrm{d}\theta,$$

$$T = mln^2,$$

de unde rezultă

$$n = \sqrt{T_r/(ml)} = 100 \text{ rot/s}.$$

Putem judeca și fără diferențiale, luînd elemente foarte mici Δs, Δm, $\Delta\theta$, care descresc (tind) către zero și folosind cunoscuta aproximație $\sin\alpha \to \alpha$ (în radiani) cînd $\alpha \to 0$ ($\sin\alpha \cong \alpha$ pentru $\alpha < 6°$).

Forțe elastice

1.2.222. $h = \sigma_r/(s\gamma) = 60$ m.

1.2.223. $E_{1,2} = E''(1 \pm \sqrt{1-E'/E''}) = 120$ GPa, resp. 80 GPa.

1.2.224. a) $\sigma = pR/(2d)$, se sparge cel cu rază mai mare, b) Trebuie $\frac{R}{d} = \text{const.}$

(**) **1.2.225.** Aflăm accelerația:

$$a = (F_1 - F_2)/m. \quad (1)$$

Pentru porțiunea din dreapta a resortului avem:

$$F_1 - T = \frac{m}{l} x \cdot a, \quad (2)$$

unde l este lungimea resortului. Înlocuind accelerația, găsim

$$T(x) = F_1 - \frac{x}{l}(F_1 - F_2). \quad (3)$$

Să găsim constanta elastică corespunzătoare unui element dx de resort. Amintim că mai multe resorturi de constante k_i, $i = 1,2, \cdots$, legate în serie, dau un resort cu constanta elastică $1/k_e = \Sigma\, 1/k_i$. Dacă resorturile sînt *identice*, atunci: $k_e = k'/n$, (k' — constanta unui resort). În cazul nostru considerăm resorturi elementare identice dx legate în serie și care dau resortul nostru de lungime l și de constantă k, numărul lor fiind $\frac{l}{\mathrm{d}x}$, deci $k = \frac{k'\mathrm{d}x}{l}$. Tensiunea din resort variază de-a lungul resortului și asupra unui resort elementar dx luat în punctul x produce alungirea dată de:

$$T(x) = k'\delta(\mathrm{d}x),$$

$$\delta(\mathrm{d}x) = \frac{T(x)}{k'} = T(x)\frac{\mathrm{d}x}{kl} = \left[F_1 - \frac{x}{l}(F_1 - F_2)\right]\frac{\mathrm{d}x}{kl}. \quad (4)$$

Sumăm aceste alungiri asupra tuturor elementelor dx, adică integrăm și obținem alungirea totală a resortului:

$$\Delta l = \int_0^l \left[F_1 - \frac{x}{l}(F_1 - F_2)\frac{\mathrm{d}x}{kl} = \frac{1}{kl}F_1 l - \frac{1}{kl^2}(F_1 - F_2)\frac{l^2}{2} =\right.$$

$$= \frac{1}{2k}(F_1 + F_2) = \frac{1}{k}\,\frac{1}{2}(F_1 + F_2), \quad (5)$$

ca și cum fiecare forță produce propria sa alungire $\frac{F}{2k}$ sau, altfel, alungirea este produsă de forța — medie aritmetică a celor două forțe de la capete. Dacă forțele de la capetele resortului care îl întind sînt egale,

obţinem rezultatul binecunoscut din statică $\Delta l = F/k$, unde F este forţa de la un *singur* capăt, egală cu forţa de la celălalt capăt.

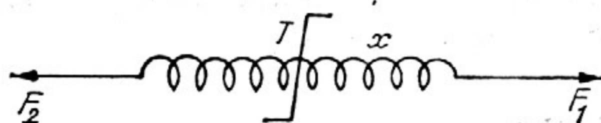


Fig. 1.2.225R

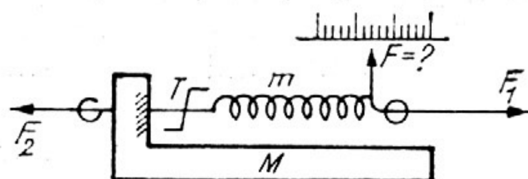


Fig. 1.2.226R

Acelaşi rezultat se poate obţine elementar, judecînd astfel : Conform formulei (3) tensiunea $T(x)$ variază *liniar* de la $F_1(x = 0)$ pînă la $F_2(x = l)$. Dacă împărţim resortul într-un număr foarte mare de elemente egale Δx, atunci fiecare element este alungit proporţional cu tensiunea care domneşte în locul unde se află elementul Δx. Dacă tensiunea ar fi peste tot $T = F_1$ toate elementele Δx s-ar alungi la fel şi alungirea totală a resortului ar fi fost F_1/k. Dacă tensiunea ar fi peste tot $T = F_2$ atunci alungirea totală ar fi F_2/k. Or, tensiunea variază *liniar* de la F_1 la F_2 şi elementele Δx se alungesc proporţional cu tensiunea, deaceea putem considera o tensiune — *medie aritmetică*, care produce deci alungirea totală a resortului dată de formula (5).

(**) **1.2.226.** $F_1 - F_2 = (m + M)a, \; F_1 - T = ma,$ (1)

de unde

$$T = \frac{F_1 M + F_2 m}{M + m}. \qquad (2)$$

Conform problemei precedente resortul se va lungi cu

$$\Delta l = \frac{F_1 + T}{2k} \qquad (3)$$

şi deci forţa arătată va fi

$$F = k\Delta l = \frac{1}{2}(F_1 + T) = \frac{F_1(2M + m) + F_2 m}{2(M + m)} = F_1 + (F_2 - F_1)\frac{m}{2(M+m)}. \qquad (4)$$

Dacă masa resortului este neglijabilă ($m = 0$), dinamometrul indică forţa $F = F_1$, atunci T va fi tot F_1.

1.2.227. Dacă $T_r \leqslant 2mg$, atunci $h = (T_r - mg)/k$. Dacă $T_r > 2mg$, atunci $h = \frac{mg}{2k}\left[\left(\frac{T_r}{mg} - 1\right)^2 + 1\right] = 5{,}0$ cm.

1.2.228. $k = \frac{mg}{l_0} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} : \left(1 - \sqrt{2} \sin \frac{\alpha}{2}\right) = 100$ N/m.

1.2.229. $\frac{5F}{k} = 0{,}50$ m.

1.2.230. $k = \frac{m}{f}[(1 + f)\omega_2^2 - \omega_1^2] = 182$ N/m.

(*) **1.2.231.** Să considerăm un element de masă $\mathrm{d}m$ al inelului care subîntinde un unghi la centru $\mathrm{d}\theta$ (în radiani), astfel încît

$$\frac{\mathrm{d}m}{m} = \frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi}. \qquad (1)$$

Să compunem cele două tensiuni care acționează asupra elementului: $2T\sin\frac{d\theta}{2}$. Dar $\frac{\sin(d\theta/2)}{d\theta/2} = 1$ fiind limita raportului $\frac{\sin(\Delta\theta/2)}{\Delta\theta/2}$ cînd $\Delta\theta \to 0$. Rezultă: $2T\sin\frac{d\theta}{2} = T\,d\theta$ (rezultat cunoscut). Dealtfel, pentru

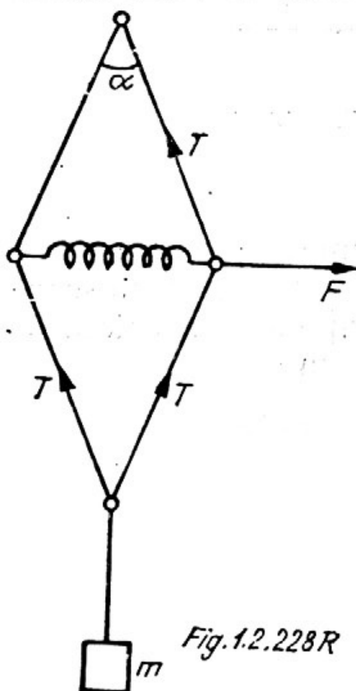


Fig. 1.2.228R

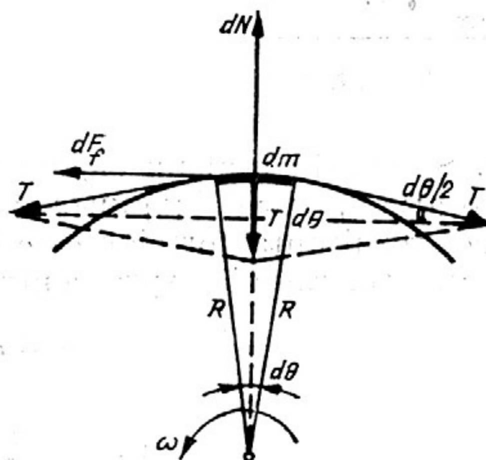


Fig. 1.2.231R

unghiuri $\alpha \to 0$, $\sin\alpha$ se aproximează cu unghiul α (în rad) oricît de precis și *la limită* putem înlocui $\sin\alpha$ cu α, adică putem scrie riguros: $\sin d\theta = d\theta$.

Pe direcția radială pentru elementul dm care se mișcă circular avem

$$T d\theta - dN = dm\ \omega^2 R, \qquad (2)$$

iar pe direcția transversală:

$$dF_f = dm\ a_t = dm\ \varepsilon R. \qquad (3)$$

Să considerăm acum momentul critic cînd inelul este gata să lunece: în acest moment inelul încă se rotește solidar cu cilindrul și fiind la limita lunecării, forța de frecare devine $dF_f = \mu dN$.
Sistemul devine:

$$T d\theta - dN = \frac{m}{2\pi} d\theta\ \varepsilon^2 t^2 R,\ \mu dN = \frac{m}{2\pi} d\theta\,\varepsilon R. \qquad (4)$$

Eliminînd pe dN și

$$T = k\Delta l = k(2\pi R - l_0), \qquad (5)$$

găsim

$$t = \sqrt{(2\pi\mu T - m\varepsilon R) : (\mu m \varepsilon^2 R)} = \sqrt{[2\pi\mu k(2\pi R - l_0) - m\varepsilon R] : (\mu m\varepsilon^2 R)} = 100 \text{ s}.$$

1.2.232. $N = m\cos\alpha\ [kg - \omega^2\ (mg + kl\ \sin\alpha)] : (k - m\omega^2\cos^2\alpha)$ se anulează pentru $\omega_0^2 = kg : (mg + kl\ \sin\alpha) = 120$ rad²/s² $< \omega^2$, deci corpul se desprinde:

$$x = m\omega^2 l : (k - m\omega^2) = 29{,}4 \text{ cm};\ \omega_{max} = \sqrt{k/m} = \sqrt{300} \text{ rad/s, cînd } x \to \infty.$$

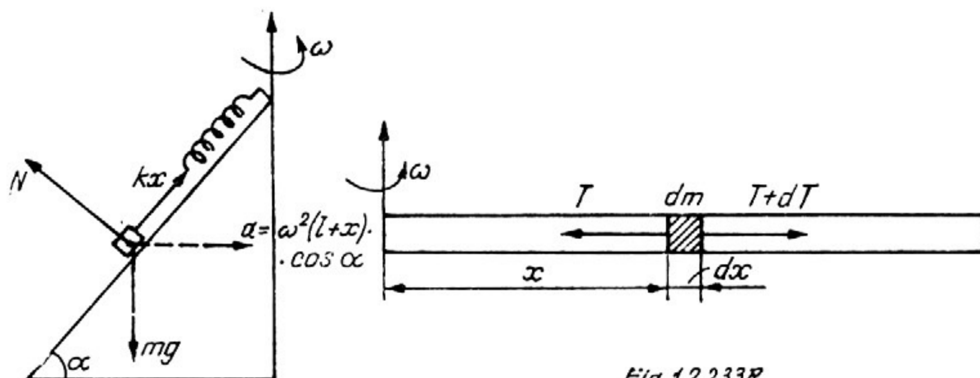


Fig. 1.2.232R

Fig. 1.2.233R

** **1.2.233.** Să considerăm un element de masă dm situat la distanţa x de axa de rotaţie şi avînd lungimea dx. Acesta are o mişcare circulară uniformă deci rezultanta forţelor este centripetă şi acceleraţia este centripetă. Pe direcţia radială (spre centru) avem:

$$+T-(T+\mathrm{d}T)=\mathrm{d}m\omega^2x, \tag{1}$$

dar

$$\mathrm{d}m=\frac{m}{l}\,\mathrm{d}x, \tag{2}$$

rezultă

$$\mathrm{d}T=-\frac{m}{l}\,\omega^2x\mathrm{d}x \tag{3}$$

şi prin integrare (nedefinită):

$$T=\int\mathrm{d}T=-\int\frac{m}{l}\,\omega^2x\mathrm{d}x=-\frac{m}{l}\,\omega^2\int x\mathrm{d}x=-\frac{m}{l}\,\omega^2\frac{1}{2}\,x^2+C.$$

Constanta de integrare se determină din condiţia *la margine* ca pentru $x=l$ să avem $T=0:\ 0=-\frac{m}{l}\,\omega^2\frac{1}{2}\,l^2+C$, astfel încît:

$$T(x)=\frac{1}{2l}\,m\omega^2(l^2-x^2). \tag{4}$$

Se poate integra şi definit, ţinînd seama că limitele de integrare trebuie să se corespundă: $(x,\ T)$, $(x=l,\ T=0)$:

$$\int_T^0\mathrm{d}T=-\int_x^l\frac{m}{l}\,\omega^2x\mathrm{d}x\ \text{sau}\ -T=-\frac{m}{2l}\,\omega^2x^2\Big|=-\frac{m}{2l}\,\omega^2(l^2-x^2).$$

Reacţiunea articulaţiei:

$$T(0)=-\frac{1}{2}\,m\omega^2l. \tag{5}$$

1.2.234. $\omega=\sqrt{g:(l_0\cos\alpha+mg/k)}=4{,}0$ rad/s.

(*) **1.2.235.** Să considerăm un element de masă dm din fir, care subîntinde un unghi la centru dθ (în rad). Acest element are o mişcare circulară uniformă deci forţa rezultantă trebuie să fie centripetă ca şi acceleraţia.

Compunem cele două tensiuni : $2T \sin \frac{d\theta}{2} = Td\theta$ (rezultat cunoscut), deoarece $\left(\sin \frac{d\theta}{2}\right) : \frac{d\theta}{2} = 1$, fiind limita cunoscută

$$\lim_{\Delta\theta \to 0} \frac{\sin(\Delta\theta/2)}{\Delta\theta/2} = 1,$$

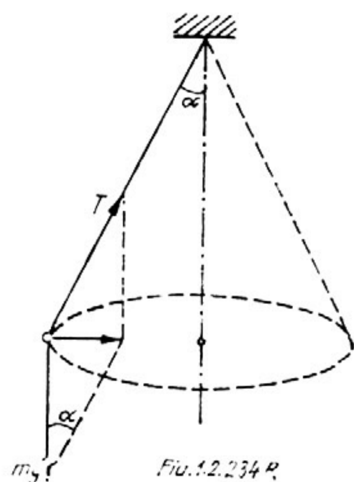


Fig. 1.2.234 R

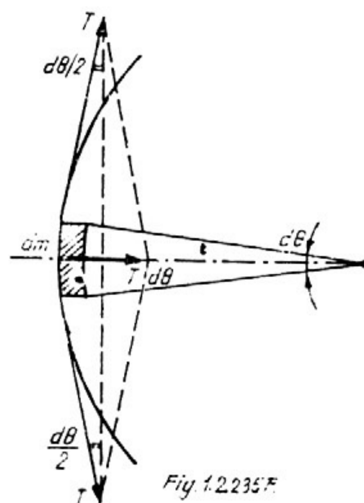


Fig. 1.2.235 R

$\left(\text{alftel spus, } \sin \frac{d\theta}{2} = \frac{d\theta}{2}\right.$, sinusul unui unghi mic $\Delta x \to 0$ se aproximează oricît de precis prin unghiul însuși în radiani$\Big)$.

Legea fundamentală pe direcția radială se scrie atunci :

$$Td\theta = dm\ \omega^2 R, \text{ dar } \frac{dm}{m} = \frac{d\theta}{2\pi}, \tag{1}$$

deci

$$T = \frac{1}{2\pi} m\omega^2 R = k(2\pi R - l_0), \tag{2}$$

de unde

$$R = [l_0/(2\pi)] : [1 - m\omega^2/(4\pi^2 k)] = 32 \text{ cm}. \tag{3}$$

Firul se lungește cu $\Delta l = 2\pi R - l_0 = 101$ cm. (4)

•• **1.2.236.** Aplicăm teorema variației energiei cinetice :

$$\frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} mv_0^2 = L = \int_{s_0}^{s} \vec{F}\, d\vec{r} = \int_{s_0}^{s} F_t ds = \int_{s_0}^{s} ma_t ds = m\int_{s_0}^{s} a_t ds,$$

de unde rezultă formula cerută.
În cazul oscilatorului armonic :

$$v^2 = v_0^2 + 2\int_{x_0}^{x} -\frac{kx}{m} dx = v_0^2 - \frac{k}{m} x^2 \Big|_{x_0},$$

care dă legea de conservare a energiei :

$$E_c + E_p = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} mv_0^2 + \frac{1}{2} kx_0^2 = \text{const}.$$

** **1.2.237.** Diferenţiem legea mişcării : $ds = nb^n v^{n-1}\,dv,$ (1)

dar $$ds = v\,dt,$$

de unde, separînd variabilele şi integrînd :

$$dt = nb^n v^{n-2}dv, \quad \int dt = \int nb^n v^{n-2}\,dv, \tag{2}$$

$$t = nb^n \frac{v^{n-1}}{n-1} + C, \text{ dacă } n \neq 1. \tag{3}$$

Constanta de integrare se determină din condiţia iniţială : la $t = 0$ avem $s = 0$ şi din legea mişcării $0 = b^n v_0^n c^n$, $v_0 = c/b$:

$$0 = nb^n \frac{c^{n-1}}{(n-1)b^{n-1}} + C, \; C = -\frac{nb}{n-1}c^{n-1}.$$

Rezultă

$$t = \frac{n}{n-1}(b^n v^{n-1} - bc^{n-1}), \; v = \sqrt[n-1]{(c/b)^{n-1} + (n-1)t/(nb^n)}, \; n \neq 1. \tag{4}$$

Dacă $n = 1$:

$$s = bv - c, \; ds = v\,dt = b\,dv, \; dt = \frac{b}{v}dv,$$

$$t = b \ln v + C, \; 0 = b \ln v_0 + C, \; v_0 = c/b,$$

$$t = b \ln\frac{v}{v_0}, \; v = v_0 e^{t/b} = \frac{c}{b} e^{t/b}. \tag{5}$$

Se poate integra şi definit (limitele de integrare se corespund) :

$$\int_0^t dt = \int_{v_0}^v nb^n v^{n-2}dv = nb^n \left.\frac{v^{n-1}}{n-1}\right|_{v_0}^{v} = \text{etc.}, \; v_0 = c/b, \; n \neq 1,$$

respectiv pentru $n = 1$:

$$\int_0^t dt = \int_{v_0}^v b\frac{dv}{v} = \text{etc.}, \; v_0 = c/b.$$

** **1.2.238.** $ds = v\,dt$, integrăm

$s_m = \int_0^{s_m} ds = \int_0^{t_m} v\,dt$ = aria S de sub graficul vitezei $= \frac{1}{4}\pi t_m \cdot v_0$, (aria elipsei este $\pi\, ab$). (1)

Să stabilim legea mişcării. Din ecuaţia elipsei, cunoscînd semiaxele, deducem legea vitezei :

$$\frac{v^2}{v_0^2} + \frac{t^2}{t_m^2} = 1, \; v = v_0\sqrt{1 - t^2/t_m^2} = \frac{dx}{dt}, \; dx = v\,dt,$$

$$x = \int_0^x dx = \int_0^t v_0\sqrt{1 - t^2/t_m^2}\,dt. \tag{2}$$

Amintim integrala :

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin\frac{x}{a}\right) + C. \tag{3}$$

În cazul nostru:

$$x = \int_0^t \frac{v_0}{t_m}\sqrt{t_m^2 - t^2}\,dt = \frac{v_0}{t_m}\left(\frac{1}{2}t\sqrt{t_m^2 - t^2}\Big|_0^t + \frac{1}{2}t_m^2 \arcsin\frac{t}{t_m}\Big|_0^t\right) =$$

$$= \frac{v_0}{t_m}\left(\frac{1}{2}t\sqrt{t_m^2 - t^2} + \frac{1}{2}t_m^2 \arcsin\frac{t}{t_m}\right) = \frac{1}{2}v_0 t\sqrt{1 - t^2/t_m^2} + \frac{1}{2}v_0 t_m \arcsin\frac{t}{t_m}.$$

Pentru $t = t_m$ regăsim $x = x_m$. Se poate integra și nedefinit:

$$x = \int dx = \int \frac{v_0}{t_m}\sqrt{t_m^2 - t^2}\,dt = \frac{v_0}{t_m}\left(\frac{1}{2}t\sqrt{t_m^2 - t^2} + \frac{1}{2}t_m^2 \arcsin\frac{t}{t_m}\right) + C,$$

unde constanta de integrare se determină din condiția inițială: la $t = 0$ avem $x = 0$; rezultă $C = 0$.

** **1.2.239.** a) Timpul de traversare a rîului $\tau = b/v_0$. Deplasarea la vale la un moment dat $t = y/v_0$:

$$dx = v dt, \quad \int dx = x = \int v dt = \int k\sqrt{y}\,\frac{dy}{v_0} = \frac{k}{v_0}\,\frac{2}{3}\,y^{3/2} + C,$$

unde constanta de integrare se determină din condiția *la margine*: pentru $y = 0$, $x = 0$, deci $C = 0$:

$$x = \frac{2k}{3v_0}\,y^{3/2},\ \ y \leqslant b/2. \tag{1}$$

Se poate integra și definit (limitele de integrare se corespund):

$$\int_0^x dx = x = \int_0^y k\sqrt{y}\,\frac{dy}{v_0} = \frac{k}{v_0}\,\frac{2}{3}\,y^{3/2}.$$

La mijlocul rîului deplasarea la vale va fi:

$$x_0 = \frac{2k}{3v_0}\,\frac{b^{3/2}}{2\sqrt{2}}, \tag{2}$$

și deci deplasarea totală (în virtutea simetriei):

$$d = 2x_0 = \frac{\sqrt{2}}{3}\,\frac{kb^3}{v_0}. \tag{3}$$

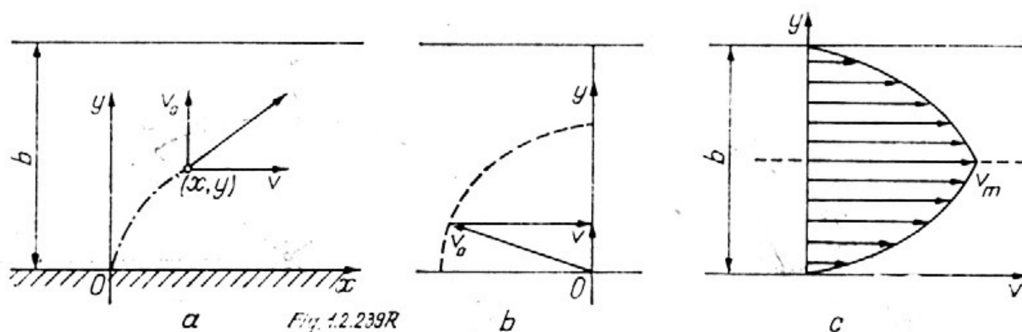


Fig. 1.2.239R

b) Viteza de traversare, față de țărm, perpendiculară pe țărm, este

$$\sqrt{v_0^2 - v^2} = \frac{dy}{dt}. \tag{4}$$

Separăm variabilele şi integrăm:

$$\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{v_0^2 - k^2 y}}, \int \mathrm{d}t = t = \int \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{v_0^2 - k^2 y}} = -\frac{2}{k^2}\sqrt{v_0^2 - k^2 y} + C',$$

unde constanta de integrare se determină din condiţia iniţială:

$$\text{la } t = 0,\ y = 0 : 0 = -\frac{2}{k^2} v_0 + C',\ C' = \frac{2}{k^2} v_0,$$

$$t = \frac{2v_0}{k^2}\left(1 - \sqrt{1 - k^2 y / v_0^2}\right),\ y \leqslant b/2. \tag{5}$$

Se putea integra şi definit (limitele de integrare se corespund):

$$\int_0 \mathrm{d}t = t = \int_0^y \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{v_0^2 - k^2 y}} = -\frac{2}{k^2}\sqrt{v_0^2 - k^2 y}\,\Bigg|_0^y .$$

Timpul total de traversare a rîului va fi (în virtutea simetriei) dublul timpului de traversare pînă la mijlocul rîului:

$$\tau = 2 \cdot \frac{2v_0}{k^2}\left[1 - \sqrt{1 - k^2 b/(2v_0^2)}\right]. \tag{6}$$

c) Punînd $y = b/2$ avem $v_m = k\sqrt{b/2}$, deci

$$k = v_m \sqrt{2/b}, \tag{7}$$

unde v_m este viteza maximă de curgere a rîului (la mijlocul rîului).

* **1.2.240.** Conform figurii:

$$a = a_t/\cos\alpha,\ (\text{dacă } \alpha \neq \pi/2),\ a_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}, \tag{1}$$

$$\cos\alpha = v_r/v, \quad v_r = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}, \tag{2}$$

de unde

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\frac{v}{v_r} = \frac{v\,\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}. \tag{3}$$

Dacă $\alpha = \pi/2$, atunci $\vec{v} \perp \vec{r}$, $\vec{v} \perp \vec{a}$, deci $a_t = 0 = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$, deci $v = \text{const}$, $v_r = 0$, rezultă mişcarea circulară uniformă.

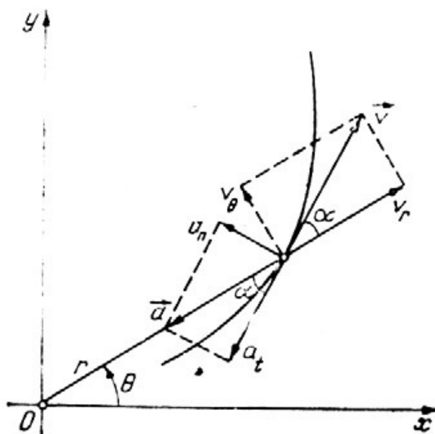


Fig. 1.2.240R

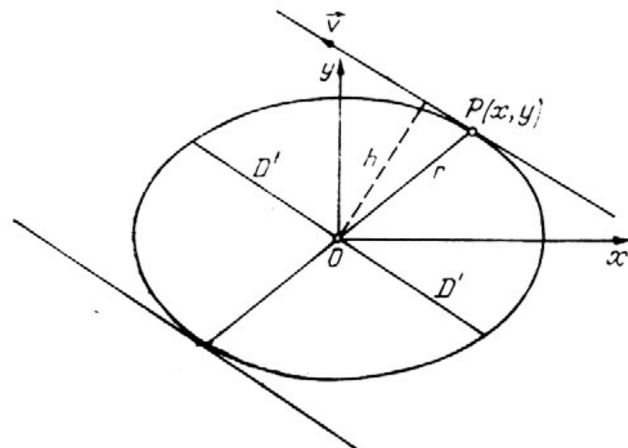


Fig. 1.2.243R

Se poate aplica teorema variației energiei cinetice:

$$dL = dE_c,$$

$$dL = \vec{F}\, d\vec{r} = F_r dr + F_\theta r d\theta, \tag{4}$$

dar

$$F_\theta \equiv 0 \text{ și } F_r = F = ma,\ dE_c = mvdv, \text{ etc.}$$

(*) **1.2.241.** $v_x = \dot{x} = \frac{dx}{dt} = x'(t) = b$; $v_y = \dot{y} = \frac{dy}{dt} = y'(t) = c - 2ht,$ (1)

$$a_x = \dot{v}_x = \ddot{x} = 0\ ;\ a_y = \dot{v}_y = \ddot{y} = -2h. \tag{2}$$

Unghiul dintre doi vectori se poate calcula analitic (cu ajutorul componentelor într-un SO) astfel:

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\alpha,\ \cos\alpha = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}. \tag{3}$$

Dar expresia analitică a produsului scalar într-un SO ortogonal este

$$\vec{a}\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \tag{4}$$

În cazul nostru:

$$\cos\alpha = \frac{v_x a_x + v_y a_y}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2} \cdot \sqrt{a_x^2 + a_y^2}} = \frac{-2h(c-2h)t}{\sqrt{b^2 + (c-2ht)^2} \cdot \sqrt{2|h|}}. \tag{5}$$

Deoarece mișcarea pe axa Ox este uniformă, iar pe axa Oy uniform accelerată, vitezele și accelerațiile respective se obțin imediat, fără ajutorul derivatelor.

** **1.2.242.** $\frac{dy}{dt} = v_y = v_0,\ dy = v_0 dt,$ (1)

de unde prin integrare:

$$\int dy = y = \int v_0 dt = v_0 t + C,$$

unde constanta de integrare se determină din condiția inițială: la $t = 0,\ y = 0$; rezultă $C = 0$, deci

$$y = v_0 t. \tag{2}$$

Se putea integra și definit (limitele de integrare se corespund):

$$\int_0^y dy = y = \int_0^t v_0 dt = v_0 t.$$

Acum rezultă imediat:

$$v_x = A\sqrt{y} = A\sqrt{v_0}\sqrt{t}. \tag{3}$$

Integrăm mai departe:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = A\sqrt{v_0}\sqrt{t},\ dx = v_x dt = A\sqrt{v_0}\sqrt{t}\, dt, \tag{4}$$

de unde prin integrare:

$$\int dx = x = \int A\sqrt{v_0}\sqrt{t}\, dt = \frac{2}{3} A\sqrt{v_0} t^{3/2} + C',$$

unde constanta de integrare C' se determină din condiția inițială: la $t = 0$ avem $x = 0$; rezultă $C' = 0$;

$$x = \frac{2}{3} A\sqrt{v_0} t^{3/2}. \tag{5}$$

Se putea integra şi definit (limitele de integrare se corespund):

$$\int_0^x \mathrm{d}x = x = \int_0^t A\sqrt{v_0}\sqrt{t}\ \mathrm{d}t = \frac{2}{3} A\sqrt{v_0}\, t^{3/2}.$$

Prin eliminarea timpului t din ecuaţiile cinematice ale mişcării (2) şi (5) găsim ecuaţia explicită a traiectoriei:

$$y = \left(\frac{3}{2A} v_0 x\right)^{2/3} \text{ sau } x = \frac{2A}{3v_0} y^{3/2}, \tag{6}$$

care este o „parabolă semicubică".

* **1.2.243.** a) Ecuaţiile cinematice ale mişcării reprezintă ecuaţiile *parametrice ale traiectoriei* în care parametrul este *timpul*. Prin eliminarea parametrului (timpului) obţinem traiectoria eliptică;

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1 \text{ (parcursă în sens trigonometric).} \tag{1}$$

b) $v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dot{x} = -\omega A \sin \omega t,\ v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \dot{y} = \omega B \cos \omega t,$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \omega\sqrt{A^2y^2/B^2 + B^2x^2/A^2} = \omega AB\sqrt{x^2/A^4 + y^2/B^4}. \tag{2}$$

Ecuaţia tangentei la elipsă în punctul $P(x,y)$:

$$\frac{xX}{A^2} + \frac{yY}{B^2} = 1$$

sau sub forma *normală*:

$$\frac{1}{\sqrt{x^2/A^4 + y^2/B^4}}\left(\frac{xX}{A^2} + \frac{yY}{B^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2/A^4 + y^2/B^4}}.$$

Atunci distanţa de la centrul elipsei (0,0) pînă la tangentă:

$$h = \frac{1}{\sqrt{x^2/A^4 + y^2/B^4}} \tag{3}$$

şi expresia vitezei devine:

$$v = \omega AB/h. \tag{4}$$

Pe de altă parte, folosind teorema lui Apollonius:

$$D'^2 + D^2 = A^2 + B^2, \tag{5}$$

unde D, D' sînt semidiametrele *conjugate*, avem pentru semidiametrul D' conjugat cu raza vectoare $D^2 = x^2 + y^2$:

$$D'^2 = A^2 + B^2 - x^2 - y^2 = A^2\sin^2\omega t + B^2\cos^2\omega t = v^2/\omega^2,$$

deci

$$v = \omega D',\ D' = AB/h. \tag{6}$$

unde D' este semidiametrul conjugat cu raza vectoare.

c) $a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = \dot{v}_x = -\omega^2 A \cos \omega t = -\omega^2 x,$

$$a_y = \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = \dot{v}_y = -\omega^2 B \sin \omega t = -\omega^2 y,$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \omega^2\sqrt{x^2 + y^2} = \omega^2 r, \tag{7}$$

orientată spre centrul elipsei.

Accelerația tangențială se obține prin derivarea vitezei (2):

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \omega AB \frac{x\dot{x}/A^4 + y\dot{y}/B^4}{\sqrt{x^2/A^4 + y^2/B^4}} = \frac{\omega^2 xy(1/B^2 - 1/A^2)}{\sqrt{x^2/A^4 + y^2/B^4}} = \omega^2 hxy(1/B^2 - $$
$$- 1/A^2). \quad (8)$$

Accelerația normală:

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2} = \frac{\omega^2}{\sqrt{x^2/A^4 + y^2/B^4}} = \omega^2 h. \quad (9)$$

d) Se știe că $a_n = v^2/R$, unde R este raza de curbură a traiectoriei în punctul considerat. Atunci

$$a_n = \omega^2 h = v^2/R = \omega^2 A^2 B^2/(Rh^2),$$

de unde rezultă

$$R = A^2B^2/h^3 = A^2B^2(x^2/A^4 + y^2/B^4)^{3/2}. \quad (10)$$

** **1.2.244.** a) $x = OC - R\sin\theta = R(\theta - \sin\theta)$,

$$y = R - R\cos\theta = R(1 - \cos\theta). \quad (1)$$

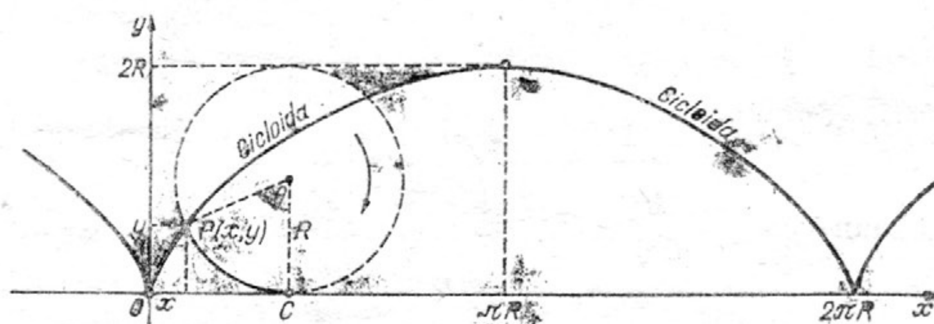


Fig. 1.2.244R

b) $v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x} = R(\dot{\theta} - \cos\theta \cdot \dot{\theta}) = R\dot{\theta}(1 - \cos\theta)$,

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y} = R\ \sin\ \theta \cdot \dot{\theta}, \quad (2)$$

unde am derivat pe $\sin\theta$ și $\cos\theta$ în raport cu *timpul* ca funcție de funcție, deoarece $\theta = \theta(t)$.

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 = 2R^2\dot{\theta}^2(1 - \cos\theta). \quad (3)$$

Derivăm această relație în raport cu timpul (v = const, deci $\dot{v} = 0$):

$$2v\dot{v} = 0 = 2R^2[2\dot{\theta}\ddot{\theta}(1 - \cos\theta) + \dot{\theta}\ \sin\theta \cdot \dot{\theta}],\ \text{de unde}$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{1}{2}\dot{\theta}\ \sin\ \theta : (1 - \cos\theta). \quad (4)$$

Atunci accelerația a_y devine:

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \dot{v}_y = R\cos\ \theta\dot{\theta}^2 + R\sin\theta\ddot{\theta} = R\dot{\theta}^2\left[\cos\theta - \sin\theta\frac{\sin\theta}{2(1-\cos\theta)}\right] =$$

$$= -R\dot{\theta}^2\frac{1}{2}(1 - \cos\theta) = -\frac{v^2}{4R}. \quad (5)$$

c) Lungimea unui element de traiectorie:

$$ds = vdt = R\dot{\theta}\sqrt{2(1-\cos\theta)}\ dt = 2R\dot{\theta}\ \sin\frac{\theta}{2}dt = 2R\ \sin\ \frac{\theta}{2}d\theta,$$

de unde prin integrare:

$$s = \int_0^{2\pi} 2R \sin \frac{\theta}{2}\, d\theta = -4R \cos \frac{\theta}{2}\Big|_0^{2\pi} = 8R. \tag{6}$$

* **1.2.245. Deoarece $v = \text{const}$, rezultă**

$$a_t = \frac{dv}{dt} = 0 \text{ și } a = a_n = v^2/R,$$

unde R este raza de curbură a traiectoriei. Cine cunoaște formula **razei de curbură a unei curbe plane:**

$$\frac{1}{R} = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}}, \tag{1}$$

poate calcula imediat:

$$y' = \frac{1}{2}(e^{x/b} - e^{-x/b}), \ y'' = \frac{1}{2b}(e^{x/b} + e^{-x/b}) = y/b^2,$$

$$1 + y'^2 = 1 + \frac{1}{4} e^{2x/b} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} e^{-2x/b} = y^2/b^2, \tag{2}$$

deci

$$\frac{1}{R} = \frac{y/b^2}{(y^2/b^2)^{3/2}} = \frac{b}{y^2} \tag{3}$$

și atunci accelerația

$$a = a_n = v^2/R = \frac{bv^2}{y^2}. \tag{4}$$

Dacă nu cunoaștem formula (1) putem calcula astfel:

$$v_x = \dot{x},\ v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = y'\dot{x},\ v^2 = v_x^2 + v_y^2 = \dot{x}^2(1 + y'^2). \tag{5}$$

Condiția $v = \text{const}$ dă prin derivarea relației precedente:

$$2v\dot{v} = 0 = 2\dot{x}\ddot{x}(1 + y'^2) + \dot{x} \cdot 2y'y''\dot{x},$$

de unde

$$\ddot{x} = -\frac{y'y''\dot{x}^2}{1 + y'^2}. \tag{6}$$

Accelerația:

$$a_x = \ddot{x},\ a_y = \dot{v}_y = y''\dot{x}^2 + y'\ddot{x}. \tag{7}$$

Înlocuind aici pe $\ddot{x}$ (6) găsim

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \frac{y''\dot{x}^2}{\sqrt{1 + y'^2}}. \tag{8}$$

Ținînd seama de expresia vitezei (5), găsim

$$a = \frac{v^2 y''}{(1 + y'^2)^{3/2}} = \frac{v^2}{R}. \tag{9}$$

Înlocuind derivatele calculate în (2), găsim

$$a = \frac{bv^2}{y^2},\ R = \frac{y^2}{b}. \tag{10}$$

(*) **1.2.246.** $a_x = \dot{v}_{0x} = 0$, $a_y = a = a_n/\cos\alpha$, $a_n = v^2/R$, $\cos\alpha = v_x/v$, rezultă

$$a = \frac{v^2}{R} \cdot \frac{v}{v_{0x}} = \frac{v^3}{Rv_{0x}}.$$

• **1.2.247.** Plecăm de la definiţia razei de curbură $R = \frac{ds}{d\theta}$ sau $ds = R d\theta$, unde $d\theta$ este unghiul subîntins de arcul elementar ds, unghi definit de normalele la traiectorie de la marginile (capetele) lui ds sau altfel unghiul cu care se roteşte tangenta la traiectorie cînd ne deplasăm pe curbă cu ds. Pe de altă parte, viteza pe traiectorie (viteza scalară) este $v = \frac{ds}{dt}$. Rezultă

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = R\dot{\theta}.$$

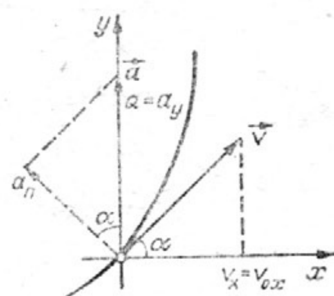


Fig. 1.2.246R

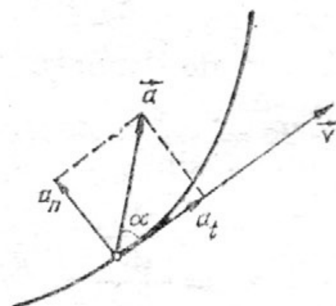


Fig. 1.2.248R

** **1.2.248.** $\text{ctg}\alpha = a_t/a_n = \frac{dv}{dt}\cdot\frac{R}{v^2}$, dar $R = \frac{ds}{d\theta}$, **(1)**

$$\text{ctg}\ \alpha = \frac{dv}{dt}\frac{ds}{d\theta}\frac{1}{v^2} = \frac{dv}{v d\theta},\ \left(\frac{ds}{dt} = v\right). \quad (2)$$

Separăm variabilele şi integrăm :

$$\frac{dv}{v} = \text{ctg}\ \alpha\cdot d\theta,\ \int_{v_0}^{v}\frac{dv}{v} = \int_{\theta_0}^{\theta}\text{ctg}\alpha\cdot d\theta,$$

$$\ln\frac{v}{v_0} = (\theta - \theta_0)\text{ctg}\alpha,\ v = v_0 e^{(\theta-\theta_0)\text{ctg}\alpha}. \quad (3)$$

Se poate integra şi nedefinit :

$$\int\frac{dv}{v} = \int\text{ctg}\alpha\ d\theta,\ \ln v = \text{ctg}\alpha\cdot\theta + C,$$

unde constanta de integrare se determină din condiţia iniţială : la $v = v_0$ corespunde $\theta = \theta_0$:

$$\ln v_0 = \text{ctg}\alpha\cdot\theta_0 + C,\ C = \ln v_0 - \text{ctg}\alpha\cdot\theta_0,\ \text{etc.}$$

* **1.2.249.** a) Mişcarea se compune dintr-o mişcare circulară uniformă în planul Oxy şi o translaţie uniformă după axa Oz : traiectoria este o *elice* înfăşurată pe un cilindru de rază r (ca filetul sau ghiventul unui şurub). Pasul elicei este

$$h = cT = c\frac{2\pi}{\omega} \quad (1)$$

şi unghiul de înclinare faţă de Oz :

$$\text{tg}\alpha = \frac{2\pi r}{h} = \frac{r\omega}{c}. \quad (2)$$

b) $v_x = \dot{x} = -\omega r \sin \omega t,\ v_y = \dot{y} = +\omega r \cos \omega t,\ v_z = \dot{z} = c;$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\omega^2 r^2 + c^2} = \omega r\sqrt{1 + c^2/(\omega r)^2} = \omega r/\sin\alpha = \text{const}. \quad (3)$$

c) $a_t = \dfrac{dv}{dt} = 0$, $(v = \text{const})$, deci

$$a_x = \dot{v}_x = -\omega^2 r \cos \omega t = -\omega^2 x;\ a_y = \dot{v}_y = -\omega^2 r \sin \omega t = -\omega^2 y, \quad (4)$$

$$a_z = \dot{v}_z = 0;\ a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \omega^2 r.$$

Dar $a_t = \dfrac{dv}{dt} = 0$, $(v = \text{const})$, de aceea

$$a = a_n = \omega^2 r = \frac{v^2 \sin^2\alpha}{r} = \frac{v^2}{R}, \quad (5)$$

de unde rezultă raza de curbură :

$$R = \frac{r}{\sin^2\alpha} = r(1 + \text{ctg}^2\alpha) = r + \frac{c^2}{r\omega^2}. \quad (6)$$

* **1.2.250.** $\dfrac{dy}{dx} = y' = \dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \dfrac{\dot{y}}{\dot{x}}$,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} y' = \frac{d}{dt} y' \cdot \frac{dt}{dx} = (y')^{\cdot} \frac{1}{\dot{x}} = \left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)^{\cdot} \frac{1}{\dot{x}} = \frac{\ddot{y}\dot{x} - \ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^3}. \quad (1)$$

$$-F_f \cos\alpha = ma_x = m\ddot{x},\ -F_f \sin\alpha - mg = ma_y = m\ddot{y}, \quad (2)$$

dar $\cos\alpha = v_x/v = \dot{x}/v,\ \sin\alpha = v_y/v = \dot{y}/v.$ (3)

Din (2), (3) rezultă derivatele :

$$\ddot{x} = -F_f \frac{\dot{x}}{mv},\ \ddot{y} = -F_f \frac{\dot{y}}{mv} - g, \quad (4)$$

care înlocuite în (1) dau

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{g}{\dot{x}^2} = -\frac{g}{v_x^2}. \quad (5)$$

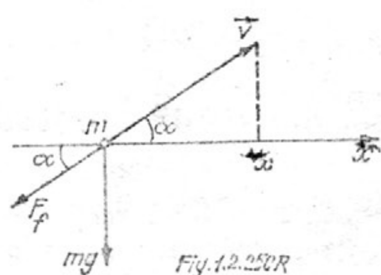


Fig. 1.2.250R

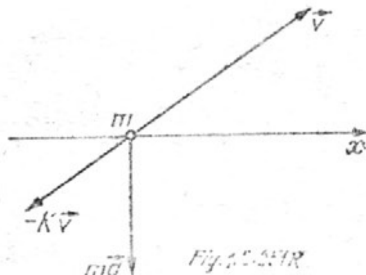


Fig. 1.2.251R

** **1.2.251.** Viteza limită de cădere liberă se obține atunci cînd forțele se echilibrează (forța de rezistență echilibrează greutatea) și accelerația se anulează :

$$mg - kc = 0,\ k = mg/c. \quad (1)$$

a) Lex secunda :

$$-kv_x = ma_x = m\frac{dv_x}{dt},\ -mg - kv_y = ma_y = m\frac{dv_y}{dt}. \quad (2)$$

Separăm variabilele şi integrăm:

$$dt = -\frac{m dv_x}{k v_x}, \quad \int dt = t = -\frac{m}{k}\int \frac{dv_x}{v_x} = -\frac{m}{k}\ln v_x + C_1,$$

$$dt = -\frac{m dv_y}{mg + kv_y}, \quad t = -\frac{m}{k}\int \frac{k dv_y}{mg + kv_y} = -\frac{m}{k}\ln(mg + kv_y) + C_2.$$

Constantele de integrare se determină din condiţiile iniţiale: la $t = 0$ avem $v_x = v_0 \cos\alpha_0$, $v_y = v_0 \sin \alpha_0$. Atunci rezultă:

$$t = -\frac{m}{k}\ln\frac{v_x}{v_0 \cos\alpha_0}, \quad v_x = v_0 \cos\alpha_0\, e^{-kt/m} = v_0 \cos \alpha_0\, e^{-gt/c}, \tag{3}$$

$$t = -\frac{m}{k}\ln\frac{mg + kv_y}{mg + kv_0 \sin\alpha_0} = -\frac{c}{g}\ln\frac{c + v_y}{c + v_0 \sin\alpha_0}, \quad v = (v_0 \sin\alpha_0 + c)e^{-gt/c} - c. \tag{4}$$

Se putea integra şi definit (limitele de integrare trebuie să se corespundă):

$$\int_0^t dt = t = -\frac{c}{g}\int_{v_0\cos\alpha_0}^{v_x} \frac{dv_x}{v_x} = -\frac{c}{g}\ln\frac{v_x}{v_0 \cos\alpha_0},$$

$$\int_0^t dt = t = -\frac{c}{g}\int_{v_0\sin\alpha_0}^{v_y} \frac{dv_y}{c + v_y} = -\frac{c}{g}\ln\frac{c + v_y}{c + v_0 \sin\alpha_0}.$$

b) Continuăm integrarea:

$$dx = v_x dt, \quad \int dx = x = \int v_0 \cos\alpha_0\, e^{-gt/c}\, dt = -\frac{c}{g} v_0 \cos \alpha_0 e^{-gt/c} + C_1,$$

$$dy = v_y dt, \quad \int dy = y = \int [(v_0 \sin \alpha_0 + c)e^{-gt/c} - c]\, dt =$$

$$= -\frac{c}{g}(v_0 \sin\alpha_0 + c)e^{-gt/c} - ct + C_2,$$

unde constantele de integrare se determină din condiţiile iniţiale: la $t = 0$, avem $x = 0$, $y = 0$, rezultă atunci:

$$x = \frac{c}{g} v_0 \cos\alpha_0 (1 - e^{-gt/c}), \tag{5}$$

$$y = \frac{c}{g}(v_0 \sin\alpha_0 + c)(1 - e^{-gt/c}) - ct. \tag{6}$$

Se poate integra şi definit:

$$\int_0^x dx = x = \int_0^t v_0 \cos\alpha_0 e^{-gt/c}\, dt = -\frac{c}{g} v_0 \cos\alpha_0 e^{-gt/c}\Big|_0^t =$$

$$= -\frac{c}{g} v_0 \cos\alpha_0 (e^{-gt/c} - 1),$$

$$\int_0^y dy = y = \int_0^t [(v_0 \sin\alpha_0 + c)e^{-gt/c} - c]\, dt = -\frac{c}{g}(v_0 \sin\alpha_0 + c)e^{-gt/c}\Big|_0^t - ct\Big|_0^t =$$

$$= -\frac{c}{g}(v_0 \sin\alpha_0 + c)(e^{-gt/c} - 1) - ct.$$

c) Timpul de urcare la înălţimea maximă rezultă imediat din (4) condiţia $v_y = 0$:

$$t_m = \frac{c}{g} \ln \left(1 + \frac{v_0}{c} \sin \alpha_0 \right).$$

d) Coordonatele înălţimii maxime se pot obţine înlocuind $t = t_m$ în (5) şi (6):

$$x_m = \frac{c}{g} v_0 \cos\alpha_0 \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{c} v_0 \sin\alpha_0} \right) = \frac{v_0^2 \cos\alpha_0 \sin\alpha_0}{g\left(1 + \frac{1}{c} v_0 \sin\alpha_0\right)}, \quad (8)$$

$$y_m = \frac{c}{g} (v_0 \sin\alpha_0 + c)\left(1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{c} v_0 \sin\alpha_0} \right) - \frac{1}{g} c^2 \ln \left(1 + \frac{v_0}{c} \sin\alpha_0\right) =$$

$$= \frac{c}{g} v_0 \sin\alpha_0 - \frac{c^2}{g} \ln \left(1 + \frac{1}{c} v_0 \sin\alpha_0 \right). \quad (9)$$

e) Pentru a obţine ecuaţia explicită a traiectoriei eliminăm timpul din ecuaţiile (5) şi (6):

$$t = -\frac{c}{g} \ln \left(1 - \frac{gx}{cv_0 \cos\alpha_0} \right),$$

$$y = \frac{c}{g} (v_0 \sin\alpha_0 + c) \frac{gx}{cv_0 \cos\alpha_0} - c \cdot \left(-\frac{c}{g} \right) \ln \left(1 - \frac{gx}{cv_0 \cos\alpha_0} \right) =$$

$$= \frac{v_0 \sin\alpha_0 + c}{v_0 \cos\alpha_0} \cdot x + \frac{c^2}{g} \ln \left(1 - \frac{gx}{cv_0 \cos\alpha_0} \right). \quad (10)$$

Traiectoria are o asimptotă verticală, cînd se anulează argumentul logaritmului:

$$1 - \frac{gx}{cv_0 \cos\alpha_0} = 0, \quad x = \frac{c}{g} v_0 \cos\alpha_0. \quad (11)$$

f) Cazul aruncării în vid se obţine făcînd $k = 0$, adică $c \to \infty$ (amintim dezvoltarea în serie:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots \Big):$$

$$\begin{cases} v_x = v_0 \cos\alpha_0, & (3') \\ v_y \to (v_0 \sin\alpha_0 + c)(1 - gt/c) - c \to v_0 \sin\alpha_0 - gt; & (4') \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \to \frac{c}{g} v_0 \cos\alpha_0 (gt/c) = v_0 \cos\alpha_0 \cdot t, & (5') \\ y \to \frac{c}{g} (v_0 \sin\alpha_0 + c) \left(gt/c - g^2t^2/(2c^2)\right) - ct \to v_0 \sin\alpha_0 \cdot t - \frac{1}{2} gt^2. & (6') \end{cases}$$

Folosim dezvoltarea

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots :$$

$$t_m \to \frac{c}{g} \frac{v_0}{c} \sin\alpha_0 = \frac{1}{g} v_0 \sin\alpha_0. \quad (7')$$

$$\begin{cases} x_m = \frac{1}{g} v_0^2 \sin\alpha_0 \cos\alpha_0, & (8') \\ y_m \to \frac{c}{g} v_0 \sin\alpha_0 - \frac{c^2}{g}\left(\frac{v_0}{c} \sin\alpha_0 - \frac{v_0^2 \sin^2\alpha_0}{2c^2}\right) = \frac{1}{2g} v_0^2 \sin^2\alpha_0. & (9') \end{cases}$$

$$y \to x \operatorname{tg}\alpha_0 + \frac{cx}{v_0 \cos\alpha_0} + \frac{c^2}{g}\left(-\frac{gx}{cv_0 \cos\alpha_0} - \frac{g^2x^2}{2c^2v_0^2\cos^2\alpha_0}\right) =$$

$$= x\operatorname{tg}\alpha_0 - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2\alpha_0}. \quad (10')$$

Traiectoria este o parabolă (care n-are asimptotă). Am regăsit astfel rezultatele cunoscute de la aruncarea în vid.

Cîmpul gravitațional

• **1.2.252.** Considerăm două elemente identice de masă dm fiecare, situate diametral opus, ca în figură. Descompunem cîmpul produs de fiecare element într-o componentă axială dΓ și o componentă radială. Observăm că cele două componente radiale se distrug totdeauna două cîte două, pentru oricare pereche de elemente identice situate diametral opus, astfel încît trebuie să sumăm doar componentele axiale pentru a obține cîmpul total care va fi deci axial:

$$d\Gamma = -\gamma \frac{dm}{r^2} \cos\alpha = -\gamma \frac{dm\ y}{(R^2 + y^2)^{3/2}},$$

de unde prin integrare pe întregul inel:

$$\Gamma = \int d\Gamma = -\gamma \frac{y}{(R^2 + y^2)^{3/2}} \int dm = -\gamma \frac{my}{(R^2 + y^2)^{3/2}}. \quad (1)$$

Valoarea maximă a cîmpului $\Gamma(y)$ este acolo unde derivata $\Gamma'(y) = 0$:

$$\Gamma'(y) = -\gamma m \frac{(R^2 + y^2)^{3/2} - y \frac{3}{2} (R^2 + y^2)^{1/2} \cdot 2y}{(R^2 + y^2)^3} = 0,$$

ceea ce dă $\qquad y_m = \pm R/\sqrt{2}$

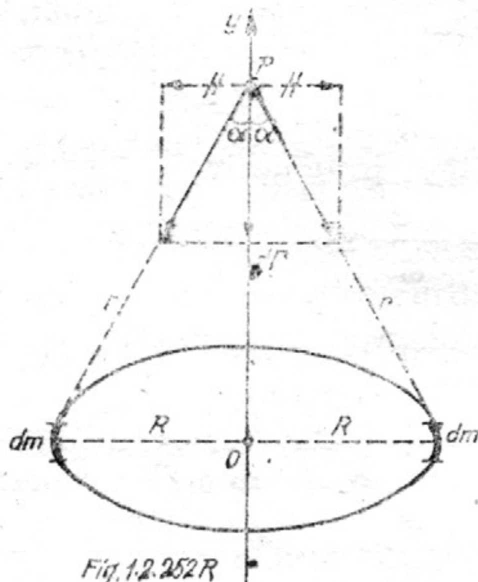


Fig. 1.2.252 R

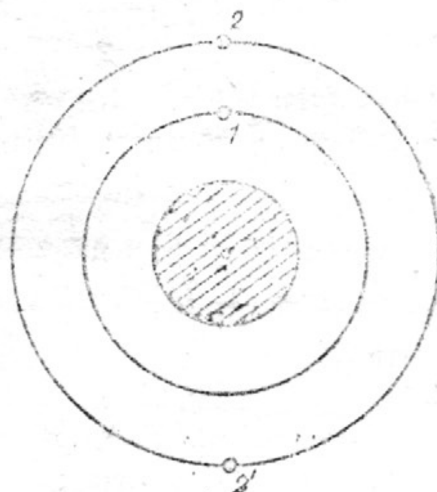


Fig. 1.2.253 R

şi deci cîmpul maxim va fi $\Gamma(y_m)$: (2)

$$\Gamma_{max} = \mp \frac{2\gamma m}{3R^2\sqrt{3}}. \quad (3)$$

1.2.253. $h \cong (g_P - g_B)\, R/(2g_P) = 16$ km.

1.2.254. $h \cong 3\pi R/(2\gamma\rho T^2) = 11$ km.

1.2.255. $\rho = 3g_0/(4\pi R\gamma) = 5{,}5$ g/cm³.

1.2.256. $\rho = 3\pi n : [(n-1)\,\gamma T^2] = 3{,}14$ g/cm³.

1.2.257. $v = v_I/\sqrt{n}$.

1.2.258. $T = 2\pi r\sqrt{r/(\gamma M)} = 1$h 27 min.

1.2.259. $T = \sqrt{3\pi/(\gamma\rho)} = 1{,}2$ ms.

1.2.260. $\rho = 24\pi/(\gamma T^2\alpha^3) \sim 10^3$. kg/m³.

1.2.261. $t = 2\pi : [\sqrt{g_0R^2/r^3} - 2\pi/T] = 10{,}5$ h.

1.2.262. $r/R = \sqrt[3]{n^2 : (n \pm 1)^2} \cdot \sqrt[3]{g_0T^2_0 : (4\pi^2R)}$; $\frac{r_s}{R} = \sqrt[3]{g_0T_0^2/(4\pi^2R)} = 6{,}56$, $(n \to \infty)$.

1.2.263. $[(T_2/T_1)^{2/3} + 1] : [(T_2/T_1)^{2/3} - 1] = 4{,}4$.

1.2.264. $\omega = \sqrt{\gamma(m_1 + m_2)/R^3} = 9{,}82 \cdot 10^{-10}$ rad/s, $T = 2\pi/\omega = 32$ ani 97 zile;

$$v_{1,2} = m_{2,1}\sqrt{\gamma : [R(m_1 + m_2)]} = 1{,}93 \text{ km/s, resp. } 3{,}86 \text{ km/s}.$$

1.2.265. $v_J = (2\pi r/T)\sqrt{r/R_J} = 39$ km/s.

1.2.266. $g_S = 4\pi^2R : \left(T^2 \sin^2\frac{\alpha}{2}\right) = 270$ m/s².

1.2.267. $T = \sqrt{3\pi/(\gamma\rho)} = 1$h 24 min.

1.2.268. $T = (2\pi R/R_0)\sqrt{R/g_0} = 27{,}4$ zile.

1.2.269. $m_S = 4\pi^2R^3/(\gamma T^2) = 2 \cdot 10^{30}$ kg.

1.2.270. $T \cong 3mg_0\,(l/R)\left(1 - \frac{3h}{R}\right) M : (M + m) = 21$ mN.

1.2.271. $h = 2\sqrt[3]{gR^2\tau^2/\pi^2} - 2R = 23200$ km.

* **1.2.272.** Conform legii a III-a a lui *Kepler*, pătratul perioadei de revoluţie a unui satelit (respectiv, planetei în cazul sistemului solar) este proporţional cu cubul semiaxei mari a traiectoriei eliptice a satelitului: $T^2 = ka^3$. În cazul nostru: $T^2 = kR^3$. Prin logaritmarea şi apoi diferenţierea acestei relaţii (derivata logaritmică), obţinem:

$$2\frac{dT}{T} = 3\frac{dR}{R}.$$

Pe de altă parte, $T = 2\pi/\omega$ care, la fel, prin derivare logaritmică dă

$$\frac{dT}{T} = -\frac{d\omega}{\omega}.$$

Ţinînd seama că $v_r = \frac{dR}{dt}$, găsim acceleraţia unghiulară

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = -\frac{\omega}{T}\frac{dT}{dt} = -\frac{3}{2}\frac{\omega}{R}\frac{dR}{dt} =$$

$$= -\frac{3}{2}\frac{\omega}{R}\cdot v_r = -1{,}0 \cdot 10^{-23} \text{ rad/s}^2.$$

** **1.2.273.** Datorită simetriei cîmpul rezultant va fi pe direcţia *Oy*. Luăm un element de masă d*m* care produce un cîmp radial $d\Gamma = -\gamma dm/R^2$. Componenta transversală $d\Gamma \cdot \sin\theta$ se va distruge cu cea transversală a elementului identic aşezat simetric faţă de *Oy*, astfel încît rămîn numai componentele $d\Gamma \cdot \cos\theta$:

$$\Gamma = \int d\Gamma \cos\theta = -\int \gamma \frac{dm}{R^2} \cos\theta, \text{ dar } \frac{dm}{m} = \frac{d\theta}{\alpha}, \qquad (1)$$

$$\Gamma = -\int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \frac{\gamma}{R^2} \frac{m}{\alpha} \cos\theta \, d\theta = -2 \frac{\gamma m}{R^2 \alpha} \int_0^{\alpha/2} \cos\theta \, d\theta = -2\gamma \frac{m}{R^2\alpha} \sin \frac{\alpha}{2}. \qquad (2)$$

În particular, pentru un semicerc

$$\alpha = \pi; \; \Gamma = -2\gamma \frac{m}{\pi R^2}, \qquad (3)$$

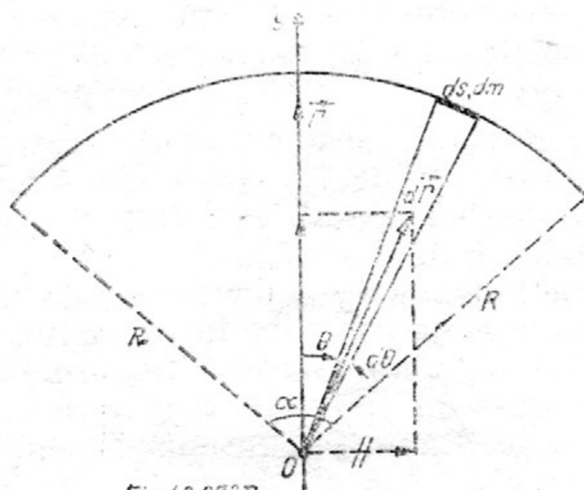


Fig. 1.2.273R

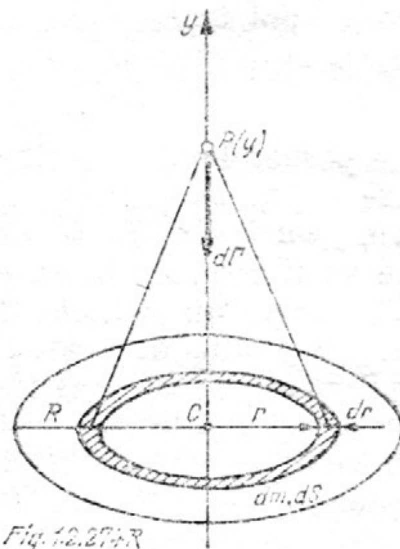


Fig. 1.2.274R

** **1.2.274.** Vom folosi rezultatul problemei **1.2.252.** Alegem un inel elementar de rază *r*, de grosime d*r* şi de masă d*m*. Cîmpul creat în punctul *P*(*y*) este

$$d\Gamma = -\gamma \frac{y dm}{(r^2 + y^2)^{3/2}}, \qquad (1)$$

Aria d*S* a inelului se poate calcula în 3 moduri : a) este aria unei fîşii de lungime $2\pi r$ şi lăţime *infinitezimală* d*r* :

$$dS = 2\pi r dr, \qquad (2)$$

b) este creşterea *infinitezimală* a ariei cercului πr^2 datorită creşterii *infinitezimale* a razei cu d*r*, deci este diferenţiala :

$$dS = d(\pi r^2) = 2\pi r dr,$$

c) este diferenţa dintre ariile cercurilor de rază $r + dr$ şi raza *r* :

$$dS = \pi (r + dr)^2 - \pi r^2 = 2\pi r dr + \pi (dr)^2 \to 2\pi r dr,$$

întrucît $(dr)^2$ este un indinit mic de ordin superior şi dispare la limită faţă de primul termen.

Acum putem exprima masa dm :

$$dm = \frac{m}{\pi R^2} dS = \frac{2 m r dr}{R^2}, \qquad (3)$$

Acum integrăm (1):

$$\Gamma = \int \mathrm{d}\Gamma = \int_0^R -\gamma y \frac{2mr\mathrm{d}r}{R^2(r^2+y^2)^{3/2}} = -\gamma \frac{my}{R^2} \cdot \frac{-2}{\sqrt{r^2+y^2}}\Bigg|_0^R =$$

$$= -\frac{2\gamma m}{R^2}\left[\frac{y}{|y|} - \frac{y}{\sqrt{R^2+y^2}}\right]. \qquad (4)$$

Cînd traversăm discul trecînd prin centrul său intensitatea cîmpului gravitațional are un *salt*:

$$\Gamma_+ = \lim_{y\to+0} \frac{-2\gamma m}{R^2}\left[1 - \frac{y}{\sqrt{R^2+y^2}}\right] = -\frac{2\gamma m}{R^2}, \qquad (5)$$

$$\Gamma_- = \lim_{y\to-0} \frac{-2\gamma m}{R^2}\left[-1 - \frac{y}{\sqrt{R^2+y^2}}\right] = +\frac{2\gamma m}{R^2}.$$

Pentru a obține cîmpul unui plan infinit înlocuim întîi în (4) $m = \sigma\pi R^2$ și apoi trecem la limita $R \to \infty$:

$$\Gamma = -2\pi\gamma\sigma \frac{y}{|y|} = \mp 2\pi\gamma\sigma, \qquad (6)$$

cîmpul este perpendicular pe plan, spre plan, și este constant. Acest rezultat se poate obține elegant cu ajutorul teoremei lui Gauss. Dacă formăm un „condensator" din două plane identice, paralele și infinite, cîmpul între plane va fi *zero*, iar în exterior va fi dublul lui (6).

** **1.2.275.** Luăm un element dm de lungime dy la distanța y de centrul firului. Cîmpul produs de acest element se descompune într-o componentă normală $\mathrm{d}\Gamma\cos\theta$ și una longitudinală $\mathrm{d}\Gamma\sin\theta$. Aceasta din urmă se va distruge cu componenta similară produsă de un element de masă identic simetric de cealaltă parte a mediatoarei. Rămîne să însumăm componentele normale:

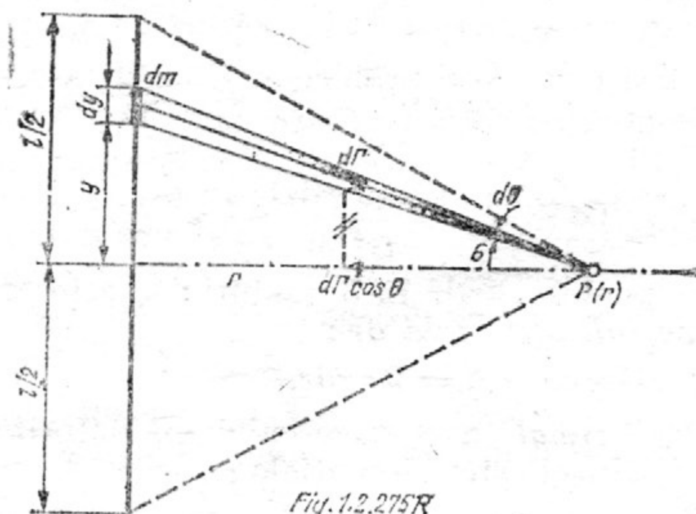


Fig. 1.2.275R

$$\Gamma = \int \mathrm{d}\Gamma\cos\theta = -\int \gamma \frac{\mathrm{d}m}{r^2+y^2}\frac{r}{\sqrt{r^2+y^2}}, \text{ dar } \mathrm{d}m = \frac{m}{l}\mathrm{d}y,$$

$$\Gamma = -\gamma r \frac{m}{l}\int_{-l/2}^{l/2} \frac{\mathrm{d}y}{(r^2+y^2)^{3/2}} = -2\gamma m \frac{r}{l}\int_0^{l/2} \frac{\mathrm{d}y}{(r^2+y^2)^{3/2}} =$$

$$= -2\gamma m \frac{r}{l}\frac{y}{r^2\sqrt{r^2+y^2}}\Bigg|_0^{l/2} = -\gamma \frac{m}{r}\frac{1}{\sqrt{l^2/4+r^2}}. \qquad (1)$$

Pentru a obține cîmpul unui fir infinit, înlocuim întîi masa m cu λl și apoi trecem la limita $l \to \infty$.

$$\Gamma = -\gamma \frac{\lambda l}{r} \frac{1}{\sqrt{l^2/4 + r^2}} \to -2\gamma \frac{\lambda}{r}, \tag{2}$$

rezultatul se putea obține elegant cu ajutorul teoremei lui Gauss. Cîmpul scade doar invers proporțional cu puterea *întîia* a distanței r.

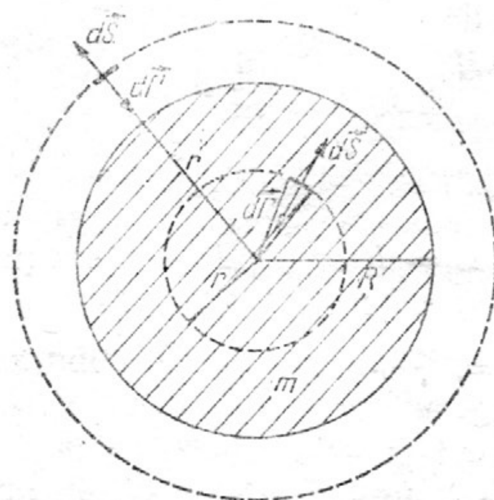
** **1.2.276.** Vom aplica teorema lui Gauss : fluxul cîmpului gravitațional printr-o suprafață închisă este proporțional cu masa conținută în interiorul suprafeței :

$$\Phi = \oint_S \vec{\Gamma}\, d\vec{S} = -4\pi\gamma\, m_{int}, \tag{1}$$

unde γ este constanta gravitațională (cerculețul la integrală înseamnă suprafață *închisă*).

Alegem o suprafață sferică concentrică, în exteriorul sferei date. In virtutea simetriei sferice $\vec{\Gamma}$ este radial și depinde numai de distanța r pînă la centrul sferei, deaceea fluxul prin această suprafață (gaussiană) se calculează imediat :

$$\Phi = \oint_S \vec{\Gamma}\, d\vec{S} = \oint_S \Gamma\, dS = \Gamma \oint_S dS = \Gamma(r)\, S = \Gamma \cdot 4\pi r^2,$$



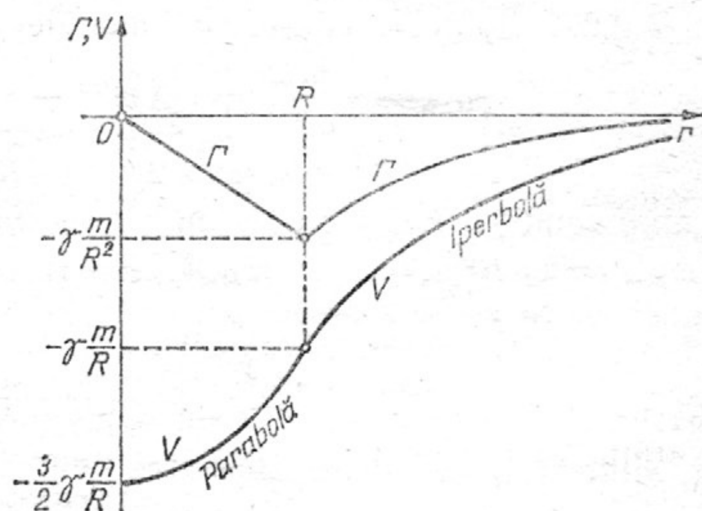


Fig.1.2.276R

și conform teoremei lui Gauss :

$$\Phi = \Gamma 4\pi r^2 = -4\pi\gamma m,\ \Gamma = -\gamma \frac{m}{r^2},\ r \geqslant R, \tag{2}$$

adică la fel, ca și cum masa sferei ar fi concentrată în centrul sferei. Semnul minus arată caracterul atractiv al cîmpului : $\vec{\Gamma}$ este orientat spre centrul sferei, în sens opus razei vectoare.

Analog, luînd o suprafață sferică gaussiană în interiorul sferei date, găsim

$$\Phi = \Gamma(r) \cdot 4\pi r^2 = -4\pi\gamma m_{int} = -4\pi\gamma m \frac{r^3}{R^3},$$

$$\Gamma = -\gamma \frac{m}{R^3} r,\ r \leqslant R. \tag{3}$$

Potențialul se obține conform definiției sale (considerăm potențialul zero la infinit):

a) În exteriorul sferei date:

$$V = -\int_{\infty}^{r} \vec{\Gamma}\, d\vec{r} = -\int_{\infty}^{r} \Gamma\, dr = \int_{\infty}^{r} \gamma \frac{m}{r^2}\, dr = -\gamma \frac{m}{r}\Big|_{\infty}^{r} = -\gamma \frac{m}{r}, \ r \geqslant R, \quad (4)$$

ca și cum masa ar fi concentrată în centrul sferei.

b) În *interiorul* sferei date:

$$V = -\int_{\infty}^{r} \vec{\Gamma}\, d\vec{r} = -\int_{\infty}^{R} \Gamma\, dr - \int_{R}^{r} \Gamma\, dr = \int_{\infty}^{R} \gamma \frac{m}{r^2}\, dr + \int_{R}^{r} \gamma \frac{m}{R^3} r dr =$$

$$= -\gamma \frac{m}{r}\Big|_{\infty}^{R} + \frac{1}{2}\gamma \frac{m}{R^3} r^2 \Big|_{R}^{r} = -\frac{3}{2}\gamma \frac{m}{R}\left(1 - \frac{r^2}{3R^2}\right), \ r \leqslant R. \quad (5)$$

În centrul sferei cîmpul este nul, iar potențialul:

$$V_0 = -\frac{2}{3}\gamma \frac{m}{R}, \ r = 0. \quad (6)$$

Vd. figura.

** **1.2.277.** a) Legea conservării energiei ne dă:

$$\frac{1}{2} m v_0^2 - \gamma \frac{mM}{R} = \frac{1}{2} m v^2 - \gamma \frac{mM}{r}, \ g_0 = \gamma \frac{M}{R^2},$$

$$v^2 = v_0^2 - 2g_0 R^2(1/R - 1/r). \quad (1)$$

Punînd condiția $v = 0$ găsim înălțimea maximă:

$$r_{max} = 2g_0 R^2 : (2g_0 R - v_0^2), \ h_{max} = r_{max} - R = R v_0^2 : (2g_0 R - v_0^2). \quad (2)$$

Atunci (2) se poate scrie:

$$v = \sqrt{2g_0 R^2(1/r - 1/r_{max})} = \frac{dr}{dt}. \quad (3)$$

Separăm variabilele:

$$dt = \frac{dr}{\sqrt{2g_0 R^2(1/r - 1/r_{max})}}. \quad (4)$$

Facem schimbarea de variabilă:

$$r = x^2, \ dr = 2x\, dx;$$

$$dt = \sqrt{\frac{r_{max}}{2g_0 R^2}} \frac{2x^2 dx}{\sqrt{r_{max} - x^2}}. \quad (5)$$

Integrăm prin părți:

$$I = \int \frac{2x^2\, dx}{\sqrt{r_{max} - x^2}} = -\int 2x\, d\sqrt{r_{max} - x^2} =$$

$$= -2x\sqrt{r_{max} - x^2} + 2\int \sqrt{r_{max} - x^2}\, dx.$$

Dar

$$\int \sqrt{r_{max} - x^2}\, dx = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{r_{max} - x^2} + r_{max} \arcsin \frac{x}{\sqrt{r_{max}}}\right].$$

Rezultă pînă la urmă:

$$I = \int \frac{2x^2 \mathrm{d}x}{\sqrt{r_{max} - x^2}} = -x\sqrt{r_{max} - x^2} + r_{max} \arcsin \frac{x}{\sqrt{r_{max}}} + C. \qquad (6)$$

Acum integrăm ecuația (5) ($r = x^2$):

$$t = \sqrt{\frac{r_{max}}{2g_0R^2}}\left[-\sqrt{r}\sqrt{r_{max} - r} + r_{max} \arcsin \sqrt{\frac{r}{r_{max}}} + C\right],$$

unde constanta de integrare C se determină din condiția inițială: la $t = 0$ avem $r = R$, astfel încît rezultă:

$$t = \sqrt{\frac{r_{max}}{2g_0R^2}}\left[\sqrt{R}\sqrt{r_{max} - R} - \sqrt{r}\sqrt{r_{max} - r} + r_{max} \arcsin \sqrt{\frac{r}{r_{max}}} - \right.$$

$$\left. - r_{max} \arcsin \sqrt{\frac{R}{r_{max}}}\right]. \qquad (7)$$

Timpul de urcare rezultă din condiția $r = r_{max}$.

$$t_u = \sqrt{\frac{r_{max}}{2g_0R^2}}\left[\sqrt{R}\sqrt{r_{max} - R} + \frac{\pi}{2} r_{max} - r_{max} \arcsin \sqrt{\frac{R}{r_{max}}}\right].$$

Ținînd seama că pentru $x > 0$:

$$\frac{\pi}{2} - \arcsin x = \arcsin \sqrt{1 - x^2},$$

obținem:

$$t_u = \frac{R}{2g_0R - v_0^2}\left[v_0 + \frac{2g_0R}{\sqrt{2g_0R - v_0^2}} \arcsin \frac{v_0}{\sqrt{2g_0R}}\right]. \qquad (8)$$

b) Legea conservării energiei dă:

$$-\gamma \frac{mM}{R + h} = \frac{1}{2} mv'^2 - \gamma \frac{mM}{R}, \quad g_0 = \gamma \frac{M}{R^2},$$

de unde

$$v' = \sqrt{2g_0hR/(R + h)}. \qquad (9)$$

Timpul de cădere este egal cu timpul de urcare (8); doar că trebuie să înlocuim acolo v_0 cu v' (9) și atunci obținem:

$$t_c = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{R + h}{2g_0}}\left[\sqrt{Rh} + (R + h) \arcsin \sqrt{\frac{h}{R + h}}\right]. \qquad (10)$$

1.3. Energia mecanică

1.3.1. $L = mgh + m\Delta v\langle v\rangle = 12{,}5$ J.
1.3.2. $E/(m\tau) = (2gh)^{3/2} : (4l) = 71{,}3$ W/kg.
1.3.3. $t_{min} = 2\sqrt{s/(\mu g)} = 40$ s; $P_{min} = \mu mg\sqrt{\mu gs} = 23$ kW.
1.3.4. $d = v'^3(M - m)^3/(2PM^2) = 970$ m.
1.3.5. $\mu = m_2(h_1 + h_2) : [m_1(h_1 - h_2)] = 0{,}30$.
** **1.3.6.** Condiția de echilibru:

$$Mg + \frac{m}{l}(l - l_0) g - \mu \frac{m}{l} l_0 g = 0. \qquad (1)$$

Fie la momentul t lanţul deplasat pe distanţa x ca în figură atunci principiul doi dă

$$Mg + \frac{m}{l}(l - l_0 + x)g - \mu\frac{m}{l}(l_0 - x)g = (m + M)a. \qquad (2)$$

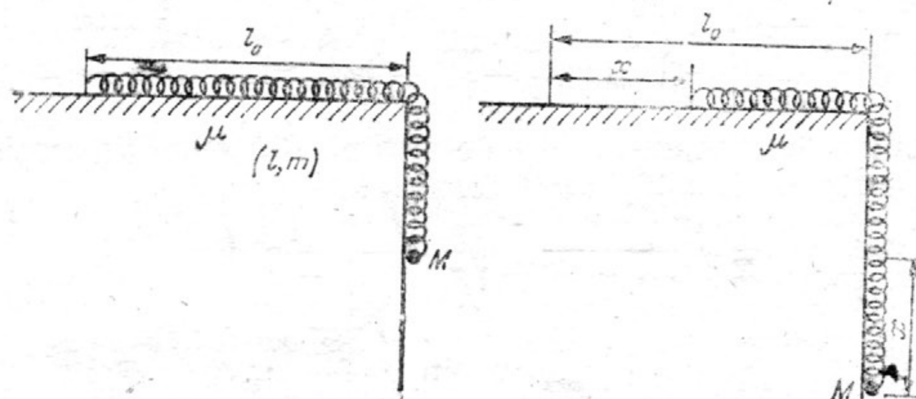


Fig. 1.3.6R

Înlocuind aici pe μ scos din (1) găsim:

$$a = g\frac{x}{l_0} \text{ sau } \frac{dv}{dt} = g\frac{x}{l_0}. \qquad (3)$$

Acest rezultat simplu era de aşteptat întrucît forţa, deci acceleraţia, variază liniar cu x şi pentru $x = 0$ avem $F = 0 = a$, iar pentru $x = l_0$ (cînd lanţul părăseşte masa) $a = g$ (cădere liberă).

Înmulţim ambii membri ai ecuaţiei (3) cu dx $(= vdt)$:

$$\frac{dv}{dt}dx = g\frac{xdx}{l_0} \text{ sau } vdv = g\frac{xdx}{l_0}$$

şi integrăm:

$$\int vdv = \int\frac{gxdx}{l_0} = \frac{g}{l_0}\int xdx, \ \frac{1}{2}v^2 = \frac{g}{l_0}\frac{1}{2}x^2 + C.$$

Constanta de integrare se determină din condiţia iniţială: pentru $x = 0$ avem $v = 0$, deci $C = 0$:

$$v^2 = \frac{g}{l_0}x^2, \ v = \sqrt{\frac{g}{l_0}}\cdot x. \qquad (4)$$

Cînd lanţul părăseşte masa

$$x = l_0 \text{ şi } v' = \sqrt{gl_0}. \qquad (5)$$

Se poate integra şi definit (limitele de integrare se corespund):

$$\int_0^v vdv = \frac{g}{l_0}\int_0^x xdx \text{ sau } \frac{1}{2}v^2 = \frac{1}{2}\frac{g}{l_0}x^2.$$

Viteza finală se poate obţine imediat din formula generalizată a lui Galilei, care se deduce astfel:

$$\Delta E_c = L \text{ sau } \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \int\vec{F}\,\vec{dr} = \int F_t ds = \int ma_t ds \text{ sau}$$

$$v^2 = v_0^2 + 2\int_{s_0}^{s} a_t\,ds \text{ sau } v^2 = v_0^2 + 2\bar{a}_t^{(s_0, s)}\cdot(s - s_0), \text{ (Galilei)} \qquad (6)$$

unde $\bar{a}_t^{(s_0, s)}$ este acceleraţia tangenţială mediată pe intervalul (s_0, s).

În cazul nostru $v_0 = 0$, accelerația variază liniar cu coordonata și $\bar{a}^{(0, l_0)} = \frac{1}{2}(0 + g) = \frac{g}{2}$,

astfel încît obținem imediat $v^2 = 2\frac{g}{2} l_0$.

1.3.7. $\mu = h : (b + s) = 0{,}050$.

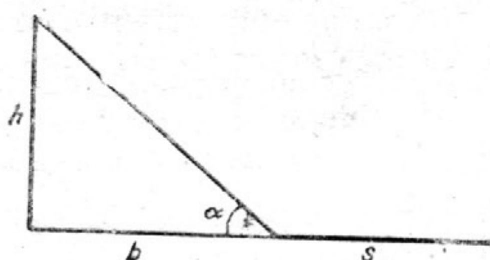


Fig. 1.3.7R

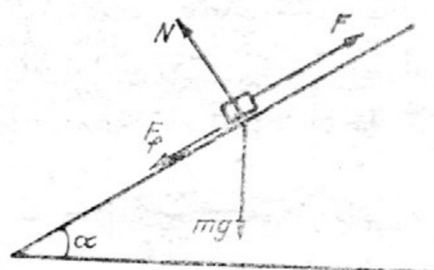


Fig. 1.3.9R

1.3.8. $\mu = 2\,\mathrm{tg}\alpha = 0{,}314$.

1.3.9. $P/(gp) = \sin(\alpha + \varphi) : \cos\varphi = \frac{1}{2}$, $\alpha = 27°$.

1.3.10. $Q = Q_1 + Q_2$, $Q_1 = \mu\, mg \cos\alpha \cdot \frac{v_0^2}{2g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}$,

$$Q_2 = \mu\, mg \cos\alpha \cdot \frac{1}{2} g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)\left[t - \frac{v_0}{g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}\right]^2,$$

$$Q = 7{,}2 \text{ J}.$$

1.3.11. $v_0 = \sqrt{2g(h + \mu d)} = 6{,}3$ m/s, $v' = \sqrt{2g(h - \mu d)} = 0$.

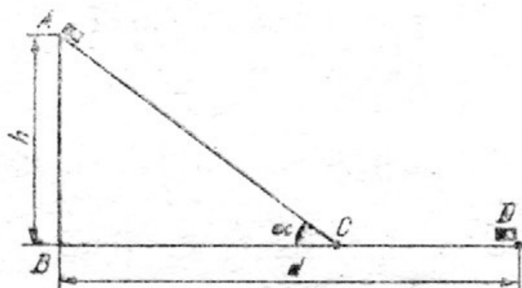


Fig. 1.3.11R

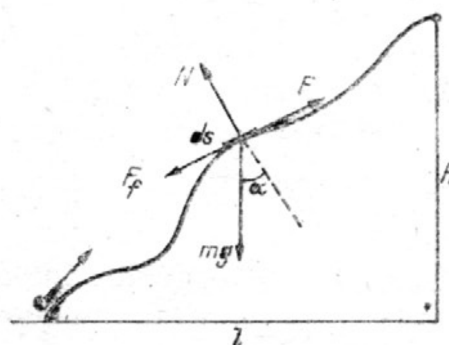


Fig. 1.3.13R

1.3.12. $-\Delta E = mgs\sin\alpha - \frac{1}{2}mv^2 = 5{,}9$ J.

(**) **1.3.13.** Deoarece viteza de deplasare este neglijabilă, avem pe direcția normală și tangențială la traiectorie:

$$N - mg\cos\alpha = 0,\ F_t - F_f - mg\sin\alpha = 0,\ F_f = \mu N,\ (F = F_t), \quad (1)$$

astfel încît

$$F_t = mg\sin\alpha + \mu\, mg\cos\alpha, \quad (2)$$

$$L = \int F_t\, ds = \int mg\sin\alpha\, ds + \int \mu\, mg\cos\alpha\, ds. \quad (3)$$

Dar $$ds\cos\alpha = dx \text{ şi } ds\sin\alpha = dy, \tag{4}$$

astfel încît $$L = mg\int_0^h dy + \mu mg\int_0^l dx = mgh + \mu mgl =$$
$$= 784\ \text{J} + 196\ \text{J} = 980\ \text{J}. \tag{5}$$

Primul termen reprezintă lucrul mecanic împotriva forţei de greutate (creşterea energiei potenţiale), iar al doilea – lucrul mecanic împotriva forţei de frecare (căldura degajată prin frecare).

Rezultatul (5) se poate obţine şi fără integrale, judecînd cu deplasări foarte mici δs şi sumînd lucrurile mecanice elementare:

$$\delta L = F_t\delta s = mg(\sin\alpha\delta s) + \mu mg(\cos\alpha\delta s) = mg\delta y + \mu mg\delta x, \tag{6}$$
$$L = \Sigma\,\delta L = \Sigma\, mg\,\delta y + \Sigma\,\mu\, mg\,\delta x =$$
$$= mg\,\Sigma\,\delta y + \mu mg\,\Sigma\,\delta x = mgh + mgl. \tag{7}$$

1.3.14. $P = 2mgv\,(h_1 - h_2)/d = 200$ kW.

1.3.15. $\text{tg}\,\alpha \cong P/(mgv) - \mu = 0{,}030 = 3{,}0\ \%$.

1.3.16. $P = 2mgv\,\sin\alpha \approx 2mgvp = 60$ kW.

1.3.17. $v_0 = 2v_1v_2\cos\alpha : (v_1 + v_2) \cong 37{,}5$ km/h.

1.3.18. $L = \frac{1}{2}mv_0^2\mu : (\mu + \text{tg}\,\alpha) = 0{,}10$ J.

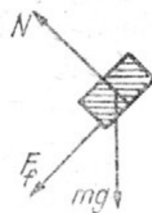
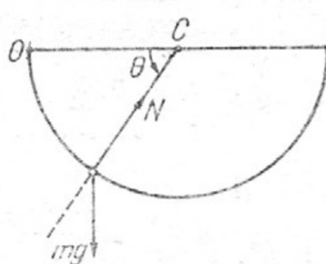


Fig.1.3.18R



a

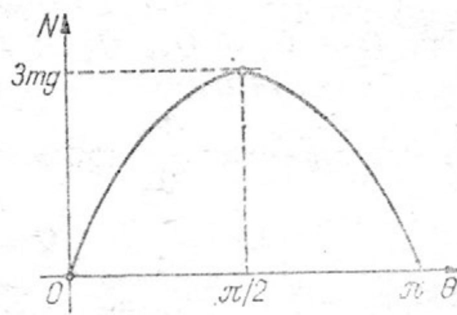


Fig.1.3.24R b

1.3.19. $E_c = E_0\cos^2\alpha_0 = 5{,}0$ J, $E_p = E_0\sin^2\alpha_0 = 5{,}0$ J.

1.3.20. $\cos\alpha = \sqrt{f} = 1/2,\ \alpha = 60°$.

(*) **1.3.21.** a) Bătaia realizată faţă de Pămînt

$$b = \frac{1}{g}v_0^2\sin 2\alpha$$

trebuie să fie mai mică decît lungimea scîndurii exact cu cît se deplasează scîndura înapoi în timpul cît pisica se află în aer:

$$b = \frac{1}{g}v_0^2\sin 2\alpha = l - v'(t_u + t_c),\quad t_u + t_c = 2\frac{1}{g}v_0\sin\alpha, \tag{1}$$

iar viteza scîndurii v' rezultă din conservarea impulsului în procesul săriturii:

$$0 = mv_0\cos\alpha - Mv'.$$

Rezultă astfel:

$$v_0 = \sqrt{lg : [(1 + m/M)\sin 2\alpha]}. \tag{2}$$

Viteza este minimă dacă $\sin 2\alpha = 1$, deci $\alpha = 45°$, atunci

$$v_{0\min} = \sqrt{lg : (1 + m/M)} = 1{,}8\ \text{m/s}. \tag{3}$$

$$L = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}Mv'^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}M\,v_0^2\cos^2\alpha(m^2/M^2) =$$

$$= \frac{1}{2} m v_0^2 \left(1 + \frac{m}{M}\cos^2\alpha\right) = \frac{1}{2} gl \frac{mM}{m+M}\left[\frac{1}{\sin 2\alpha} + \frac{m}{M}\frac{\cos^2\alpha}{\sin 2\alpha}\right] =$$

$$= \frac{1}{2} gl \frac{mM}{m+M}\left[\frac{1}{2}\left(\operatorname{tg}\alpha + \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\right) + \frac{m}{M}\frac{1}{2}\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\right] =$$

$$= \frac{1}{2} gl \frac{mM}{m+M}\frac{1}{2}\left[\operatorname{tg}\alpha + \left(1 + \frac{m}{M}\right)\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\right]. \quad (4)$$

În paranteză mare avem suma a două mărimi variabile al căror produs este *constant*. Atunci suma este minimă cînd mărimile sînt egale :

$$\operatorname{tg}\alpha = (1 + m/M) : \operatorname{tg}\alpha, \quad \operatorname{tg}\alpha_0 = \sqrt{1 + m/M} = \sqrt{3}, \quad \alpha_0 = 60°. \quad (5)$$

Atunci

$$L_{\min} = \frac{1}{2} gl \frac{mM}{m+M} \operatorname{tg}\alpha_0 = \frac{1}{2} mgl\sqrt{M/(m+M)} = 5{,}66 \text{ J}. \quad (6)$$

Altfel, cu ajutorul derivatelor :

$$L = \text{const.}[p + (1 + m/M)/p] = f(p), \text{ unde } p = \operatorname{tg}\alpha. \quad (7)$$

Condiţia de extremum este anularea derivatei :

$$f'(p) = 0 = \text{const.}[1 - (1 + m/M)/p^2] = 0,$$

de unde $$p = \operatorname{tg}\alpha = \sqrt{1 + m/M}. \quad (8)$$

1.3.22. $v = \sqrt{gl/2} = 10$ m/s.

1.3.23. $F = 2E_c/R = 40$ N, $P \equiv 0$, $L \equiv 0$.

1.3.24. $N = 3mg \sin\theta$. Dacă corpul pleacă din repaus de la unghiul α, atunci $N = mg\,(3 \sin\theta - 2 \sin\alpha)$, $\theta \in [\alpha, \pi - \alpha]$.

1.3.25. $h = \frac{1}{3}(2H + R) = \frac{5}{3}R$.

1.3.26. $Q = mg(h - 5R/2) = 4{,}9$ J.

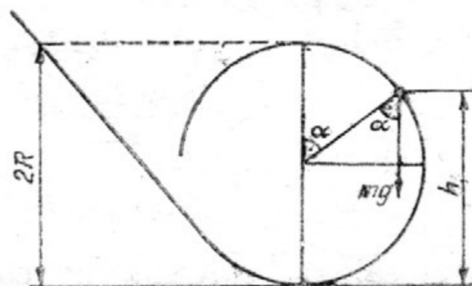


Fig. 1.3.25R

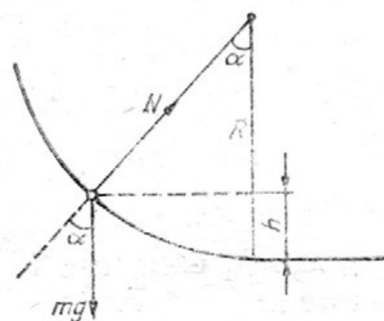


Fig. 1.3.27R

1.3.27. $h = \frac{R}{3}(2\mu l/R - f + 1) = 2{,}7$ m.

1.3.28. $T = mg\,(3\cos\theta - 2\cos\alpha)$, $T_{\max} = mg(3 - 2\cos\alpha)$, $T_{\min} = mg\cos\alpha$.

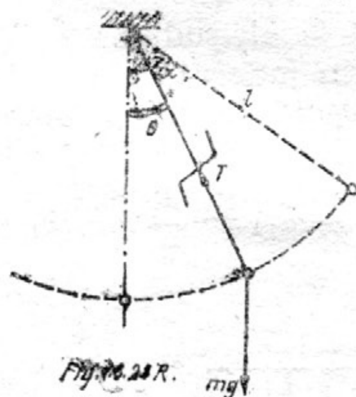


Fig. 1.3.28R.

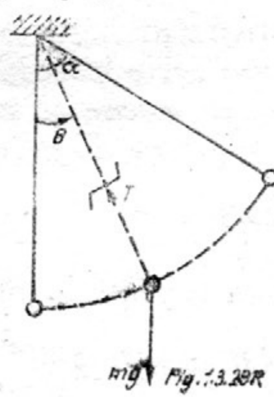


Fig. 1.3.29R

1.3.29. $\cos\theta = \frac{1}{3}(1 + 2\cos\alpha) = \frac{1}{2}$, $\theta = 60°$.

1.3.30. $T_m = mg\,[1 - v_m^2/(2gl)] = 0{,}44$ N.

1.3.31. $N = mg(3\cos\theta - 2\cos\alpha)$, $N_{max} = mg(3 - 2\cos\alpha) = 1{,}92\ mg$, $\alpha = 1$ rad.

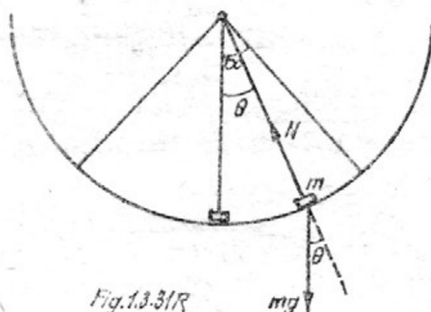


Fig.1.3.31R

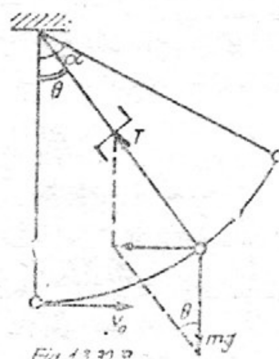


Fig.1.3.30.R

1.3.32. $\cos\alpha = \frac{1}{2}(3\cos\theta - 1/\cos\theta) = 0{,}73$, $\alpha = 43°$.

1.3.33. $T = 6mg$.

1.3.34. a) fir : $v_0 = \sqrt{5gl}$, $T_{max} = 6mg$; b) tijă : $v_0 = \sqrt{4gl}$, $T_{max} = 5\,mg$, $T = 0$: $h = 5l/3$, $\sin\theta = 2/3$.

1.3.35. $v = 2\sqrt{gl}\left[\sin\frac{\alpha}{2} - \pi/\left(8\sin\frac{\alpha}{2}\right)\right] = -\ 1{,}6$ m/s, în jos.

(*) 1.3.36. Să arătăm întîi că energia totală a unui satelit în cîmpul gravitaţional al planetei este egală cu jumătate din energia sa potenţială. Din legea mişcării :

$$\gamma\frac{mM}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \tag{1}$$

rezultă $\frac{1}{2}mv^2 = E_c = \frac{1}{2}\gamma\frac{mM}{r} = -\frac{1}{2}E_p$, deci $E =$

$$= E_c + E_p = \frac{1}{2}E_p. \tag{2}$$

Deoarece $\Delta h = h_2 - h_1$ este mic îl putem calcula aproximativ ca *diferenţiala* dh şi anume :

$$\mathrm{d}E = \frac{1}{2}\mathrm{d}E_p = \frac{1}{2}\left(\gamma mM\frac{\mathrm{d}r}{r^2}\right) = \frac{1}{2}m\gamma\frac{M}{(R+h)^2}\mathrm{d}h, \tag{3}$$

deci
$$\Delta E = \frac{1}{2}mg_h\Delta h,\ \Delta E_c = mg_h\Delta h, \tag{4}$$

unde g_h este acceleraţia gravitaţională la altitudinea h. Variaţia ΔE_c la altitudinea h se putea scrie imediat prin judecată elementară. Pe de altă parte, *variaţia energiei mecanice este egală cu lucrul mecanic al forţelor neconservative*, deci căldura degajată :

$$Q = -L_{necons.} = -\frac{1}{2}mg_h(h_2 - h_1) = \frac{1}{2}mg_h(h_1 - h_2). \tag{5}$$

Deoarece $h \ll R$ putem aproxima pe g_h :

$$g_h = \gamma M : (R+h)^2 = \gamma\frac{M}{R^2}\frac{1}{(1+h/R)^2} \cong g_0(1 - 2h/R), \tag{6}$$

astfel încît

$$Q = \frac{1}{2} mg_0(1 - 2h/R)(h_1 - h_2) = 9{,}5 \text{ MJ} = 2{,}64 \text{ kWh}. \qquad (7)$$

1.3.37. $h = (v_0^2 + gl)/(3g) = 1{,}56$ m ; $v = \sqrt{(v_0^2 - 2gl)/3} = 2{,}34$ m/s.

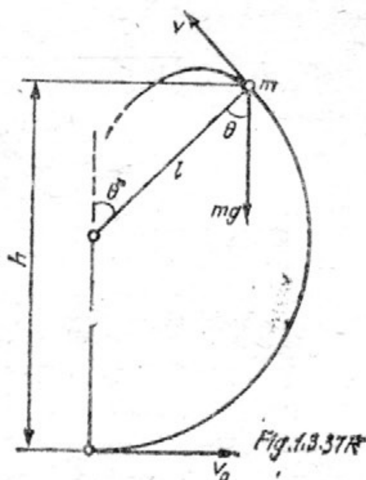


Fig.1.3.37R

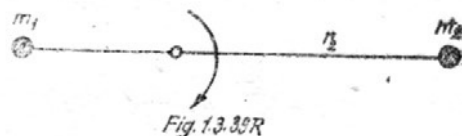


Fig.1.3.39R

1.3.38. $T = mg[v_0^2/(gl) + 3 - 2\cos\alpha] = 4{,}0$ N.

1.3.39. $v_2 = r_2\sqrt{2g(m_2r_2 - m_1r_1) : (m_1r_1^2 + m_2r_2^2)} = 2{,}7$ m/s.

1.3.40. $\omega = \sqrt{2g(m_1l_1 - m_2l_2) : (m_1l_1^2 + m_2l_2^2)} = 2{,}8$ rad/s

1.3.41. $\omega = 2\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{g(m_1l_1 + m_2l_2) : (m_1l_1^2 + m_2l_2^2)} = 4{,}04$ rad/s.

1.3.42. $\omega = 2\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{g(R - r) : (R^2 + r^2)} = 4{,}45$ rad/s.

1.3.43. $N_x = mg\cos\alpha(3\sin\alpha - 2)$, dacă $\sin\alpha > 2/3$, altfel $N_x = 0$.

1.3.44. $T_{max} = mg + v\sqrt{km} = 29{,}8$ N.

1.3.45. $\cos\alpha = \frac{1}{2}\left(3 - \frac{F}{mg}\right)\left(1 + \frac{F}{kl}\right) = 0{,}623, \quad \alpha = 51°26'$.

1.3.46. $T_r = mg \cdot 3\cos\theta_r$, $\theta_r = 60°$; $-(h - l\cos\theta_r) = x\,\mathrm{tg}(-\theta_r) - \frac{gx^2}{2 \cdot 2gl\cos\theta_r\cos\theta_r}$, $x = 3 - \sqrt{3}$, $d = l\sin\theta_r - x = 2\sqrt{3} - 3 = 0{,}46$ m.

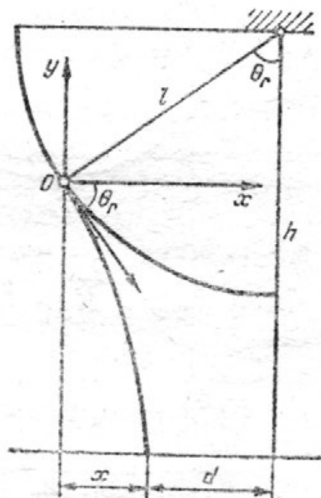


Fig.1.3.46R

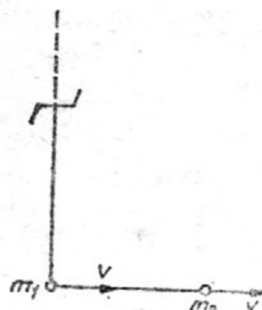


Fig.1.3.48R

1.3.47. $T = m_2g + m_2g \cdot 2l_2(m_1l_1 + m_3l_2)(1 - \cos\alpha) : (m_1l_1^2 + m_2l_2^2) = 3{,}92 \text{ N} + 4{,}99 \text{ N}$.

1.3.48. $v_0 = \sqrt{2gl(1 + m_2/m_1)} = 2{,}4$ m/s.

1.3.49. $T_1 = m_1 g\ (m_2 - 3m_1) : (m_1 + m_2) = -0{,}59$ N ; $T_2 = m_2 g(3m_2 - m_1) : (m_1 + m_2) = 12{,}4$ N.

1.3.50. $\cos\theta = \cos\alpha - 2v_0^2 \sin^4 \frac{\alpha}{2} : (gl\cos\alpha)$, a) $\cos\theta = 0{,}994$, $\theta = 6°10'$, b) $\cos\theta = 0{,}760$, $\theta = 40°32'$.

1.3.51. $\frac{M}{m} \sin^3\alpha + 3\sin\alpha - 2 = 0$, $\alpha = 30°$, $u = \sqrt{gl(2 - 3\sin\alpha)m/M} = 1{,}1$ m/s.

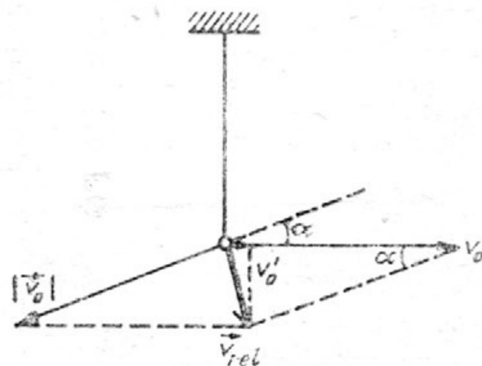


Fig. 1.3.50 R

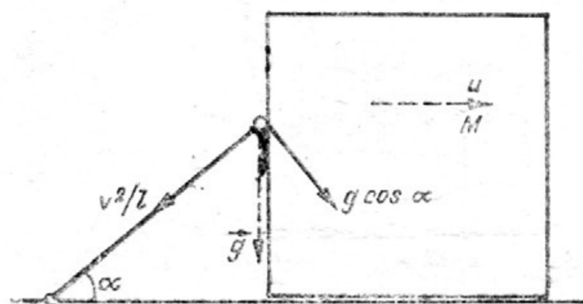


Fig. 1.3.51 R

1.3.52. a) $\cos\alpha_0 = \frac{2}{3}$, $\alpha = 48°11'$, $v_0 = \sqrt{2gR/3}$, $x_0 = \sqrt{5}\ R/3 = 0{,}75\ R$, $y_0 = 2R/3 = 0{,}67\ R < x_0$; b) $\cos\beta = 2\sqrt{3}/9 = 0{,}385$, $\beta = 67°22'$; c) $h = 23R/27 = 0{,}85\ R$.

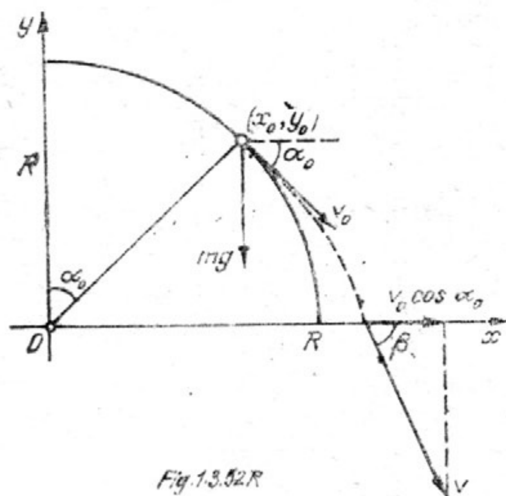


Fig. 1.3.52 R

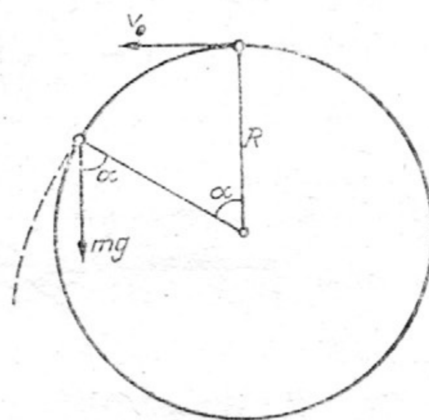


Fig. 1.3.53 R

1.3.53. $\cos\alpha = (v_0^2 + 2Rg)/(3Rg)$, dacă $v_0 > \sqrt{Rg}$, corpul cade liber şi revine la $h = 2R$. Altfel :

$$h = 50\ R/27 + 5v_0^2/(18g) - v_0^4/(9\ Rg^2) - v_0^6/(54\ R^2g^3).$$

1.3.54. Corpul m_1 va oscila : $a = g\sqrt{(\mu m_2/m_1 + 2)^2/9 - 1} = \frac{4}{3} g$. Fără oscilaţiile lui m_1 ar fi : $a = g\sqrt{(\mu m_2/m_1)^2 - 1} = 2\sqrt{2}\, g$.

1.3.55. $\cos\alpha = \frac{1}{2}[3 - m_2 l_2/(m_1 l_1)] = \frac{1}{2}$, $\alpha = 60°$.

1.3.56. $x = 5(\sqrt{5} + 4\sqrt{2})\,R/27 = 1{,}46\ R.$

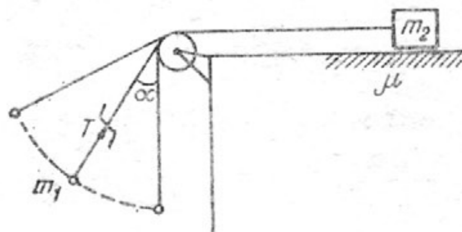


Fig. 1.3.54R

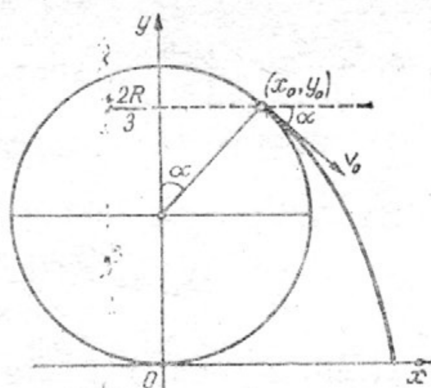


Fig. 1.3.56R

1.3.57. $\cos\beta = 2\sqrt{3}/9 = 0{,}385,\ \beta = 67°20'.$

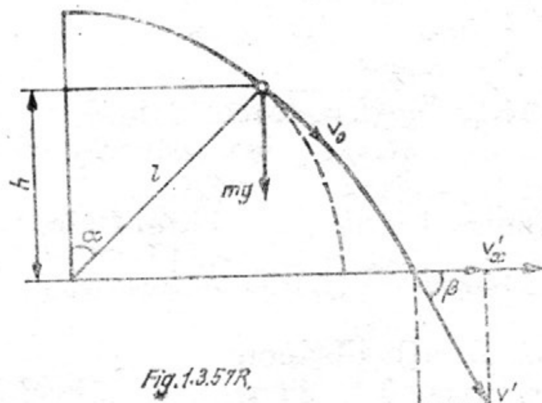


Fig. 1.3.57R

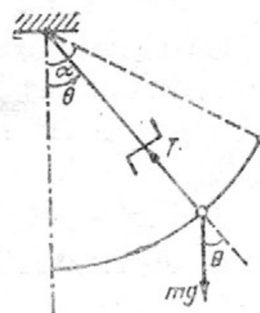


Fig. 1.3.68 a R

1.3.58. $W = \frac{1}{2}\,k_2 s^2(1 + k_2/k_1) = 3{,}00$ J.

1.3.59. $W = F^2 m_2^2 : [2k\ (m_1 + m_2)^2] = 0{,}10$ J.

1.3.60. $v_0 = \sqrt{2E_2(k_1 + k_2)/(mk_1)} = 6{,}0$ m/s.

1.3.61. $v = \mu g\sqrt{15\ m/k} = 1{,}0$ m/s.

1.3.62. $h = Mg\ [1 + M/(2m)]/(2k) = 2{,}94$ m.

1.3.63. $F_{max}/(mg) = 2(1 + H/h) = 26.$

1.3.64. $F = mg + v\sqrt{km} = 320$ kN.

1.3.65. $S = F^2/\,(2k) + Fs\cos\alpha = 21$ J.

1.3.66. $Q = F_f[l_0 + F_f/(2k)] = 11$ J.

** **1.3.67.** $mg\sin\alpha - bx\cdot mg\cos\alpha = ma = m\dfrac{dv}{dt}.$ **(1)**

Pentru a separa variabilele înmulţim ecuaţia cu $dx = vdt$:

$$mg(\sin\alpha - bx\cos\alpha)\,dx = m\,\frac{dv}{dt}\,dx = mvdv.$$

Integrăm:

$$\int mg(\sin\alpha - bx\cos\alpha)\,dx = mgx\sin\alpha - \frac{1}{2}\,mgbx^2\cos\alpha =$$

$$= \int mvdv = \frac{1}{2}\,mv^2 + C,$$

unde constanta de integrare se determină din condiţia iniţială: la $t = 0$ avem $v = 0$ şi $x = 0$; rezultă $C = 0$,

$$mgx\sin\alpha - \frac{1}{2}\,mg\,bx^2\cos\alpha = \frac{1}{2}\,mv^2. \quad (2)$$

Dealtfel, aceasta nu este altceva decît teorema variației energiei cinetice:

$$L = \int_0^x mg(\sin\alpha - bx\cos\alpha)\,\mathrm{d}x = mg\left(x\sin\alpha - \frac{1}{2}bx^2\cos\alpha\right) =$$

$$= \Delta E_c = \frac{1}{2}mv^2. \qquad (3)$$

Punem condiția de oprire $v = 0$ și obținem:

$$x_m = \frac{2\sin\alpha}{b\cos\alpha} = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{b}. \qquad (4)$$

Condiția de extremum pentru v este anularea derivatei: $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0$, ceeace în virtutea ecuației fundamentale (1) dă imediat:

$$x = \frac{\sin\alpha}{b\cos\alpha} = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha}{b}. \qquad (5)$$

Introducînd această valoare în (3) găsim

$$v_{max} = \sin\alpha\sqrt{g/(b\cos\alpha)}. \qquad (6)$$

** **1.3.68.** a) Pe direcția radială, centripet, lex secunda dă:

$$T - mg\cos\theta = ma_c = mv^2/l. \qquad (1)$$

Pe de altă parte, conservarea energiei cinetice și potențiale dă:

$$mg(l - l\cos\alpha) = mg(l - l\cos\theta) + \frac{1}{2}mv^2. \qquad (2)$$

Eliminînd pe mv^2 din cele două ecuații obținem

$$T = mg(3\cos\theta - 2\cos\alpha). \qquad (3)$$

Tensiunea este maximă cînd $\cos\theta = 1$, $\theta = 0°$, cînd firul trece prin poziția verticală: $T_{max} = mg(3 - 2\cos\alpha)$. (4)

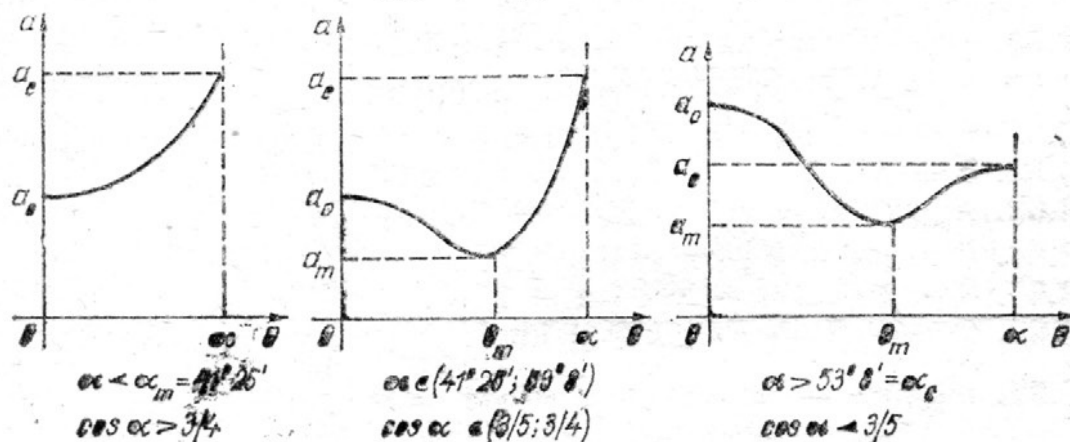


Fig. 1.3.68 b R

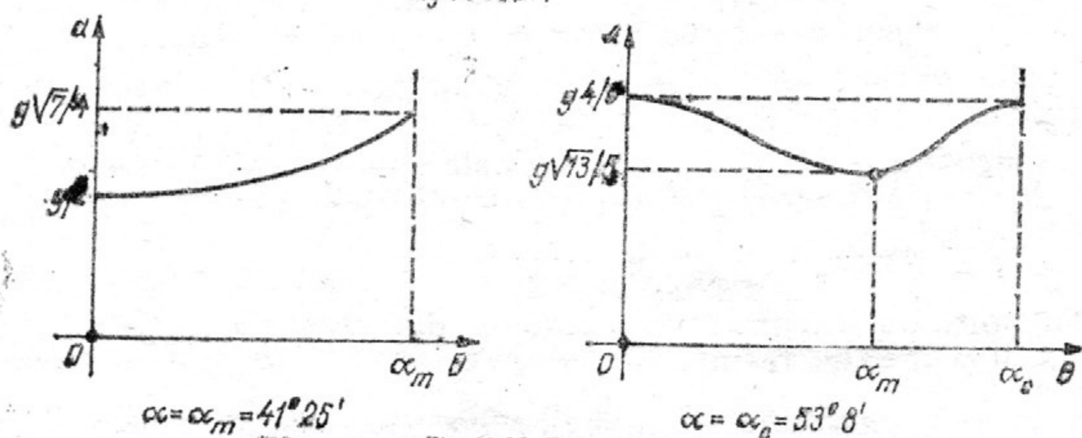


Fig. 1.3.68 c R

b) Pe direcţia tangenţială lex secunda dă :

$$-mg\sin\theta = ma_t = m\frac{dv}{dt} = m\frac{d(\omega l)}{dt} = ml\frac{d\omega}{dt} = ml\,\varepsilon. \quad (5)$$

Pentru a putea integra înmulţim ecuaţia cu $d\theta = \omega\, dt$:

$$-mg\sin\theta\, d\theta = ml\frac{d\omega}{dt}d\theta = ml\,\omega\, d\omega, \quad (d\theta/dt = \omega).$$

Integrăm :

$$-mg\int\sin\theta d\theta = mg\cos\theta = ml\int\omega d\omega = \frac{1}{2}m\,l\omega^2 + C,$$

unde constanta de integrare se determină din condiţia iniţială :

la $t = 0$ avem $\theta = \alpha,\ v = 0 = \omega l,\ \omega = 0 : mg\cos\alpha = C,$

$$mg(\cos\theta - \cos\alpha) = \frac{1}{2}\,m\,l\omega^2. \quad (6)$$

Aceasta este de fapt legea conservării energiei scrisă sub forma ,,unghiulară" :

$$mgh = mg(l\cos\theta - l\cos\alpha) = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}ml^2\omega^2,$$

$I = ml^2$ este momentul de inerţie al bilei faţă de axa de oscilaţie.

$$\omega^2 = \frac{2g}{l}(\cos\theta - \cos\alpha) \quad (7)$$

şi din (5)

$$\varepsilon = -\frac{g}{l}\sin\theta. \quad (8)$$

Acceleraţia

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2} = \sqrt{(\omega^2 l)^2 + (\varepsilon l)^2} = l\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2} =$$
$$= g\sqrt{4(\cos\theta - \cos\alpha)^2 + \sin^2\theta}. \quad (9)$$

c) Valorile extreme corespund anulării derivatei :

$$\frac{da}{d\theta} = \frac{1}{a}g^2\sin\theta(4\cos\alpha - 3\cos\theta) = 0, \quad (10)$$

de unde rezultă rădăcinile derivatei :

$\cos\theta_m = \frac{4}{3}\cos\alpha$ posibil dacă $\cos\alpha < \frac{3}{4},\ \alpha > 41°25'$,

$$a_{min} = g\sqrt{1 - \frac{4}{3}\cos^2\alpha}; \quad (11)$$

$$\sin\theta = 0,\ a_0 = 2g\,(1 - \cos\alpha). \quad (12)$$

Cînd trecem prin rădăcina (11) semnul derivatei trece de la minus la plus, deci avem un *minim* (*dacă* $\cos\alpha < \frac{3}{4},\ \alpha > 41°25'$). Cînd trecem prin rădăcina (12) semnul derivatei trece de la $-$la $+$ dacă $\cos\alpha > 3/4$, $\alpha < 41°25'$, deci avem un minim în acest caz, altfel avem un maxim.

La extremităţi :

$$a_e = g\sin\alpha,\ (\theta = \pm\alpha). \quad (13)$$

Raportul acceleraţiilor :

$$\frac{a_0}{a_e} = \frac{2g(1 - \cos\alpha)}{g\sin\alpha} = 2\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}. \quad (14)$$

Ele se egalează pentru:

$$a_0 = a_e \text{ pentru } \alpha_c = 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{2} = 53°8',$$

$$\text{pentru } \alpha \lesseqgtr \alpha_c \text{ avem } a_0 \lesseqgtr a_e. \quad (15)$$

Cazuri particulare:

$$\alpha = \alpha_m = 41°25' \left(\cos \alpha_m = \frac{3}{4}\right): a_0 = g/2 = 0{,}50\ g,$$

$$a_e = g\sqrt{7}/4 = 0{,}66\ g; \quad (16)$$

$$\alpha = \alpha_c = 53°8' \left(\cos\alpha_c = \frac{3}{5}\right): a_0 = a_e = 4g/5 = 0{,}80\ g$$

$$a_m = g\sqrt{13}/5 = 0{,}72g. \quad (17)$$

Comparați cu rezolvarea problemei **1.2.213.**

** **1.3.69.** Imediat ce se lasă lanțul liber punctele sale au $v \to 0$, **deci au** numai accelerație tangențială a_t. Considerăm întîi cazul $l < \pi R/2$.

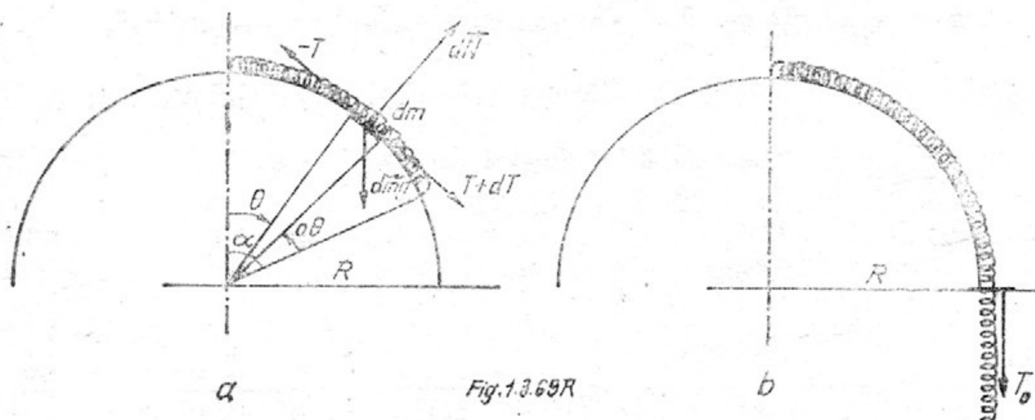


Fig.1.3.69R

Luăm un **element de** masă dm care subîntinde unghiul **elementar** d**θ.** **Notăm** cu λ **densitatea** liniară a lanțului: $\lambda = m/l$. Asupra **elementului** dm acționează forțele din figură (T — tensiunea din lanț):

$$\mathrm{d}m\,\vec{g} + \mathrm{d}\vec{N} + \mathrm{d}\vec{T} = \mathrm{d}m\,\vec{a}_t. \quad (1)$$

Proiectăm această ecuație pe direcția tangențială:

$$\mathrm{d}m\, g\sin\theta + \mathrm{d}T = \mathrm{d}m a_t,\ \mathrm{d}m = \lambda \mathrm{d}s = \lambda R \mathrm{d}\theta \quad (2)$$

și integrăm (sumăm) pe tot lanțul, observînd că $a_t = \text{const}$ (același **pentru** toate elementele lanțului):

$$\int \lambda R \mathrm{d}\theta\, g\sin\theta + \int \mathrm{d}T = \int \mathrm{d}m\, a_t,\ \lambda R g \int_0^\alpha \sin\theta\, \mathrm{d}\theta + T\Big|_{\theta=0}^{\theta=\alpha} = a_t \int \mathrm{d}m = m a_t,$$

$$\lambda R g(1 - \cos\alpha) = m a_t, \text{ dar } \alpha = l/R, \quad (3)$$

(tensiunea în secțiunile de la capetele lanțului este zero),

$$a_t = g\frac{R}{l}\left(1 - \cos\frac{l}{R}\right);\ l \leqslant \pi R/2. \quad (4)$$

La limită pentru $l = \pi R/2$:

$$a_t = 2g/\pi = 0{,}64\ g. \quad (5)$$

(observăm că a_t este media lui $g \sin\theta$ pe un sfert de cerc).

Cazul $l > \pi R/2$. Integrăm ecuația (3) între limitele $(0, \pi/2)$:

$$\lambda Rg \int_{0}^{\pi/2} \sin\theta \, d\theta + T \Big|_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} = \lambda R \frac{\pi}{2} a_t \text{ sau } \lambda Rg + T_0 = \lambda R \frac{\pi}{2} a_t, \qquad (6)$$

unde am notat cu T_0 tensiunea în secțiunea $\theta = \pi/2$. Pentru a o afla scriem lex secunda pentru porțiunea de lanț atîrnată:

$$\lambda(l - \pi R/2)\, g - T_0 = \lambda(l - \pi R/2) a_t, \quad T_0 = \lambda(l - \pi R/2)(g - a_t), \qquad (7)$$

astfel încît (6) dă:

$$a_t = g\left[1 - \frac{R}{l}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)\right]. \qquad (8)$$

La limită cînd $l = \pi R/2$ regăsim (5), iar cînd $l \gg \pi R/2$, $a_t \to g$.

* **1.3.70.** $E_c = \frac{1}{2} mv^2 = As^2$, $v = s \cdot \sqrt{2A/m}$, (1)

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \sqrt{\frac{2A}{m}} \cdot \frac{dv}{dt} = \sqrt{\frac{2A}{m}}\, v = \frac{2A}{m} \cdot s, \qquad (2)$$

$$F = ma = m\sqrt{a_t^2 + a_n^2} = m\sqrt{(2As/m)^2 + (v^2/R)^2} =$$

$$= 2As\sqrt{1 + s^2/R^2}. \qquad (3)$$

** **1.3.71.** Lex secunda se scrie:

$$F - mg = ma \text{ sau } mg(1 - 2Ay) = m\frac{dv}{dt}. \qquad (1)$$

Pentru a putea integra înmulțim ecuația cu $dy = v dt$:

$$mg(1 - 2Ay)\, dy = m\frac{dv}{dt}\, dy = mv dv \qquad (2)$$

și integrăm:

$$\int mg(1 - 2Ay)\, dy = mg(y - Ay^2) = \int mv dv = \frac{1}{2} mv^2 + C,$$

unde constanta de integrare se determină din condițiile inițiale: la $t = 0$ avem $v = 0$ și $y = 0$, rezultă $C = 0$,

$$mg(y - Ay^2) = \frac{1}{2} mv^2. \qquad (3)$$

Aceasta nu este altceva decît teorema variației energiei cinetice:

$$L = \Delta E_c, \; L = \int_0^y mg(1 - 2Ay)\, dy = mg(y - Ay^2) = \Delta E_c = \frac{1}{2} mv^2.$$

Punem condiția de oprire la înălțimea maximă $v = 0$:

$$mg(y - Ay^2) = 0, \; y_{max} = 1/A. \qquad (4)$$

Lucrul mecanic cerut:

$$L = \int_0^y F dy = \int_0^y 2mg(1 - Ay)\, dy = 2mg\left(y - \frac{1}{2} Ay^2\right). \qquad (5)$$

Punînd aici $y = y_{max} = 1/A$, găsim :

$$L = mg/A. \tag{6}$$

* **1.3.72.** a) $F = -\frac{dU}{dr} = \frac{2a}{r^3} - \frac{b}{r^2}$, (1)

$$F = 0 \text{ pentru } r_0 = 2a/b, \tag{2}$$

$$U_{min} = U(r_0) = -b^2/(4a) < 0. \tag{3}$$

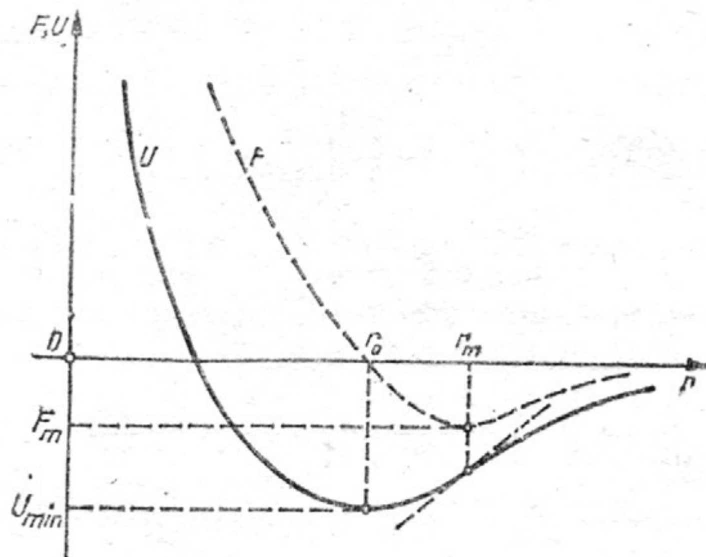


Fig. 1.3.72R

b) Condiția de extremum pentru F este anularea derivatei :

$$\frac{dF}{dr} = -6a/r^4 + 2b/r^3 = 0, \; r_m = 3a/b, \tag{4}$$

$$F_m = -b^3/(27a^2), \text{ (atractivă)}. \tag{5}$$

c) Vd. figura, în punctul r_m graficul lui U are un punct de inflexiune.

* **1.3.73.** a) $a_n = At = v^2/R, \; v = \sqrt{AR} \cdot \sqrt{t}$, (1)

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \sqrt{AR}\frac{1}{2\sqrt{t}}. \tag{2}$$

$$P = \vec{F}\,\vec{v} = F_t v = m a_t\, v = m\sqrt{AR}\,\frac{1}{2\sqrt{t}} \cdot \sqrt{AR}\sqrt{t} =$$

$$= \frac{1}{2}\, mAR = \text{const}. \tag{3}$$

b) $P = \vec{F}\,\vec{v} = F_t v = m a_t v = m\,\frac{dv}{dt}\, v = P_0$. (4)

Separăm variabilele și integrăm :

$$\int mv\mathrm{d}v = \frac{1}{2}\, mv^2 = \int P_0 \mathrm{d}t = P_0 t + C,$$

unde constanta de integrare se determină din condiția inițială : la $t = 0$ avem $v = 0$:

$$\frac{1}{2}\, mv^2 = P_0 t, \; a_n = v^2/R = 2P_0 t/(mR). \tag{5}$$

Se putea integra și definit (limitele de integrare se corespund) :

$$\int_0^v mv\mathrm{d}v = \frac{1}{2}\, mv^2 = \int_0^t P_0 \mathrm{d}t = P_0 t.$$

Puterea (3) fiind constantă, lucrul mecanic efectuat este egal cu puterea ori timp şi conform teoremei energiei cinetice:

$$\Delta E_c = \frac{1}{2} mv^2 = P_0 t,$$

deci nu este necesar aici calculul integral.

** **1.3.74.** $-\mu_2 mg \frac{x}{l} - \mu_1 mg \frac{l-x}{l} = ma = m\frac{dv}{dt},$



Fig. 1.3.74R

$$-(\mu_2 - \mu_1)\, mg\,\frac{x}{l} - \mu_1 mg = m\frac{dv}{dt},\ x \leqslant l. \quad (1)$$

$$-(\mu_2 - \mu_1)\frac{mg}{l}(x + x_0) = m\frac{dv}{dt},\ x_0 = l\frac{\mu_1}{\mu_2 - \mu_1} \quad (2)$$

sau

$$-k(x + x_0) = m\frac{d^2(x + x_0)}{dt^2},\ k = (\mu_2 - \mu_1)\frac{mg}{l}. \quad (3)$$

Aceasta este binecunoscuta ecuaţie diferenţială a oscilatorului armonic cu soluţia cunoscută:

$$x + x_0 = A\sin(\sqrt{k/m}\cdot t + \alpha), \quad (4)$$

$$v = \dot{x} = \sqrt{k/m}\, A\cos(\sqrt{k/m}\cdot t + \alpha),\ \omega = \sqrt{k/m} = \sqrt{g(\mu_2 - \mu_1)/l}, \quad (5)$$

unde constantele de integrare A, α se determină din condiţiile iniţiale: la $t = 0$ avem $x = 0$ şi $v = v_0$:

$$x_0 = A\sin\alpha,\ v_0 = \sqrt{k/m}\,A\cos\alpha = \omega A\cos\alpha,$$

$$A = \sqrt{x_0^2 + v_0^2/\omega^2},\ \mathrm{tg}\,\alpha = \omega x_0/v_0; \quad (6)$$

rezultă

$$x = \sqrt{x_0^2 + v_0^2/\omega^2}\,\sin(\omega t + \alpha) - x_0. \quad (7)$$

Distanţa pînă la oprire se obţine cînd sinusul este 1:

$$x_m = \sqrt{x_0^2 + v_0^2/\omega^2} - x_0 = \sqrt{l^2\mu_1^2 : (\mu_2 - \mu_1)^2 + v_0^2 l : [g(\mu_2 - \mu_1)]} - l\mu_1 : (\mu_2 - \mu_1). \quad (8)$$

Acest rezultat este valabil dacă $x_m \leqslant l$, ceeace dă condiţia:

$$v_0^2 \leqslant 2lg(\mu_1 + \mu_2)/2 \text{ sau } l \geqslant v_0^2 : [g(\mu_1 + \mu_2)]. \quad (9)$$

Timpul pînă la oprire ($v = 0$) se obţine din condiţia:

$$\omega t + \alpha = \pi/2;\ t_m = \frac{1}{\omega}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) =$$

$$= \sqrt{\frac{l}{g(\mu_2 - \mu_1)}}\ \mathrm{arcctg}\ \frac{\mu_1}{v_0}\sqrt{\frac{gl}{\mu_2 - \mu_1}}. \quad (10)$$

Propunem cititorului să regăsească din (8) şi (10) prin trecere la limită $\mu_1 \to \mu_2$ rezultatele cunoscute:

$$x_m = v_0^2/(2\mu g),\ t_m = v_0/(\mu g).$$

Rezultatele de mai sus se pot obține direct din ecuația fundamentală (3) prin înmulțire cu $dx = vdt$ și integrare:

$$-k(x + x_0)\,dx = m\frac{dv}{dt}\,dx = mv\,dv,$$

$$-k\int (x + x_0)\,dx = -\frac{k}{2}\cdot(x + x_0)^2 = \int mv\,dv = \frac{1}{2}mv^2 + C, \quad (11)$$

unde constanta de integrare se obține din condițiile inițiale: la $t = 0$ avem $x = 0$ și $v = v_0$:

$$-\frac{1}{2}kx_0^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 + C, \quad -\frac{1}{2}\cdot k(x + x_0)^2 + \frac{1}{2}kx_0^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2. \quad (12)$$

Aceasta nu este altceva decît teorema variației energiei cinetice:

$$L = \int F\,dx = \Delta E_c, \quad L = \int_0^x - k(x + x_0)\,dx =$$

$$= -\frac{1}{2}k(x + x_0)^2 + \frac{1}{2}kx_0^2 = \Delta E_c = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2.$$

Punînd condiția de oprire $v = 0$, obținem (8):

$$x_m = \sqrt{x_0^2 + mv_0^2/k} - v_0.$$

Scoțînd pe $x + x_0$ din (12) și introducînd în (3), găsim

$$-k\sqrt{x_0^2 + (v_0^2 - v^2)/\omega^2} = m\frac{dv}{dt}, \quad \omega^2 = k/m.$$

Separăm variabilele și integrăm:

$$\omega dt = -\frac{dv}{\sqrt{\omega^2 x_0^2 + v_0^2 - v^2}},$$

$$\int \omega dt = \omega t = \int \frac{-dv}{\sqrt{\omega^2 x_0^2 + v_0^2 - v^2}} = \arccos\frac{v}{\sqrt{\omega^2 x_0^2 + v_0^2}} + C,$$

unde constanta de integrare se determină din condiția inițială: la $t = 0$ avem $v = v_0$:

$$\omega t = \arccos\frac{v}{\sqrt{\omega^2 x_0^2 + v_0^2}} - \arccos\frac{v_0}{\sqrt{\omega^2 x_0^2 + v_0^2}},$$

$$v = \sqrt{v_0^2 + \omega^2 x_0^2}\cdot\cos\left(\omega t + \arccos\frac{v_0}{\sqrt{\omega^2 x_0^2 + v_0^2}}\right), \quad (13)$$

ceea ce coincide cu (5), dacă ne amintim că

$$\arccos x = \operatorname{arctg}\sqrt{1/x^2 - 1}, \text{ pentru } x > 0. \quad (14)$$

b) $Q^* = -F_f v = k(x + x_0)v = kA\sin(\omega t + \alpha)\cdot\omega A\cos(\omega t + \alpha) =$

$$= \frac{1}{2}kA^2\omega\sin(2\omega t + 2\alpha), \quad (15)$$

$$Q^*_{\max} = \frac{1}{2}\cdot kA^2\omega = \frac{1}{2}mv_0^2\sqrt{g(\mu_2 - \mu_1)/l}\left[1 + \frac{gl\mu_1^2}{v_0^2(\mu_2 - \mu_1)}\right] \quad (16)$$

(în acest caz sinusul și cosinusul sînt $1/\sqrt{2}$ și $x + x_0 = A/\sqrt{2}$, $v = \omega A/\sqrt{2}$). Rezultatul se poate obține și altfel, de exemplu scoatem v din (12):

$$Q^* = k(x + x_0)\sqrt{v_0^2 + \omega^2 x_0^2 - \omega^2(x + x_0)^2} = \\ = k\omega(x + x_0)\sqrt{A^2 - (x + x_0)^2}. \qquad (17)$$

Condiția de extremum este anularea derivatei:

$$\frac{dQ^*}{dx} = k\omega \frac{A^2 - 2(x + x_0)^2}{\sqrt{A^2 - (x + x_0)^2}} = 0 \rightarrow x + x_0 = A/\sqrt{2}. \qquad (18)$$

În sfîrșit se putea exprima Q^* prin viteză (scoatem pe $x + x_0$ din (12)):

$$Q^* = k(x + x_0)\, v = k\sqrt{x_0^2 + v_0^2/\omega^2 - v^2/\omega^2} \cdot v = k\sqrt{A^2 - v^2/\omega^2} \cdot v,$$

$$\frac{dQ^*}{dv} = k \frac{A^2 - 2v^2/\omega^2}{\sqrt{A^2 - v^2/\omega^2}} = 0 \rightarrow v = \omega A/\sqrt{2}.$$

c) Să considerăm acum cazul

$$v_0^2 > 2lg(\mu_1 + \mu_2)/2 \text{ sau } l < v_0^2 : [g(\mu_1 + \mu_2)]. \qquad (19)$$

În acest caz sania intră complet pe asfalt și forța de frecare devine constantă $F_f = -\mu_2 mg$. Viteza saniei în momentul cînd intră complet pe asfalt se obține din (12) punînd condiția $x = l$:

$$v'^2 = v_0^2 + \omega^2 x_0^2 - \omega^2(l + x_0) = \omega^2[A^2 - (l + x_0)^2], \qquad (20)$$

de unde distanța parcursă pînă la oprire:

$$s = l + v'^2/(2\mu_2 g). \qquad (21)$$

Timpul în momentul intrării complete a saniei pe asfalt se obține din (7) punînd condiția $x = l$:

$$\sin(\omega t' + \alpha) = (l + x_0)/A,\ t' = \frac{1}{\omega}\left(\arcsin \frac{l + x_0}{A} - \alpha\right), \qquad (22)$$

astfel încît timpul total pînă la oprire:

$$\tau = t' + v'/(\mu_2 g). \qquad (23)$$

** **1.3.75.** a) $F = \frac{1}{2} kS\rho(v_0 - v)^2 = ma = m\frac{dv}{dt}$. (1)

Separăm variabilele și integrăm:

$$dt = \frac{m dv}{\frac{1}{2} kS\rho(v_0 - v)^2},\ \int dt = t = \frac{2m}{kS\rho}\int \frac{dv}{(v_0 - v)^2} = \\ = \frac{2m}{kS\rho}\left(\frac{1}{v_0 - v} + C\right),$$

unde constanta de integrare se determină din condiția inițială: la $t = 0$ avem $v = 0$: $0 = 1/v_0 + C$, $C = -1/v_0$,

$$t = \frac{2m}{kS\rho}\left(\frac{1}{v_0 - v} - \frac{1}{v_0}\right),\ v = v_0 - \frac{1}{1/v_0 + kS\rho t/(2m)}. \qquad (2)$$

Se poate integra și definit (limitele de integrare se corespund):

$$\int_0^t dt = t = \frac{2m}{kS\rho}\int_0^v \frac{dv}{(v_0 - v)^2} = \frac{2m}{kS}\left(\frac{1}{v_0 - v} - \frac{1}{v_0}\right).$$

Continuăm integrarea:

$$dx = v\,dt, \quad \int dx = x = \int v\,dt = \int\left(v_0 - \frac{1}{1/v_0 + kS\rho t/(2m)}\right)dt =$$

$$= v_0 t - \frac{2m}{kS\rho}\left[\ln\left(\frac{1}{v_0} + \frac{kS}{2m}t\right) + C'\right],$$

unde constanta de integrare se determină din condiția inițială:

$$\text{la } t = 0 \text{ avem } x = 0: \ 0 = \ln\frac{1}{v_0} + C', \ C' = -\ln\frac{1}{v_0},$$

$$x = v_0 t - \frac{2m}{kS\rho}\ln\left(1 + \frac{kS\rho}{2m}v_0 t\right). \qquad (3)$$

Se poate integra și definit (limitele de integrare se corespund):

$$\int_0^x dx = x = \int_0^t\left(v_0 - \frac{1}{1/v_0 + kS\rho t/(2m)}\right)dt = v_0 t -$$

$$- \frac{2m}{kS\rho}\ln\frac{1/v_0 + kS\rho t/(2m)}{1/v_0}.$$

b) Teoretic barca atinge viteza vîntului v_0 cînd $t \to \infty$ (atunci și $x \to \infty$). Timpul cerut se obține punînd $v = fv_0$ în legea vitezei (2):

$$\tau = \frac{2m}{kS\rho v_0}\frac{f}{1-f}. \qquad (4)$$

Luînd $m = 130$ kg, $k = 1{,}0$, $S = 10$ m^2, $\rho = 1{,}3$ kg/m^3, $v_0 = 10$ m/s, $f = 0{,}99 = 99\%$, găsim $\tau \cong 30$ min.
Dacă înlocuim pe t (2) în x(3) găsim $x = x(v)$:

$$x = \frac{2m}{kS\rho}\left(\frac{v}{v_0 - v} - \ln\frac{v_0}{v_0 - v}\right). \qquad (5)$$

Distanța parcursă în timpul τ (4) se obține introducînd $v = fv_0$ în (5) sau τ(4) în (3):

$$s = \frac{2m}{kS\rho}\cdot\left(\frac{f}{1-f} - \ln\frac{1}{1-f}\right). \qquad (6)$$

Ca evaluare: $s \cong 2{,}0$ km.
Se poate obține $s = s(v)$ direct prin integrare, înmulțind ambii membri ai ecuației fundamentale cu $v = \frac{dx}{dt}$:

$$v\,dt = dx = \frac{mv\,dv}{\frac{1}{2}kS\rho(v_0 - v)^2} = \frac{2m}{kS\rho}\frac{v - v_0 + v_0}{(v_0 - v)^2}dv,$$

$$\int dx = x = \frac{2m}{kS\rho}\left[\int\frac{dv}{v - v_0} + \int\frac{v_0\,dv}{(v_0 - v)^2}\right] =$$

$$= \frac{2m}{kS\rho}\left[\ln|v - v_0| + v_0\frac{1}{v_0 - v} + C''\right],$$

unde constanta de integrare se determină din condiția inițială: la $t = 0$

avem $v = 0$ și $x = 0: 0 = \ln v_0 + 1 + C''$, $C'' = -\ln v_0 - 1$,

$$x = \frac{2m}{kS\rho}\left[\ln\frac{v_0 - v}{v_0} + \frac{v}{v_0 - v}\right]$$

Se poate integra și definit (limitele de integrare se corespund):

$$\int_0^x dx = x = \frac{2m}{kS\rho}\left[\int_0^v \frac{dv}{v - v_0} + \int_0^v \frac{v_0 dv}{(v_0 - v)^2}\right] =$$

$$= \frac{2m}{kS\rho}\left[\ln\left|\frac{v - v_0}{-v_0}\right| + v_0\left(\frac{1}{v_0 - v} - \frac{1}{v_0}\right)\right].$$

c) Puterea dezvoltată de forța vîntului:

$$P = Fv = \frac{1}{2}kS\rho(v_0 - v)^2 \cdot v. \qquad (7)$$

Dacă scriem

$$P \sim (v_0 - v)(v_0 - v)\cdot 2v,$$

atunci avem un produs de 3 factori (numai doi diferiți) a căror sumă este *constantă*, de aceea produsul va fi maxim cînd factorii sînt egali între ei:

$$v_0 - v = v_0 - v = 2v,\ v = v_0/3. \qquad (8)$$

Acest rezultat se poate obține, desigur, punînd condiția de anulare a derivatei:

$$P'(v) \sim -2(v_0 - v)v + (v_0 - v)^2 = 0, \text{ de unde } v = v_0/3$$

($v = v_0$ corespunde minimului $P = 0$ și nu este realizabil fizicește).

** **1.3.76.** $N - mg\sin\theta = ma_n = mv^2/R$, $mg\cos\theta - \mu N = ma_t = m\dfrac{dv}{dt}$. (1)

Eliminăm pe N din cele două ecuații:

$$m\frac{dv}{dt} = mg\cos\theta - \mu(mg\sin\theta + mv^2/R),$$

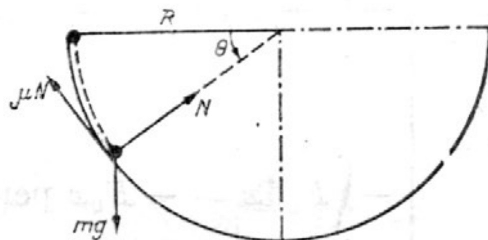


Fig. 1.3.76 R

înmulțim cu $ds = vdt = Rd\theta$:

$$m\frac{dv}{dt}ds = -\mu mv^2 d\theta + mg(\cos\theta - \mu\sin\theta)Rd\theta$$

sau

$$dE_c + 2\mu E_c d\theta = mg(\cos\theta - \mu\sin\theta)\,Rd\theta. \qquad (2)$$

Aici variabilele nu se separă direct, dar înmulțind ecuația cu un factor convenabil (numit factor integrand), variabilele se separă.
În cazul nostru înmulțim cu $e^{2\mu\theta}$:

$$e^{2\mu\theta}dE_c + 2\mu e^{2\mu\theta}E_c d\theta = mg(\cos\theta - \mu\sin\theta)\,Re^{2\mu\theta}d\theta$$

sau

$$d(E_c e^{2\mu\theta}) = mg(\cos\theta - \mu\sin\theta)\,R\,e^{2\mu\theta}d\theta. \qquad (3)$$

Integrăm:

$$\int \mathrm{d}(E_c\,\mathrm{e}^{2\mu\theta}) = E_c\,\mathrm{e}^{2\mu\theta} = mgR\int(\cos\theta - \mu\sin\theta)\,\mathrm{e}^{2\mu\theta}\,\mathrm{d}\theta. \tag{4}$$

Integrala din membrul drept este ușor de calculat, fiindcă integrala funcției exponențiale înmulțită cu funcții trigonometrice este de același tip și aplicăm metoda identificării:

$$\int(\cos\theta - \mu\sin\theta)\,\mathrm{e}^{2\mu\theta}\,\mathrm{d}\theta = (A\cos\theta + B\sin\theta)\,\mathrm{e}^{2\mu\theta} + C.$$

Prin derivarea membrului drept trebuie să regăsim integrandul din stînga:

$$(\cos\theta - \mu\sin\theta)\,\mathrm{e}^{2\mu\theta} = (-A\sin\theta + B\cos\theta)\,\mathrm{e}^{2\mu\theta} + $$
$$+ 2\mu(A\cos\theta + B\sin\theta)\,\mathrm{e}^{2\mu\theta},$$

prin identificare:

$$1 = B + 2\mu A, \quad -\mu = -A + 2\mu B,$$

de unde

$$A = \frac{3\mu}{1+4\mu^2}, \quad B = \frac{1-2\mu^2}{1+4\mu^2}. \tag{5}$$

Integrala (4) devine:

$$E_c = mgR\,\frac{3\mu\cos\theta + (1-2\mu^2)\sin\theta}{1+4\mu^2} + C\mathrm{e}^{-2\mu\theta},$$

unde constanta de integrare se determină din condiția inițială: la $t = 0$ avem $\theta = 0$ și $E_c = 0$: $0 = mgR\,\dfrac{3\mu}{1+4\mu^2} + C$, astfel încît:

$$E_c = \frac{1}{2}\,mv^2 = \frac{mgR}{1+4\mu^2}\,[3\mu\cos\theta + (1-2\mu^2)\sin\theta - 3\,\mu\mathrm{e}^{-2\mu\theta}]. \tag{6}$$

(**) **1.3.77.** a) Cîmpul de forțe este *conservativ*:

$$E_p(x) = -\int_0^x F\,\mathrm{d}x = \begin{cases} -\displaystyle\int_0^x(-F_0)\,\mathrm{d}x = +F_0x \text{ pentru } x > 0, \\ -\displaystyle\int_0^x F_0\,\mathrm{d}x = -F_0x \text{ pentru } x < 0 \\ \text{deci } E_p(x) = F_0|x|. \end{cases}$$

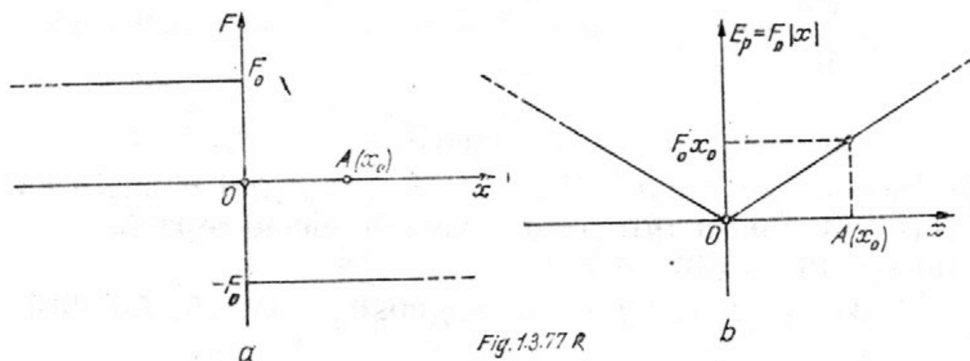


Fig. 1.3.77 R

Am ales $E_p = 0$ în origine (Vd. figura). Particula se mişcă în „groapa de potenţial" din figură, fiind supusă şi la o forţă de frecare.

Teorema variaţiei energiei mecanice spune că variaţia energiei mecanice este egală cu lucrul mecanic al forţelor *neconservative* :

$$\Delta(E_c + E_p) = L_{\text{necons.}} = \int F_{\text{necons.}}\, dx. \tag{2}$$

Forţele de frecare sînt neconservative, ele se opun mişcării şi fac lucru mecanic *negativ*, deci energia mecanică *scade*, transformîndu-se în căldură. În cazul nostru particula are iniţial energie potenţială $E_p(x_0) = F_0 x_0$; ea va oscila în jurul originii pînă se va opri în origine : $E_p(0) = 0$, energia sa potenţială transformîndu-se în căldură, deci

$$Q = F_0 x_0 = 1{,}00 \text{ J}. \tag{3}$$

b) Deoarece forţele sînt constante mişcarea va fi uniform variată cu acceleraţia

$$a = \frac{1}{m}(\mp F_0 + F_f) \text{ sau } a = \frac{1}{m}(\pm F_0 - F_f).$$

Dar pentru mişcarea uniform variată este valabilă formula lui Galilei

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2a(x - x_0)} \tag{4}$$

al cărei grafic este o *parabolă* (cu axa de simetrie Ox) :

$$x = \frac{1}{2a} v^2 + \left(x_0 - \frac{1}{2a} v_0^2\right), \text{ (funcţie pătratică)}, \tag{5}$$

de aceea graficul $v = \text{v}(x)$ este format din segmente de parabolă ca în figură.

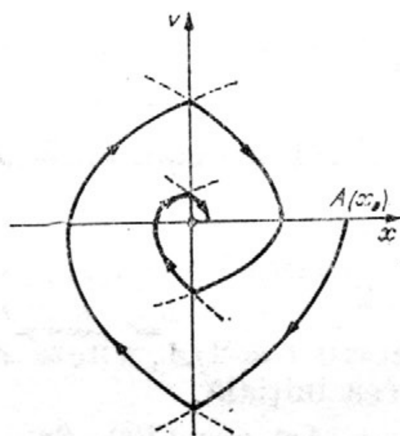


Fig. 1.3.77cR

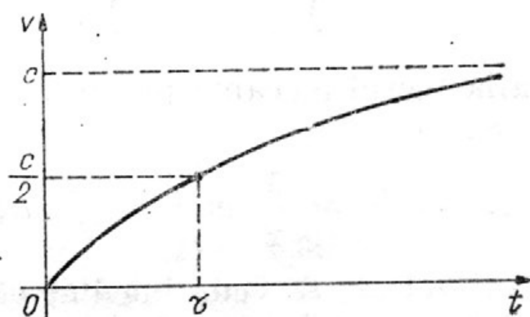


Fig. 1.3.78R

** **1.3.78.** a) c este viteza limită maximă posibilă (pentru $t \to \infty$), iar τ este momentul în care viteza atinge valoarea $c/2$ (vd. figura).

b) $a = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{c\tau}{(t + \tau)^2}$, (1)

$$F = ma = \frac{mc\tau}{(t + \tau)^2}. \tag{2}$$

$$L = \int_0^x F dx = \int_0^t F v dt = \int_0^t \frac{mc\tau}{(t + \tau)^2} \cdot c \frac{t}{t + \tau} dt =$$

$$= mc^2\tau \int_0^t \frac{t + \tau - \tau}{(t + \tau)^3} \mathrm{d}t = mc^2\tau \left[\int_0^t \frac{\mathrm{d}t}{(t + \tau)^2} - \tau \int_0^t \frac{\mathrm{d}t}{(t + \tau)^3} \right] =$$

$$= mc^2\tau \left[-\frac{1}{t + \tau} + \frac{1}{\tau} + \frac{\tau}{2} \frac{1}{(t + \tau)^2} - \frac{\tau}{2\tau^2} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} m \frac{c^2 t^2}{(t + \tau)^2} = \frac{1}{2} mv^2. \tag{3}$$

c) Se verifică imediat teorema variației energiei cinetice:

$$L = \Delta E_c = \frac{1}{2} mv^2. \tag{4}$$

** **1.3.79.** $a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(v_0 + Ax) = A \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = Av,$

separăm variabilele și integrăm:

$$\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}v}{Av}, \ \int \mathrm{d}t = t = \int \frac{\mathrm{d}v}{Av} = \frac{1}{A}(\ln v + C),$$

unde constanta de integrare se determină din condiția inițială:

la $t = 0$ avem $v = v_0$: $0 = \ln v_0 + C$, $C = -\ln v_0$,

$$t = \frac{1}{A} \ln \frac{v}{v_0}, \quad v = v_0 e^{At}. \tag{1}$$

Se putea integra și definit (limitele de integrare se corespund):

$$\int_0^t \mathrm{d}t = t = \int_{v_0}^{v} \frac{\mathrm{d}v}{Av} = \frac{1}{A} \ln \frac{v}{v_0},$$

Pentru a afla lucrul mecanic putem aplica direct teorema variației energiei cinetice:

$$L = \Delta E_c = \frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} mv_0^2 = \frac{1}{2} mv_0^2(e^{2At} - 1). \tag{2}$$

Din legea vitezei (1) se vede imediat că pentru $t = 1/A$, viteza $v = v_0 e$, deci devine de e = 2,7 ori mai mare decît cea inițială.

** **1.3.80.** $\mathrm{d}L = \vec{F}\, \mathrm{d}\vec{r} = F \cos\theta\, \mathrm{d}s = (F_0 + As) \cos(Bs) \cdot \mathrm{d}s,$

$$L = \int \mathrm{d}L = \int F_0 \mathrm{d}s + \int A \cos(Bs)\, \mathrm{d}s.$$

Să calculăm integrala (prin părți):

$$I = \int x \cos x\, \mathrm{d}x = \int x \mathrm{d}(\sin x) = x \sin x - \int \sin x\, \mathrm{d}x =$$

$$= x \sin x + \cos x. \tag{1}$$

Deci în cazul nostru:

$$L = F_0 \int \mathrm{d}s + \frac{A}{B^2} \int Bs \cos(Bs)\, \mathrm{d}(Bs) = F_0 s + \frac{A}{B^2}(Bs \sin Bs + \cos Bs) + C$$

unde constanta de integrare se determină din condiţia la margine:

$$\text{la } s=0,\ L=0;\ 0=\frac{A}{B^2}+C,\ C=-\frac{A}{B^2},$$

$$L=F_0 s+\frac{A}{B^2}(Bs\sin Bs+\cos Bs-1). \tag{2}$$

Se poate integra şi definit (limitele de integrare se corespund):

$$\int_0^L \mathrm{d}L=L=\int_0^s F_0\mathrm{d}s+\frac{A}{B^2}\int_0^s Bs\cos(Bs)\,\mathrm{d}(Bs)=F_0 s+$$

$$+\frac{A}{B^2}(Bs\sin Bs+\cos Bs)\Big|_0^s,$$

Lucrul mecanic total, cerut, se obţine imediat punînd $\pi/2=Bs$, $s=\pi/(2B)$:

$$L=\frac{\pi}{2B}F_0+\frac{A}{B^2}\left(\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{2}-1\right)=$$

$$=\frac{\pi}{2B}F_0+\frac{A}{B}\left(\frac{\pi}{2}-1\right), \tag{3}$$

** **1.3.81.** $v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=B+2Ct,\ a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=2C,\ F=ma=2mC,$

$$L=\int_0^x F\mathrm{d}x=\int_0^t Fv\mathrm{d}t=\int_0^t 2mC(B+2Ct)\mathrm{d}t=2mC(Bt+Ct^2)=$$

$$=2m\,Ct(B+Ct).$$

1.4. Impulsul mecanic

1.4.1. $l_1/l_2=\sqrt{\rho_2/\rho_1},\ m_1/m_2=\sqrt{\rho_1/\rho_2}.$
1.4.2. $x=d\,(m_2-m_1):(m_1+m_2+M)=1{,}00$ m.
1.4.3. $x=-hm_1:(m_1+m_2+M)=-0{,}20$ m.

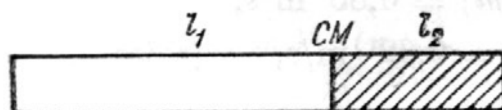


Fig. 1.4.1R

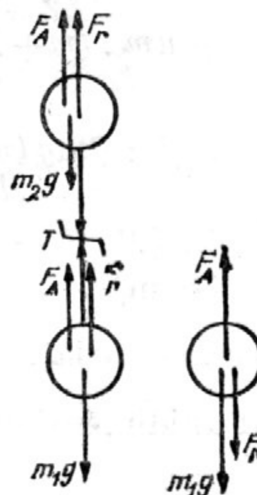


Fig. 1.4.3R

1.4.4. $f = 4(v_2/v_1 - v_2^2/v_1^2) = 36\%$.
1.4.5. $E_1'/E_1 = [(1 - r) : (1 + r)]^2$.
1.4.6. $v_2' = 2\ m_1v_1 : (m_1 + m_2) \to 2v_0,\ m_1/m_2 \to \infty$.
1.4.7. $p = (2-f)\ nm(v \mp u)^2 = 1{,}02$ kN, resp. 2,30 kN.
1.4.8. $a = 2g$.

1.4.9. a) $T = \frac{1}{2}(m_1 - m_2)g = 9{,}8$ N ;

b) $a_1' = g\left[1 + \frac{1}{2} + \frac{m_2}{2m_1} - 2\rho\frac{V}{m_1}\right] = \frac{3}{2}g$.

1.4.10. a) simultan : $v_2 = u \cdot 2m : (M + 2m) = 2{,}0$ m/s, succesiv :
$v_2'' = um[1 : (M + m) + 1 : (M + 2m)] = 2{,}2$ m/s;
b) Simultan : $v_2 = 0$; succesiv :
$v_2'' = -um^2 : [(M + m)(M + 2m)] = -0{,}20$ m/s.
1.4.11. $x = m^2v^2 : [2\mu g\ (m + M)^2] = 1{,}00$ m.
1.4.12. $v_n' = v_1[2k : (1 + k)]^{n-1}$; $\eta = [4k : (1 + k)^2]^{n-1}$.
1.4.13. $h_2 = h_1M^2/m^2 = 90$ cm.
1.4.14. $v_0 = \sqrt{2\mu gl(1 + m/M)} = 3{,}0$ m/s.
1.4.15. $s = m_2v_0^2 : [2\mu g(m_1 + m_2)] = 70$ cm.
1.4.16. $v_0 = 2\sqrt{\mu gl(1 + m/M)} = 2{,}8$ m/s.
1.4.17. $v_{1,2} = \sqrt{2Wm_{2,1} : [m_{1,2}(m_1 + m_2)]} = 200$ m/s, resp. 100 m/s.
1.4.18. $v = 2\sqrt{2gh} = 8{,}4$ m/s.
1.4.19. $f = 1 - (v/v_0)^2 - (1 - v/v_0)^2\ m/M = 0{,}64$.
1.4.20. $[1 : (1 - f^2)] + 1 = 3$.
1.4.21. $v_2 = -um : (m + M) = -0{,}20$ m/s ; $\mu = v_2^2 : (2gs) = 0{,}010$
$W = \frac{1}{2}\frac{mM}{m + M}u^2 = 13{,}2$ J.
1.4.22. $h' = 2gh^2 : (|\Delta\vec{p}|/m - \sqrt{2gh})^2 = 7{,}0$ cm.
1.4.23. $Q = mgh + \frac{1}{2}mMv^2 : (m + M) = 164{,}7$ J.
1.4.24. $P = Qv_0^2 = 4{,}0$ kN.
1.4.25. $F = \frac{1}{\tau}\sqrt{m_1^2 2gh_1 + 2gh_2(m_1 + m_2)^2} = 1{,}96$ kN.
1.4.26. $t = \sqrt{2h/g}\,(1 + f + k) : (1 - k)$; $s = h(1 + k^2) : (1 - k^2) = 5{,}2$ m.
1.4.27. $v_2 = -um : (m + M) = -0{,}60$ m/s ; $E_c = \frac{1}{2}mMu^2 : (m + M) =$
$= 12{,}0$ J.
1.4.28. $d = mv_0^2 : [2\mu g\,(m + m_0)] = 2{,}45$ m.
1.4.29. $v_1' = v + um : (M + m) = 0{,}80$ m/s,
$v_2' = v + um^2 : [M(M + m)] = 0{,}62$ m/s, $v_3' = v - um(M + 2m) :$
$: (M + m)^2 = 0{,}38$ m/s.

(**) **1.4.30.** Feorema variației impulsului pentru punctul material $\int \vec{F}\,dt =$
$= m\Delta\vec{v}$ în cazul unidimensional (proiectată pe axa Ox) dă

$$\int F dt = m\,\Delta v, \qquad (1)$$

Aplicăm această teoremă separat pentru cele două corpuri. Observăm că impulsul forței $\int F dt$ reprezintă aria mărginită de graficul forței. În procesul ciocnirii interacția este descrisă prin cele două forțe de percuție, acțiunea și reacțiunea. În cazul nostru asupra primului corp acționează forța $-|F|$, iar asupra celui de-al doilea forța $+|F|$, pe axa Ox. Aria $\int F dt$ sste în cazul nostru aria unui triunghi : $\frac{1}{2}F_0\tau$, prin urmare :

$$-\frac{1}{2}F_0\tau = m_1v_1' - m_1v_1, \quad \frac{1}{2}F_0\tau = m_2v_2' - m_2v_2, \tag{2}$$

de unde

$$v_1' = v_1 - \frac{1}{2m_1}F_0\tau = -10 \text{ m/s}; \; v_2' = v_2 + \frac{1}{2m_2}F_0\tau = -5{,}0 \text{ m/s}. \tag{3}$$

Coeficientul de restituție este prin definiție :

$$k = -(v_1' - v_2') : (v_1 - v_2) = 0{,}20. \tag{4}$$

Căldura degajată prin ciocnire :

$$Q = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 - \frac{1}{2}m_1v_1'^2 - \frac{1}{2}m_2v_2'^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}(1-k^2)(v_1-v_2)^2 = 40 \text{ J}. \tag{5}$$

Se poate judeca și fără integrale, scriind legea (1) astfel

$$\langle F\rangle\Delta t = m\Delta v, \tag{6}$$

unde $\langle F\rangle$ este forța *medie* pe intervalul de timp Δt. Dar din definiția și interpretarea geometrică a valorii medii rezultă că $\langle F\rangle\Delta t$ este *aria* de sub graficul forței în diagrama $F - t$ (forța reprezentată în funcție de timp).

1.4.31. $h_0 = \frac{1}{2g}(v_0 - \sqrt{2gh} \cdot m/m_0)^2 = 46$ m.

1.4.32. $v'' = \frac{1}{1-f}\sqrt{f^2v'^2 + (1-2f)v_0^2} = 10{,}9 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $t =$
$= \frac{1}{g}\left[\frac{1}{1-f}\sqrt{v'^2 - v_0^2} + v''-v'\right] = 1{,}28$ s.

1.4.33. $v_{cm} = (m_1v_1 + m_2v_2) : (m_1 + m_2) = 3{,}0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

1.4.34. $\Delta E_c = 2mv_2(v_1 + v_2) = 1{,}00 \cdot 10^{-22}$ J, $\Delta p = -2m(v_1 + v_2) = -0{,}50 \cdot 10^{-22}$ N.s.

1.4.35. a) $4m_1m_2 : (m_1 + m_2)^2$, b) $m_1m_2 : (m_1 + m_2)^2$, c) $m_2 : (m_1 + m_2)$, d) $m_1 = m_2$.

1.4.36. $a_{cm} = g(m_2 - m_1)^2 : (m_1 + m_2)^2 = 0{,}39$ m/s².

1.4.37. $m_{1,2} = v_{2,1}(v_1 + v_2)^2T/(2\pi\gamma) = 3{,}7 \cdot 10^{29}$ kg, resp. $1{,}85 \cdot 10^{29}$ kg.

1.4.38. $T = 4\pi^2n^2l\, m_1m_2 : (m_1 + m_2) = 9{,}46$ N.

1.4.39. $1 - 1/n < f < 1 - 1/n^2$ sau $\frac{2}{3} < f < \frac{8}{9}$.

1.4.40. $m_2/m_1 = (\sqrt{E_1} + \sqrt{E_1'}) : (\sqrt{E_1} - \sqrt{E_1'}) = 15{,}6$.

1.4.41. $v'' = (v - \sqrt{v^2 - v_0^2}) \cdot m : (m + M) = 1{,}00$ m/s.

1.4.42., $v_{max} = 12\ v_0$, $t_{min} = 137\ l : (120\ v_0)$.

1.4.43. a) $\sin(\alpha_1'/2) = \sin(\alpha_1/2)\cdot(m_1 - m_2):(m_1 + m_2)$, $\alpha_1' = -11°29'$, $\sin(\alpha_2'/2) = \sin(\alpha_1/2)\cdot 2m_1:(m_1 + m_2)$, $\alpha_2' = 47°9'$; b) $\sin(\alpha'/2) = \sin(\alpha_1/2)\cdot m_1:(m_1+m_2)$, $\alpha' = 23°4'$; c) $Q = 2gl\,\sin^2(\alpha_1/2)\cdot m_1m_2:(m_1+m_2) = 1{,}18$ J.

1.4.44. $v' = \sqrt{m^2v_0^2 + M^2gH + (m+M)^2gH} : (m+M) = 12$ m/s.

1.4.45. $N = [(v_0/d)\sqrt{2h/g}] = 90$.

1.4.46. $t = \sqrt{2/g}\,[-\sqrt{H-h} - M:(M+m) + \sqrt{(H-h)M^2:(M+m)^2 + h}] = 0{,}45$s.

1.4.47. $v = \sqrt{glM:[(m+M)\sin 2\alpha]}$, $v_{min} = 1{,}4$ m/s pentru $\alpha = 45°$.

1.4.48. $v_{r\,min} = \sqrt{gl} = 3{,}83$ m/s pt. $\mathrm{tg}\alpha = 1 + \dfrac{m}{M}$, $W = \dfrac{1}{2}\dfrac{mM}{m+M}\cdot gl\left(1 + \dfrac{m}{2M}\right) = 276$ J $> W_{min} = \dfrac{1}{2}\dfrac{mM}{m+M}\,gl\sqrt{1 + m/M}$.

1.4.49. $x_m = 2\mu(\sqrt{2gh}\cdot t + 2h) \cong 9$ m.

1.4.50. $H = (m/M)^2\,(v_0\sin\alpha - \sqrt{2gh})^2/(2g) = 11$ cm.

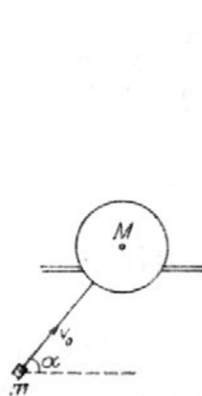


Fig.1.4.50R

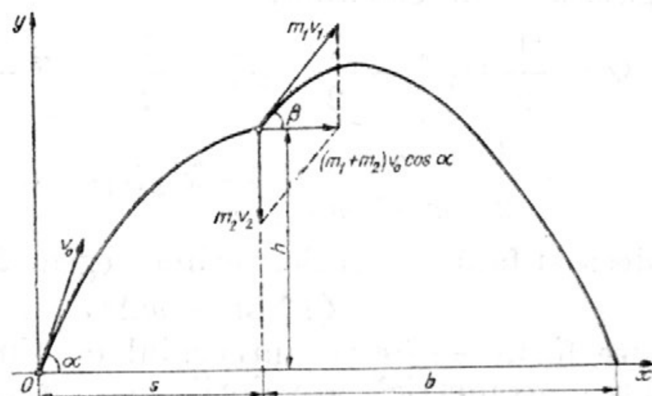


Fig.1.4.51R

1.4.51. $h = v_2'\tau + \dfrac{1}{2}g\tau^2$, $v_2' = 60$ m/s ; $v_0\cos\alpha = s\sqrt{g/(2h)} = 150$ m/s
$\mathrm{tg}\beta = kv_2':[(1+k)v_0\cos\alpha] = 4/15$; $v_1'\cos\beta = (1+k)v_0\cos\alpha = 450$ m/s,
$b = [\mathrm{tg}\beta + \sqrt{\mathrm{tg}^2\beta + 2gh/(v_1'^2\cos^2\beta)}]\cdot v_1'^2\cos^2\beta : g = 11{,}88$ km.

1.4.52. $v' = v_1[\sin^2\beta + n^2\sin^2\alpha - 2n\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha+\beta)]^{1/2} : [(1+n)\sin\beta] = 14$ m/s.

1.4.53. $W = mgb^2(1 + m/M)/(4h) = 347$ J.

1.4.54. $h_m = h\cos^2 2\alpha = 1{,}00$ m, $b = 2h\sin 4\alpha = 6{,}93$ m.

1.4.55. $v_1 = (b/4)\sqrt{g/(2h)} = 1{,}00$ m/s.

1.4.56. $t_u/t_c = s_u/s_c = f = 0{,}50$.

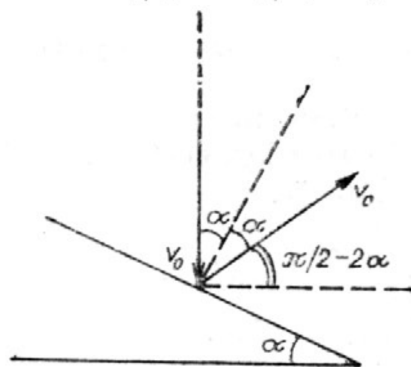


Fig.1.4.54R

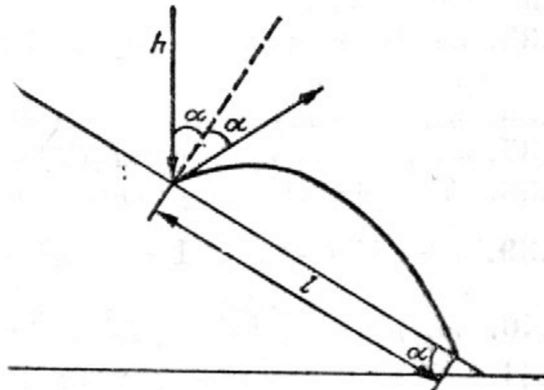


Fig.1.4.59R

1.4.57. $\mu = \text{tg}\,\alpha \cdot (1-f):(1+f) = 0{,}25.$

1.4.58. $v_m = \sqrt{gl\sin\alpha} = 3{,}5$ m/s, $F_{\min} = 2m^*\sqrt{gl\sin\alpha} = 7{,}0$ N.

1.4.59. $\sin\alpha = l/(8h)$, $\alpha = 30°$.

1.4.60. $\text{tg}\,\beta = n\cdot\text{tg}\,\alpha$, $n \in N$.

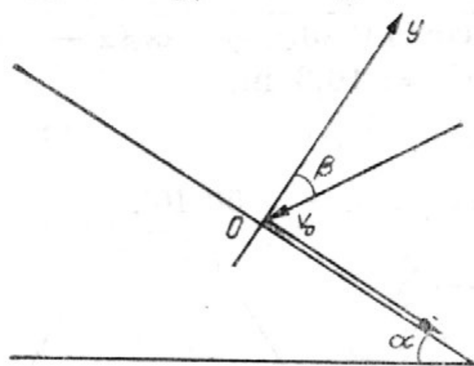


Fig. 1.4.60R

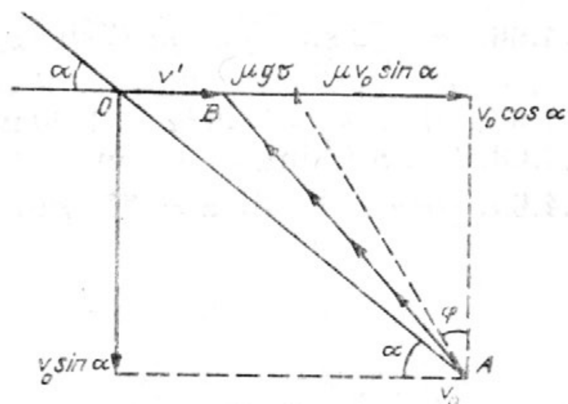
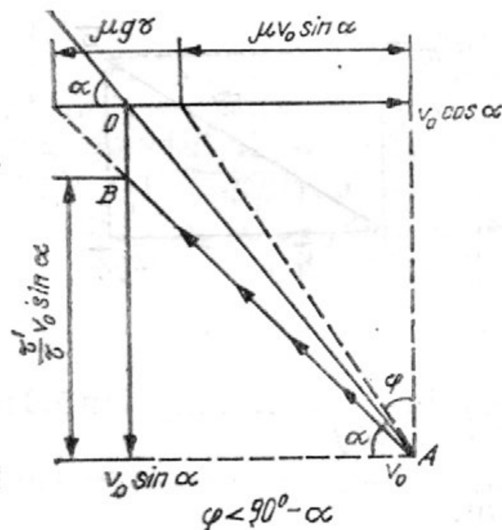


Fig. 1.4.61R

1.4.61. Fie τ durata ciocnirii, $v' = v_0(\cos\alpha - \mu\sin\alpha) - \mu g\tau \cong$ $\cong v_0(\cos\alpha - \mu\sin\alpha)$, $v_0 = \sqrt{2gh(1-\mu\,\text{ctg}\,\alpha)}$, $s \lesssim h(1/\mu - \text{ctg}\,\alpha)(\cos\alpha - \mu\sin\alpha)^2 =$ $= 1{,}00$ m.

1.4.62. Condiția de oprire la baza planului : $\mu \geqslant (1 - mg/N)\,\text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$,



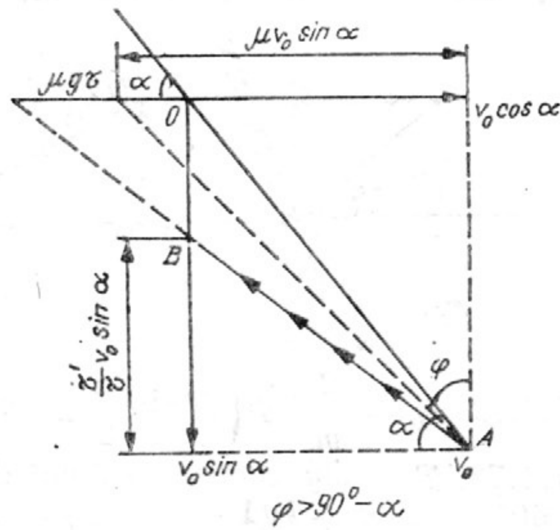


Fig. 1.4.62R

(N — reacțiunea planului orizontal care este sigur îndeplinită dacă $\varphi > \frac{\pi}{2} -$ $- \alpha$, ceea ce se întîmplă în cazul nostru.

1.4.63. $v' = v_0(\cos\alpha - \mu\sin\alpha) - \mu g\tau > 0$ dă condiția din enunț.

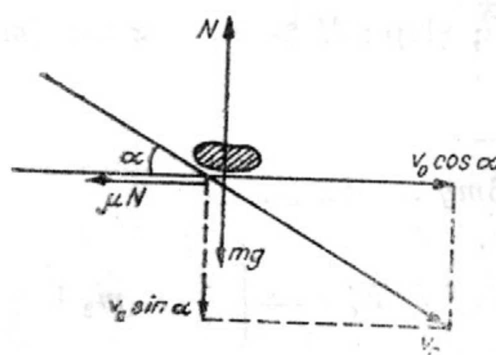


Fig. 1.4.63 R

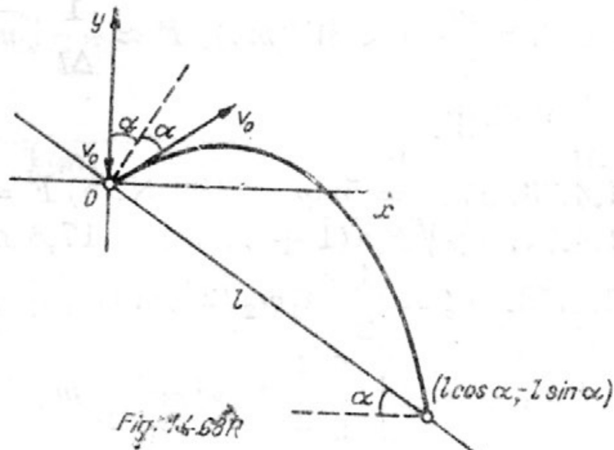


Fig. 1.4.68R

1.4.64. Condiţia de oprire : $\mu \geqslant (1 - mg/N)$ ctg α (vd. problema 1.4.62) este sigur îndeplinită dacă $\mu \geqslant$ ctg α sau $\varphi > 90° - \alpha$.

1.4.65. $v_{\max} = gT/(2 \sin\alpha) = 9{,}8$ m/s, $v_{\min} = \frac{1}{2} gT \operatorname{ctg}\alpha = 8{,}49$ m/s.

1.4.66. $\tau = 2 \sin\alpha \sqrt{2s/g} : [\sqrt{\sin^2\alpha - \mu^2 \cos^2\alpha}\,(\sqrt{\sin\alpha + \mu \cos\alpha} - \sqrt{\sin\alpha - \mu \cos\alpha})] = 9{,}37$ s, $d = s \operatorname{tg}\alpha/\mu = 16{,}3$ m.

1.4.67. $H = h + l \sin^3\alpha = 1{,}00$ m.

1.4.68. $l = 8\, h \sin\alpha = 4{,}0$ m.

1.4.69. $\cos\alpha = \sqrt{2/3}$, $\alpha = 35°$ sau $\cos\alpha = \sqrt{2/5}$, $\alpha = 50°40'$.

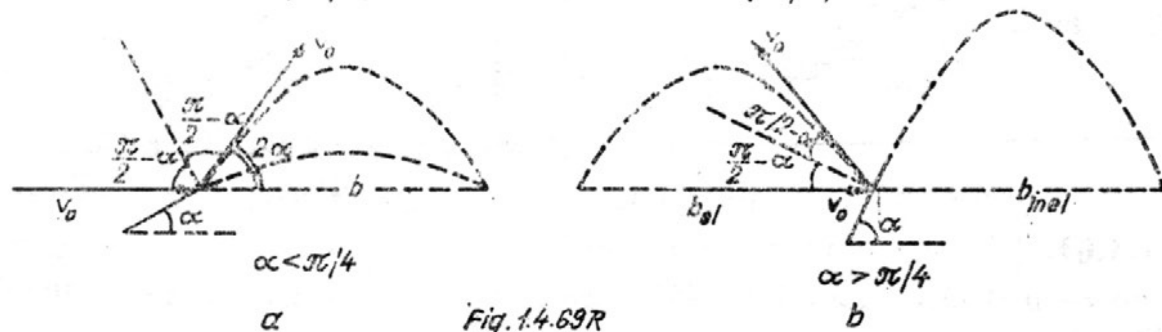


Fig. 1.4.69R

1.4.70. $u = \sqrt{2mgl : [M(1 + M/m)]} = 0{,}70$ m/s.

1.4.71. $h = l \cos^2 2\alpha = 0{,}20$ m.

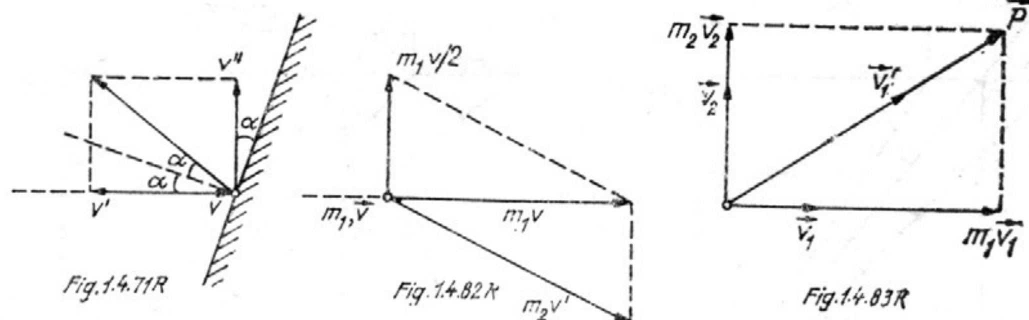


Fig. 1.4.71R Fig. 1.4.82R Fig. 1.4.83R

1.4.72. $v_0 = \frac{2}{m}\sqrt{gl}\left(M \sin\frac{\alpha}{2} \pm (m + M) \sin\frac{\alpha'}{2}\right) = 22{,}7$ m/s sau 5,3 m/s.

1.4.73. $T = mg\,(3 \cos\theta - 2 \cos\alpha)$, $T_{\max} = 3\, mg \cos\theta_r = T_r = 1{,}5\, mg$, $\theta_r = 60°$, $H = h + l\,(1 - \cos^3\theta_r) = 1{,}00$ m.

1.4.74. $\mu_{\max} = \frac{l}{d}\, 4m^2 : (m + M)^2 = 0{,}22$, $\mu_{\min} = \frac{l}{d}\, m^2 : (m + M) = 0{,}055$.

1.4.75. $s = 4WM : [mg(m+2M)]$, $F = \frac{2}{\Delta t}\sqrt{WmM : (m + 2M)}$;

barcă : $M \approx \frac{m}{2}$, $s \approx W/(mg)$, $F \approx \frac{1}{\Delta t}\sqrt{mW}$; şlep : $M \gg m$, $s \approx 2W/(mg)$, $F \approx \frac{1}{\Delta t}\sqrt{2mW}$.

1.4.76. a) $F = 5mg = 490$ N, b) $F = 6mg = 588$ N.

1.4.77. $v \geqslant \sqrt{Rg\,(1 + M/m)} = 17{,}8$ m/s.

(*) **1.4.78.** $E_c' = \frac{1}{2} m_1 m_2 (2v)^2 : (m_1 + m_2)$, $f = E_c'/E_c = \left[\frac{1}{2} m_1 m_2 4v^2 / (m_1 + m_2)\right] : \left[\frac{1}{2} m_1 v^2 + \frac{1}{2} m_2 v^2\right] = 4 m_1 m_2 : (m_1 + m_2)^2$. (1)

Transcriem rezultatul astfel:

$$f = \frac{4}{(\sqrt{m_1/m_2} + \sqrt{m_2/m_1})^2}. \qquad (2)$$

Acum se vede că la numitor avem suma a două mărimi variabile, dar al căror produs este *constant*, deci suma va fi minimă cînd termenii sînt egali (atunci fracţia f va fi maximă):

$$\sqrt{m_1/m_2} = \sqrt{m_2/m_1}, \text{ de unde } m_1 = m_2. \qquad (3)$$

Deci în cazul ciocnirii considerate cantitatea de căldură degajată este maximă cînd masele sînt egale între ele.

Altfel, cu ajutorul derivatelor:

$$f = \frac{4}{F^2}, \text{ unde } F(r) = r + \frac{1}{r}, \ r = \sqrt{m_1/m_2},$$

$$F'(r) = 0 = 1 - \frac{1}{r^2}, \text{ de unde } r = 1 = \sqrt{m_1/m_2}.$$

$$F''(r) = \frac{2}{r^3} > 0.$$

Numitorul fiind minim, fracţia va fi maximă.

1.4.79. $-\Delta E_c/E_c = 1 - \sqrt{h_2/h_1}$.

1.4.80. $m_1/m_2 = k : (2 + k) = 1/3$.

1.4.81. Condiţia de posibilitate a problemei: $2md/(\pi\theta l M) = 4n + 1$ pentru punctul A şi $= 4n + 3$ pentru B; $\text{tg}\,\alpha = (l/d)\,[(\pi k/2)^2 : 2 - 1]$, $v_0 = \sqrt{gl}\sqrt{(1 + d^2/l^2)\cdot 4/(\pi k)^2 + (\pi k/2)^2 : 4 - 1}$.

1.4.82. $m_2 = 5m_1/3 = 0{,}500$ kg.

1.4.83. $v_1' = (1/m_1)\sqrt{m_1^2 v_1^2 + m_2^2 v_2^2} = 7{,}07$ m/s,

$Q = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 (1 - m_2/m_1) = 2{,}5$ J.

1.4.84. $Q = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 (1 - m_1/m_2) = 25$J.

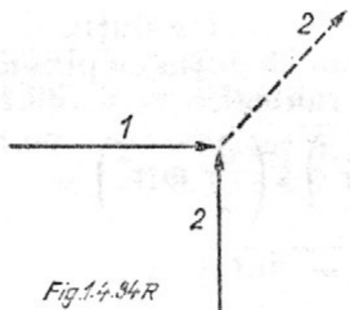


Fig.1.4.84R

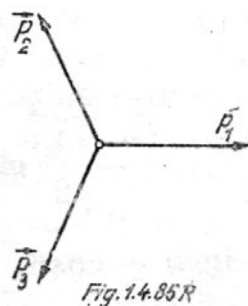


Fig.1.4.85R

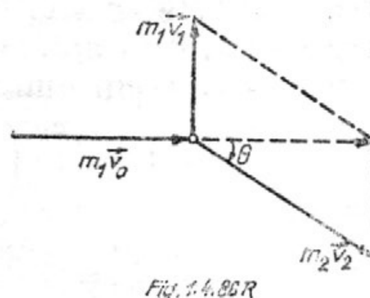


Fig.1.4.86R

1.4.85. $v_i = \frac{1}{m_i}\sqrt{2E_c : (1/m_1 + 1/m_2 + 1/m_3)}$, $i = 1,2,3$.

1.4.86. $v_1^2 = v_0^2\,(r-1) : (r+1)$, $v_2^2 = v_0^2 \cdot 2 : [r(r+1)]$, $\text{tg}\,\theta = \sqrt{(r-1) : (r+1)}$.

1.4.87. $v_1' = v_1 \sin\theta_2 : \sin(\theta_1 + \theta_2)$, $v_2' = v_1(m_1/m_2)\sin\theta_1 : \sin(\theta_1 + \theta_2)$; $\Delta E_c = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 [(m_1/m_2)\sin^2\theta_1 + \sin^2\theta_2 - \sin^2(\theta_1 + \theta_2)] : \sin^2(\theta_1 + \theta_2)$, condiţia $m_1 = m_2$ şi $\Delta E_c = 0$ dă $\theta_1 + \theta_2 = 90°$.

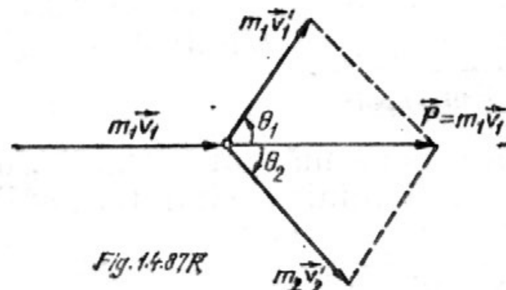


Fig. 1.4.87R

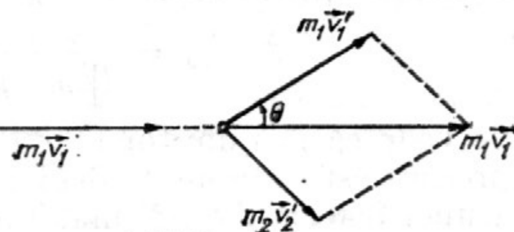


Fig. 1.4.88R

* **1.4.88.** Din triunghiul impulsurilor (teorema cosinusului):

$$(m_2v_2')^2 = (m_1v_1)^2 + (m_1v_1')^2 - 2m_1v_1m_1v_1'\cos\theta. \tag{1}$$

Conservarea energiei cinetice (ciocnire perfect elastică):

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 = \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2. \tag{2}$$

a) Din cele două ecuații rezultă

$$v_1' = v_1(m_1\cos\theta \mp \sqrt{m_2^2 - m_1^2\sin^2\theta}) : (m_1 + m_2) =$$
$$= v_1\frac{1}{1+r}(\cos\theta \mp \sqrt{r^2 - \sin^2\theta}),$$
$$v_2' = v_1\frac{\sqrt{2}}{1+r}\sqrt{\sin^2\theta + r \pm \cos\theta\sqrt{r^2 - \sin^2\theta}}, \; |\sin\theta| \leqslant r. \tag{3}$$
$$r = m_2/m_1.$$

Schimbarea semnului lui θ dă aceeași soluție, de aceea vom considera $\theta \in (0, \pi]$, $\sin\theta > 0$.

Deoarece $v_1' = |\vec{v}_1'| \geqslant 0$, soluția cu minus radical este admisibilă dacă $\cos^2\theta \geqslant r^2 - \sin^2\theta$, adică $r \leqslant 1$.

Pentru $r = 1$, $(m_1 = m_2)$ avem.

$$v_1' = 0,\; v_2' = v_1 \text{ sau } v_1' = v_1\cos\theta,\; v_2' = v_1\sin\theta, (m_1 = m_2), \tag{4}$$

în ultimul caz particulele pleacă pe direcții perpendiculare între ele. În primul caz θ este nedeterminat, dar se poate considera $\theta \to \frac{\pi}{2}$ și atunci primul caz apare ca un caz limită al celui de-al doilea.

Pentru $r < 1$, $\theta < \pi/2$, $(\sin\theta < r)$ avem cele două soluții.

Pentru $r < 1$, $\theta > \pi/2$, $(\sin\theta < r)$ avem numai soluția cu plus radical.

Pentru $r > 1$, avem numai soluția cu plus radical.

b)
$$f = -\Delta E_{c1} : E_{c1} = \left(\frac{1}{2}m_1v_1^2 - \frac{1}{2}m_1v_1'^2\right) : \left(\frac{1}{2}m_1v_1^2\right) =$$
$$= \frac{2}{(1+r)^2}(r + \sin^2\theta \pm \cos\theta\sqrt{r^2 - \sin^2\theta}). \tag{5}$$

c) Fracțiunea f depinde de raportul $r = m_2/m_1$ și de unghiul θ.

Să considerăm întîi $r = 1$, atunci

$f = 1$ sau $f = \sin^2\theta$, deci f este maxim cînd

$$v_1' = 0,\; v_2' = v_1,\; (\theta \to \pi/2).$$

Să considerăm și cazul particular $\sin\theta = r < 1$, atunci

$$f = \frac{2r}{1+r} = \frac{2\sin\theta}{1+\sin\theta}\; (r = \sin\theta < 1)$$

care crește monoton către 1 cînd $r = \sin\theta \to 1$.

Să calculăm cele două derivate parţiale:

$$\frac{\partial f}{\partial r}=\frac{2}{(1+r)^3\sqrt{r^2-\sin^2\theta}}\left[(1-r-2\sin^2\theta)\sqrt{r^2-\sin^2\theta}\pm\cos\theta(r-r^2+2\sin^2\theta)\right]. \quad (7)$$

Pentru $r=1$ această derivată se poate anula. Acest caz l-am considerat mai sus.

Scriind f sub forma:

$$f=\frac{2}{(1+r)^2}(r+1-\cos^2\theta\pm\cos\theta\sqrt{r^2-1+\cos^2\theta}), \quad (8)$$

avem

$$\frac{\partial f}{\partial\theta}=\frac{\partial f}{\partial\cos\theta}\,\frac{\partial\cos\theta}{\partial\theta}=-\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\cos\theta}=$$

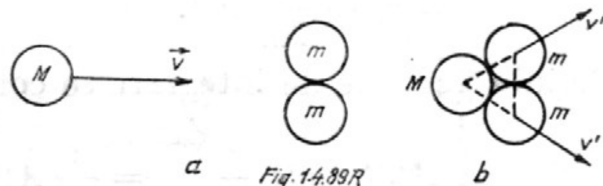
$$=-\sin\theta\cdot\frac{\pm 2}{(1+r)^2\sqrt{r^2-\sin^2\theta}}(\cos\theta\mp\sqrt{r^2-\sin^2\theta})^2. \quad (9)$$

Această derivată se poate anula pentru $r=1$, caz pe care l-am studiat, sau pentru $\theta=0$ sau π (caz unidimensional) cînd obţinem:

$$f_m=\frac{4r}{(1+r)^2}=4m_1m_2:(m_1+m_2), \quad (10)$$

care este maxim pentru $r=1$ $(m_1=m_2)$ cînd $f_{max}=1$.

1.4.89. $M=3m/2=300$ g.



1.4.90. $\mathrm{tg}(\theta+\alpha)=(m_1+m_2)v_1\,\mathrm{tg}\,\alpha:[(m_1-m_2)v_1-2m_2v_2]=-\sqrt{3}/6$, $\theta=134°$.

1.4.91. $v_2=\sqrt{2gh}:\sqrt{M^2/m^2+M/m}=0{,}44$ m/s.

1.4.92. $d=2\sqrt{(H-h)h\,(1+m/M)}=2{,}00$ m.

1.4.93. $h'=hM^2:(M+m)^2=0{,}64$ m.

1.4.94. $v=\sqrt{v_0^2[1-mM:(m+M)^2]-2gR}=2{,}0$ m/s.

1.4.95. $h=Rm/M=10$ cm.

1.4.96. $s=\pi^2l^2/(16h)=40$ cm.

1.4.97. $v_1'=v_1\sqrt{m_1^2+m_1m_2+m_2^2}:(m_1+m_2)=8{,}7$ m/s, $v_2'=v_1m_1:(m_1+m_2)=4{,}0$ m/s.

1.4.98. $v_1'=v_1\sqrt{1-m_1/m_2}=4{,}0$ m/s, $v_2'=v_1m_1/m_2=1{,}8$ m/s.

1.4.99. $\mathrm{tg}\,\alpha'=v_1\sin\alpha:(v_1\cos\alpha+2v_2\cos\beta)=0{,}634$, $\alpha'=32°22'$, $v_1'=[v_1^2+4v_2^2\cos^2\beta+4v_1v_2\cos\alpha\cos\beta]^{1/2}=3{,}03$ m/s.

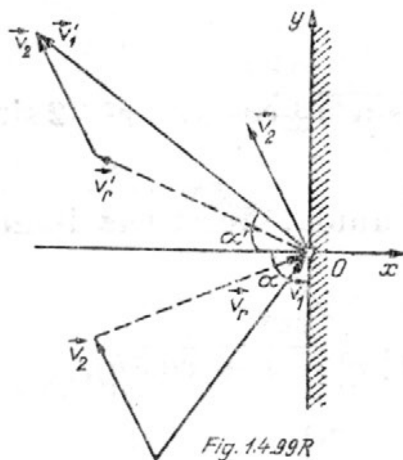
1.4.100. $v_1'=[(v_1-v_2)^2+v_2^2+2(v_1-v_2)v_2\cos 2\alpha]^{1/2}=14{,}1$ m/s, $\mathrm{tg}\,\beta=(v_1-v_2)\sin 2\alpha:[v_2+(v_1-v_2)\cos 2\alpha]=1{,}00$, $\beta=45°$.

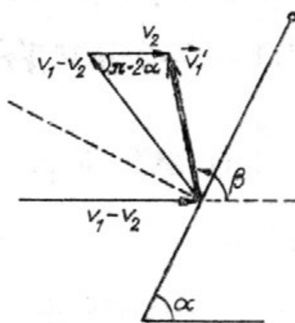
1.4.101. $v_1=\sqrt{2Em_2:[m_1(m_1+m_2)]}=2{,}0$ m/s, $v_2=1{,}0$ m/s.

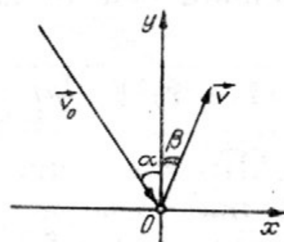
1.4.102. $\langle f\rangle=\frac{2m}{\Delta t}[2gh+(2k/m)(\sqrt{l_0^2+h^2}-l_0)^2]^{1/2}=0{,}60$ kN.

1.4.103. $x=-F_f/k+\left[F_f^2/k^2+\frac{1}{k}m^2v_0^2:(m+M)\right]^{1/2}=4{,}1$ cm.

1.4.104. $v=\sqrt{2\mu g\sqrt{d/(\mu g)+4m/k}}=2{,}2$ m/s.







1.4.105. $v = -v_0 \cos 2\alpha : (2\cos\alpha \cos\beta)$, ($\beta$ trebuie ales), ($v_0' = v_0 \mathrm{tg}\,\alpha$).

** **1.4.106.** $F = At = ma = m\dfrac{dv}{dt}$. (1)

Separăm variabilele și integrăm :

$$m dv = At dt, \int m dv = \int At dt, \; mv = \frac{1}{2}At^2 + C, \quad (2)$$

unde constanta de integrare se determină din condiția inițială : la $t = 0$ avem $v = v_0$: $mv_0 = C$, $mv = \dfrac{1}{2}At^2 + mv_0$,

$$v = v_0 + \frac{1}{2m}At^2. \quad (3)$$

Se poate integra și definit (limitele de integrare se corespund) :

$$\int_{v_0}^{v} m dv = \int_0^t At dt, \; m(v - v_0) = \frac{1}{2}At^2.$$

Dealtfel aceasta nu este altceva decît teorema variației impulsului punctului material.

Continuăm integrarea :

$$dx = v dt, \; \int dx = x = \int \left(v_0 + \frac{1}{2m}At^2\right) dt = v_0 t + \frac{1}{6m}At^3 + C',$$

unde constanta de integrare C' se determină din condiția inițială :
la $t = 0$ avem $x = 0$; rezultă $C' = 0$,

$$x = v_0 t + \frac{1}{6m}At^3. \quad (4)$$

** **1.4.107.** Forța de apăsare se compune din forța „statică" a porțiuni de lanț deja existente pe masă $\dfrac{m}{l}xg$ plus o contribuție „dinamică" dată de variația de impuls pe unitatea de timp $\dfrac{dm \cdot v}{dt}$. Dar $dm = \dfrac{m}{l}\,dx$, atunci

$$F = \frac{mg}{l}x + \frac{m}{l}\frac{dx}{dt}v = \frac{mg}{l}(x + v^2/g) = \frac{mg}{l}\left(\frac{1}{2}gt^2 + \frac{1}{g}g^2t^2\right) =$$

$$= \frac{3}{2}\frac{m}{l}g^2t^2, \text{ pentru } t < \sqrt{2l/g}. \quad (1)$$

În momentul final:

$$F_m = 3mg. \qquad (2)$$

Impulsul transmis în timpul dt de elementul de masă dm:

$$\mathrm{d}p = \mathrm{d}m \cdot v = \frac{m}{l}\,\mathrm{d}x \cdot v = \frac{m}{l}\sqrt{2gx}\;\mathrm{d}x. \qquad (3)$$

Integrăm:

$$p = \int \mathrm{d}p = \frac{m}{l}\int_0^l \sqrt{2gx}\,\mathrm{d}x = \frac{m}{l}\sqrt{2g}\cdot\frac{2}{3}\,x^{3/2}\Big|_0^l = \frac{2}{3}\,m\sqrt{2gl}. \qquad (4)$$

1.5. Momentul cinetic

1.5.1. $h = l\,\mu_1(\mathrm{tg}\alpha + \mu_2)\sin\alpha : (1 + \mu_1\mu_2) = 0{,}99$ m.

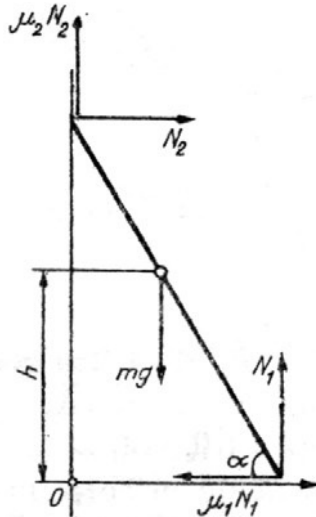


Fig. 1.5.1R

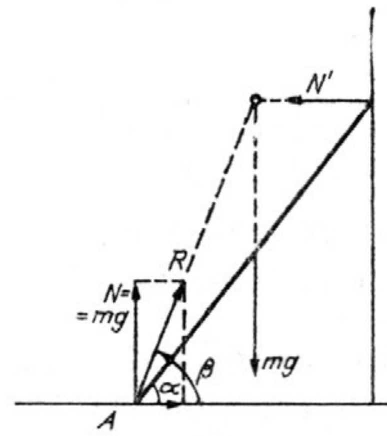


Fig. 1.5.3R

1.5.2. $T = \frac{mg}{4]}\,\mathrm{ctg}\alpha = 84{,}9$ N.

1.5.3. $R = \frac{mg}{2}\sqrt{4 + \mathrm{ctg}^2\alpha} = 40{,}8$ N, $\mathrm{tg}\beta = 2\mathrm{tg}\alpha$, $\beta = 73°\,54'$.

1.5.4. $\mathrm{tg}\alpha = a/b + 1/\mu = 3{,}00$, $\alpha = 71°34'$.

1.5.5. $R = m\sqrt{g^2 + (4\pi^2 n^2 l\sin\alpha)^2} = 22$ N; $\mathrm{tg}\beta = \frac{1}{g}\,4\pi^2 n^2 l\sin\alpha = 2{,}0$, $\beta = 63°36'$, $M = ml\sin\alpha(4\pi^2 n^2 l\cos\alpha - g) = 12{,}2$ N.m; $T = 2\pi\sqrt{l\cos\alpha/g} = 1{,}87$ s.

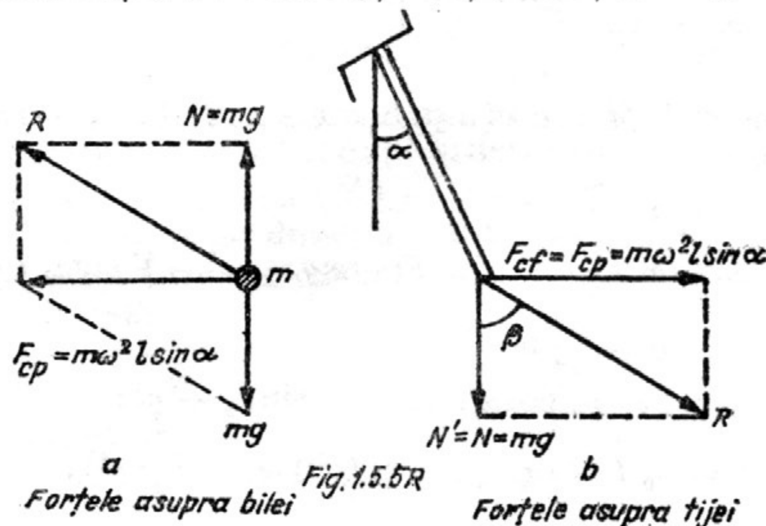


Fig. 1.5.5R

1.5.6. $\cos\alpha = \frac{g}{\omega^2}(m_1d_1 + m_2d_2) : (m_1d_1^2 + m_2d_2^2) = \frac{1}{2}$, $\alpha = 60°$ (pendulul conic).

1.5.7. $N = 4m_1m_2g : (m_1 + m_2) = 29{,}4$ N.

1.5.8. $F = (\sqrt{2} - 1)\,\mu mg = 0{,}81$ N, $x = l/\sqrt{2} = 0{,}71$ m.

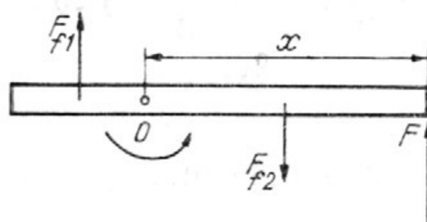


Fig. 1.5.8 R

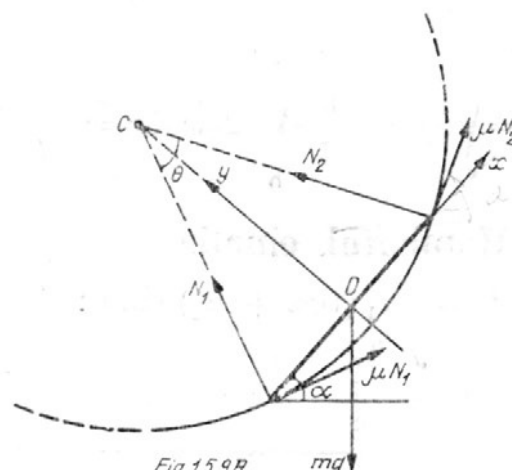


Fig. 1.5.9 R

1.5.9. $\text{tg}\,\alpha = \mu : \left(\cos^2\frac{\theta}{2} - \mu^2\sin^2\frac{\theta}{2}\right) = 2\mu : [1 - \mu^2 + (1+\mu^2)\cos\theta]$, $\alpha = 15°7'$.

1.5.10. $k = C/R^2 = 10$ N/m.

1.5.11. Se conservă numai direcţia lui $\vec{L}$, deci traiectoria rămîne plană.

1.5.12. a) Zero, b) $|d\vec{L}/dt| = |\vec{M}| = mgl\sin\theta$.

1.5.13. $L = mv_0 s\sin\alpha = 1{,}00$ J.s ; $\vec{L}$ faţă de orice punct de pe normala în punctul de ciocnire se conservă în procesul ciocnirii.

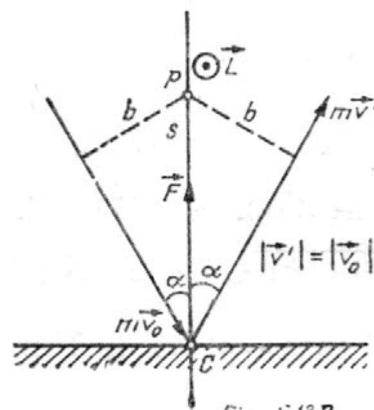


Fig. 1.5.13 R

* **1.5.14.** Momentul $\vec{M}$ are componentele : $\vec{M}$ $(0, 0, -mgx)$. Se poate obţine direct sau din

$$\vec{M} = \vec{r}\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & 0 \\ 0 & -mg & 0 \end{vmatrix} = \vec{k}(-mgx) = -\vec{k}\,mgv_0\,t\cos\alpha_0\,; \qquad (1)$$

$$v_x = v_0\cos\alpha_0,\ v_y = v_0\sin\alpha_0 - gt\,; \qquad (2)$$

$$x = v_0\,t\cos\alpha_0,\ y = v_0\,t\sin\alpha_0 - \frac{1}{2}gt^2\,; \qquad (3)$$

$$\vec{L}=\vec{r}\times m\vec{v}=m\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x & y & 0\\ v_x & v_y & 0\end{vmatrix}=\vec{k}(xv_y-yv_x)=-\vec{k}\frac{1}{2}mgt^2v_0\cos\alpha_0. \quad (4)$$

Se verifică : $M_z=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}L_z$ (celelalte componente sînt nule). (5)

* **1.5.15.**

$$\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ R\cos\theta & R\sin\theta & -l\cos\alpha\\ 0 & 0 & -mg\end{vmatrix}=\vec{i}(-mgR\sin\theta)+\vec{j}\,mgR\cos\theta=$$

$$=mgl\sin\alpha(-\vec{i}\sin\theta+\vec{j}\cos\theta),$$

$\vec{M}$ este pe direcția vitezei $\vec{v}=\omega R\,(-\vec{i}\sin\theta+\vec{j}\cos\theta)$,

$$|M|=mgl\sin\alpha=0{,}76\ \text{N.m}. \quad (7)$$

$$\vec{L}=\vec{r}\times m\vec{v}=m\cdot\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ R\cos\theta & R\sin\theta & -l\cos\alpha\\ -v\sin\theta & v\cos\theta & 0\end{vmatrix}=$$

$$=mvl(\vec{i}\cos\alpha\cos\theta+\vec{j}\cos\alpha\sin\theta+\vec{k}\sin\alpha). \quad (8)$$

$$|\vec{L}|=mvl=ml\sin\alpha\sqrt{gl/\cos\alpha}=0{,}33\ \text{J.s}, \quad (9)$$

căci $mg\operatorname{tg}\alpha=mv^2/R=mv^2/(l\sin\alpha)$, $v^2=gl\sin^2\alpha/\cos\alpha$. (10)

Ținînd seama că $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\cos\theta=-\sin\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=-\sin\theta\cdot\omega$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sin\theta=\cos\theta\cdot\omega$ (11)

și că lex secunda dă $mv\omega=mg\operatorname{tg}\alpha$, (12)

rezultă imediat :

$$\vec{M}=\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t},\ \text{pe componente}: M_x=\dot{L}_x,\ M_y=\dot{L}_y,\ M_z=\dot{L}_z\equiv 0. \quad (13)$$

1.5.16. Forțele $\overrightarrow{mg}$ și $\vec{N}$ sînt incidente cu diametrul vertical, deci $M_{||}=0$ și $L_{||}=\text{const.}$

1.5.17. $\vec{L}=(\vec{r}_1-\vec{r}_2)\times m\vec{v}_0$, $L=mv_0d$, (d — sistanța dintre drepte).

1.5.18. $n_2=n_1\ l_1^2/l_2^2=4{,}0$ rot/s, $W=\frac{m}{2}4\pi^2n_1^2l_1^2(l_1^2/l_2^2-1)=2{,}12$J.

* **1.5.19.** Forța rezultantă $\vec{T}$ fiind centrală, momentul cinetic $\vec{L}$ față de centru se conservă, deci *imediat* după arderea firului viteza nu se schimbă și energia cinetică se conservă ($\vec{T}\perp\vec{v}$). Se schimbă brusc tensiunea din firul superior și deoarece pe direcția radială inițial $T_0=mv^2/r$, iar final $T=mv^2/R$, $T<T_0$, raza de curbură a traiectoriei crește brusc (scade și accelerația normală).

Inițial :

$$T_0=(m_1+m_2)g=mv^2/r. \quad (1)$$

Final, pentru corpul m_1 :

$$T-m_1g=m_1\ddot{r}, \quad (2)$$

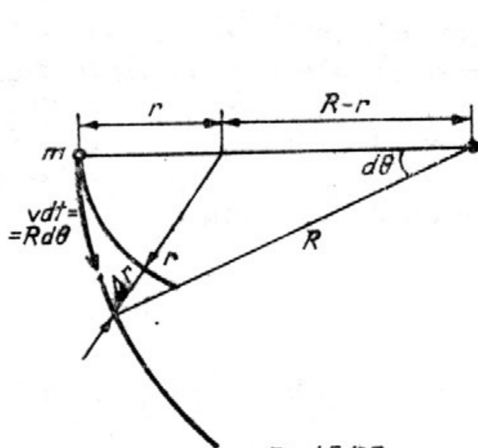


Fig. 1.5.19R

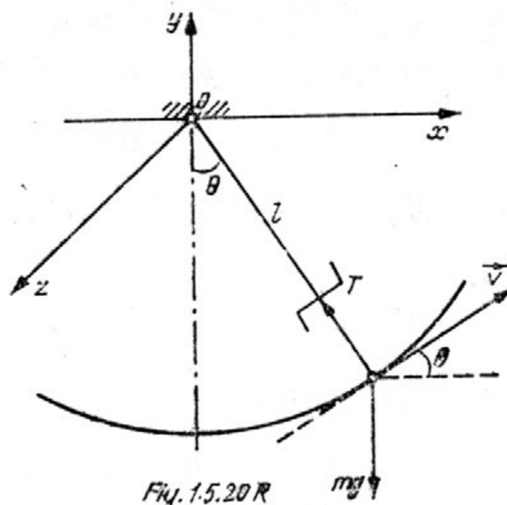


Fig. 1.5.20R

pentru corpul m:

$$T = mv^2/R. \tag{3}$$

În SR neinerţial rotit în jurul centrului O solidar cu particula m, avem pe direcţie radială spre centru:

$$T - mv^2/r = -m\ddot{r}, \tag{4}$$

unde mv^2/r este „forţa complementară de transport" centrifugă, iar $\ddot{\vec{r}}$ este acceleraţia radială centri*fugă*.

Scoţînd din (1) şi (2) mv^2/r şi $\ddot{\vec{r}}$, şi introducînd în (4), găsim

$$T = m_1 g(m + m_1 + m_2) : (m + m_1) = 0{,}245 \text{ N}. \tag{5}$$

De asemenea, din (3) şi (4) rezultă acceleraţia

$$\ddot{r} = v^2/r - v^2/R, \tag{6}$$

care se poate calcula şi direct astfel (vd. figura):

$$r + \Delta r = \sqrt{R^2 + (R-r)^2 - 2R(R-r)\cos d\theta}.$$

Mărimea Δr este de ordinul doi infinitezimal, deaceea $\cos d\theta$ trebuie dezvoltat pînă la ordinul doi:

$$\cos d\theta = 1 - \frac{1}{2} d\theta^2.$$

Atunci rezultă

$$\Delta r = \sqrt{r^2 + R(R-r)\, d\theta^2} - r = r\sqrt{1 + \frac{1}{r^2} R(R-r) d\theta^2} - r.$$

şi aproximînd radicalul cu formula cunoscută

$$(1 + x)^p \cong 1 + px, \ p \in R, \ |x| \ll 1, \text{ (la noi } p = 1/2), \tag{7}$$

găsim ($R d\theta = v dt$):

$$\Delta r = \frac{1}{2r} R(R-r) d\theta^2 = \frac{1}{2} \frac{R-r}{Rr} v^2 dt^2.$$

Identificînd cu dezvoltarea lui Δr:

$$\Delta r = \dot{r}\, dt + \frac{1}{2!} \ddot{r} dt^2 + \dots,$$

găsim

$$\dot{r} = 0, \ \ddot{r} = \frac{R-r}{Rr} v^2 \tag{8}$$

și deci în concordanță cu (6):

$$\ddot{r} = v^2\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right) = \frac{R-r}{Rr}\, v^2. \qquad (9)$$

Revenind la ecuațiile (3) și (1)

$$T = mv^2/R = \frac{m}{R}\cdot\frac{r}{m}(m_1 + m_2)g,$$

de unde, folosind și (5), rezultă:

$$\frac{R}{r} = \frac{(m_1+m_2)g}{T} = \frac{m_1+m_2}{m_1}\,\frac{m+m_1}{m+m_1+m_2} = 1{,}6. \qquad (10)$$

* **1.5.20.** $\vec{M}\,(0,\ 0,\ -mgl\,\sin\theta)$, (1)

ceea ce se poate obține direct sau din

$$\vec{M} = \vec{r}\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ l\sin\theta & -l\cos\theta & 0 \\ 0 & -mg & 0 \end{vmatrix} = \vec{k}(-mgl\sin\theta). \qquad (2)$$

(Tensiunea T nu dă moment față de punctul de suspensie — are brațul zero).

$$\vec{L}(0{,}0,\ mvl), \qquad (3)$$

ceea ce se poate obține direct sau din

$$\vec{L} = \vec{r}\times m\vec{v} = m\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ l\sin\theta & -l\cos\theta & 0 \\ v\cos\theta & v\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = \vec{k}\, mvl. \qquad (4)$$

Ținînd seama că $m\dfrac{dv}{dt} = F_t$ dă în cazul nostru

$$m\frac{dv}{dt} = -\,mg\sin\theta, \qquad (5)$$

avem

$$M_z = \frac{d}{dt}L_z,\ \text{(celelalte componente sînt nule)}. \qquad (6)$$

1.6. Mecanica rigidului

1.6.1. Vd. figura, $\langle v\rangle = 3\omega l/\pi$.

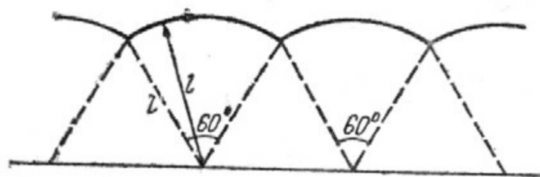


Fig.1.6.1R

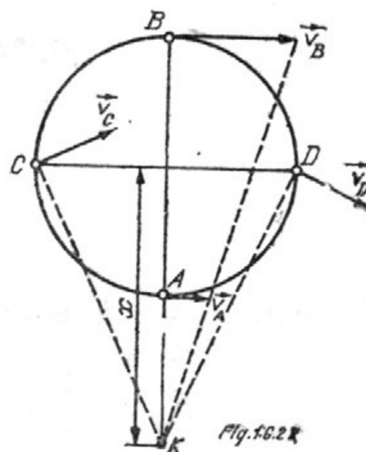


Fig.1.6.2R

1.6.2. $v_C = v_D = \sqrt{(v_A^2 + v_B^2)/2}$;

$v_{Cx} = v_{Dx} = (v_A + v_B)/2, \; v_{Cy} = -v_{Dy} = (v_B - v_A)/2.$

1.6.3. $v_C = \omega(R + \sqrt{R^2 - b^2/4})$ maximă, $v_D = -\omega(R - \sqrt{R^2 - b^2/4})$ minimă.

1.6.4. $T_1 = gm_1(2m_2 + m) : (m_1 + m_2 + m) = 3{,}6$ N, $T_2 = gm_2(2m_1 + m) : (m_1 + m_2 + m) = 4{,}0$ N.

1.6.5 $v' = \sqrt{v^2(1-h/R)^2 - gh} = 8{,}9$ m/s; $v_{\min} = \sqrt{gh} \cdot R/(R-h) = 1{,}10$ m/s.

1.6.6. $v = r\sqrt{g/b} = 3{,}1$ cm/s.

* **1.6.7.** Conservarea energiei:

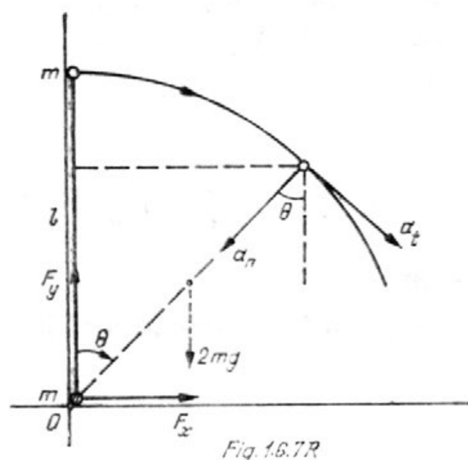


Fig. 1.6.7R

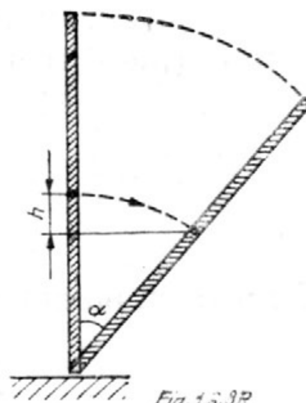


Fig. 1.6.8R

$$mgl\,(1-\cos\theta) = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\,(\omega l)^2,$$

de unde

$$\omega^2 = \frac{2g}{l}(1-\cos\theta). \tag{1}$$

Prin derivare în raport cu timpul:

$$2\omega\dot{\omega} = \frac{2g}{l}\sin\theta \cdot \dot{\theta}, \text{ dar } \dot{\omega} = \varepsilon, \; \dot{\theta} = \omega,$$

de unde rezultă

$$\varepsilon = \frac{g}{l}\sin\theta. \tag{2}$$

Accelerațiile CM al halterei:

$$a_n = \omega^2(l/2) = g\,(1-\cos\theta),$$
$$a_t = \varepsilon\,(l/2) = \frac{g}{2}\sin\theta. \tag{3}$$

Forțele care acționează asupra halterei ($\vec{F} = m\vec{a}_{\text{cm}}$):

$$F_x = ma_x = ma_n\sin\theta + ma_t\cos\theta = \frac{1}{2}mg\sin\theta(3\cos\theta - 2), \tag{4}$$

$$F_x = 0 \text{ pentru } \theta > \arccos\frac{2}{3},$$

$$F_y - 2mg = ma_y = -ma_n\cos\theta - ma_t\sin\theta = \frac{1}{2}mg(-1-2\cos\theta+3\cos^2\theta),$$

$$F_y = \frac{1}{2}mg(3-2\cos\theta + 3\cos^2\theta). \tag{5}$$

1.6.8. $t \cong N\, 2\sqrt{2l/(3g)} = 10{,}4$ s.
1.6.9. $\mathrm{tg}\beta = \mathrm{tg}\alpha \cdot M : (2M + m)$.
1.6.10. $E_c = \frac{1}{2} l^2\omega^2 m_1 m_2 : (m_1 + m_2) = 6{,}0$ J.
1.6.11. $T = (m_1+m_2)g - (m_1s_1+m_2s_2)^2 g : (m_1s_1^2+m_2s_2^2) = 5{,}88$ N — $5{,}61$ N.

1.7. Echilibrul mecanic

1.7.1. $T_2 = G\sqrt{n^2-1} = 173$ N.
1.7.2. $N_1 = mg \sin\beta : \sin(\beta-\alpha) = 170$ N, $N_2 = mg \sin\alpha : \sin(\beta-\alpha) = 98$ N.

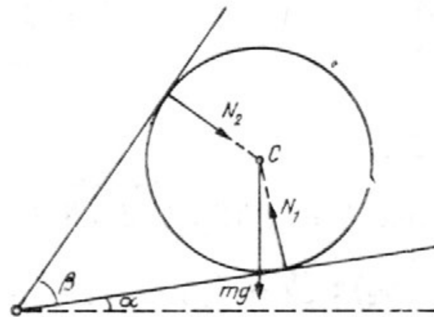


Fig. 1.7.2.R

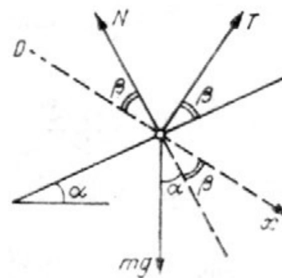


Fig. 1.7.3.R

1.7.3. $N = mg \cos(\alpha + \beta) : \cos\beta = 8{,}00$ N.
1.7.4. $F = mg \sin\alpha : (1 + \sin\alpha) = 1{,}00$ N.

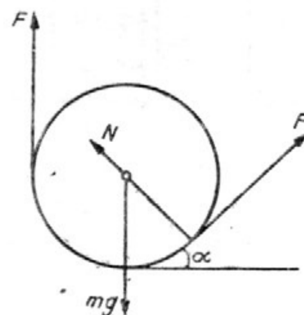


Fig 1.7.4R

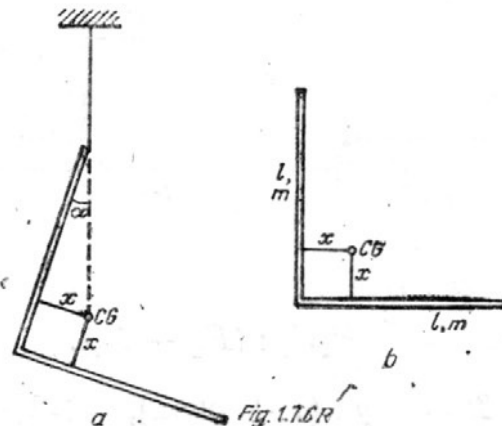


Fig. 1.7.6R

1.7.5. $f = F\ (L + l)/l = 500$ N.
1.7.6. $\mathrm{tg}\alpha = \frac{1}{3}$, $\alpha = 18°26'$.
1.7.7. $m = M(1-2f)/(2f) = 4{,}0$ kg.
1.7.8. $k_1/k_2 = (l/2-d) : (l/2) = \frac{1}{2}$.

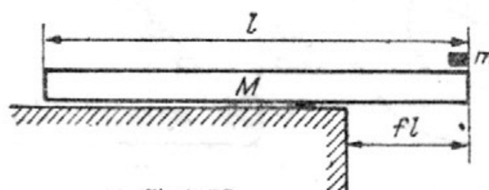


Fig. 1.7.7R

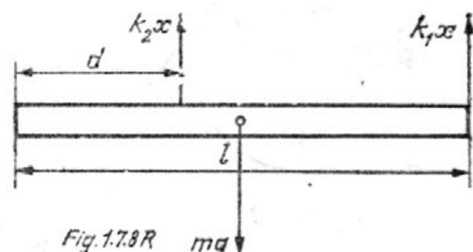


Fig. 1.7.8R

1.7.9. $\operatorname{tg}\alpha = 1/(2\mu)$, $\alpha \geqslant 45°$.
1.7.10. $T = mg\cos^2\alpha \cdot \sin\alpha \cdot l/(2h) = 150$ N.
1.7.11. $F = \dfrac{mg}{2}\sin\alpha = 9{,}8$ N.

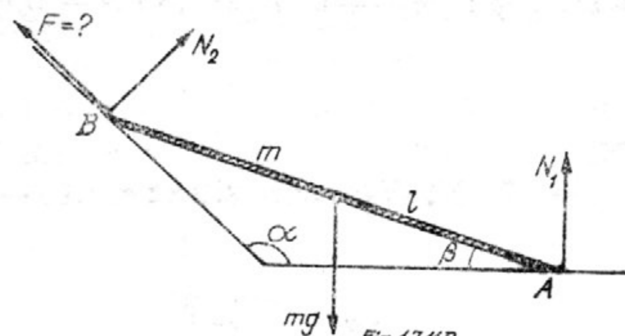


Fig. 1.7.11R

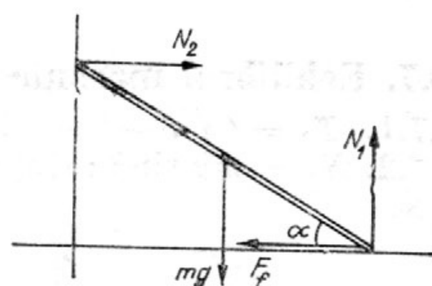


Fig. 1.7.12R

1.7.12. $F_f = \dfrac{1}{2}mg\operatorname{ctg}\alpha = 50$ N.

1.7.13. $F_{\min} = \mu_2 mg$ la înălțimea $h = b/(2\mu_2)$ dacă $h \leqslant H$, altfel $h = H$, $F_{\min} = \dfrac{1}{2}mgb(\mu_1 + \mu_2) : [b + (\mu_1 - \mu_2)H]$.

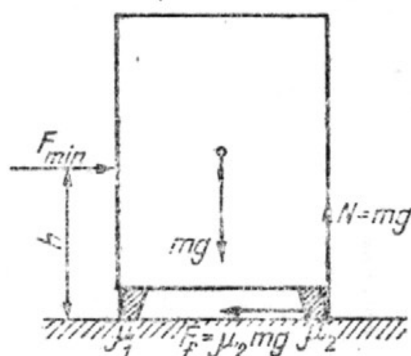


Fig. 1.7.13R

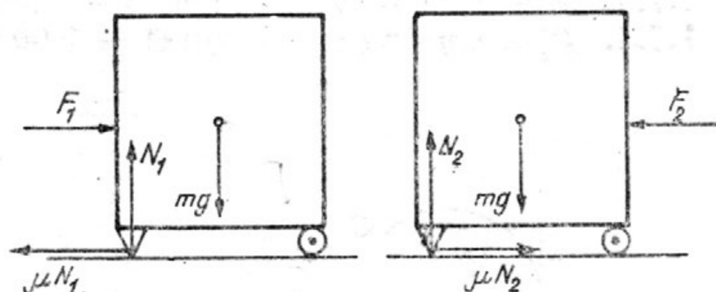


Fig. 1.7.14R

1.7.14. $m = \dfrac{2}{g}F_1F_2 : (F_2 - F_1)$.
1.7.15. $T = mg : (1 + \cos\alpha)$, $\mu \geqslant 1/\sin\alpha$.
1.7.16. $\mu = r\operatorname{tg}\alpha : (R + r) = 0{,}30$.

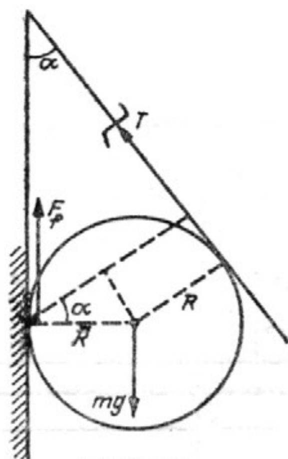


Fig. 1.7.15R

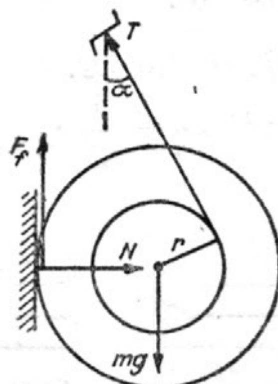


Fig. 1.7.17R

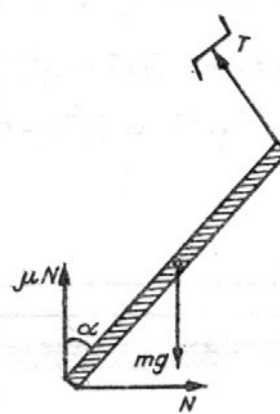


Fig. 1.7.18R

1.7.17. $\alpha \leqslant \arcsin \frac{r}{\mu R} = 30°$.

1.7.18. $\operatorname{tg}\alpha = 3/\mu = 10,\ \alpha \geqslant 84°$.

1.7.19. Vd. figura.

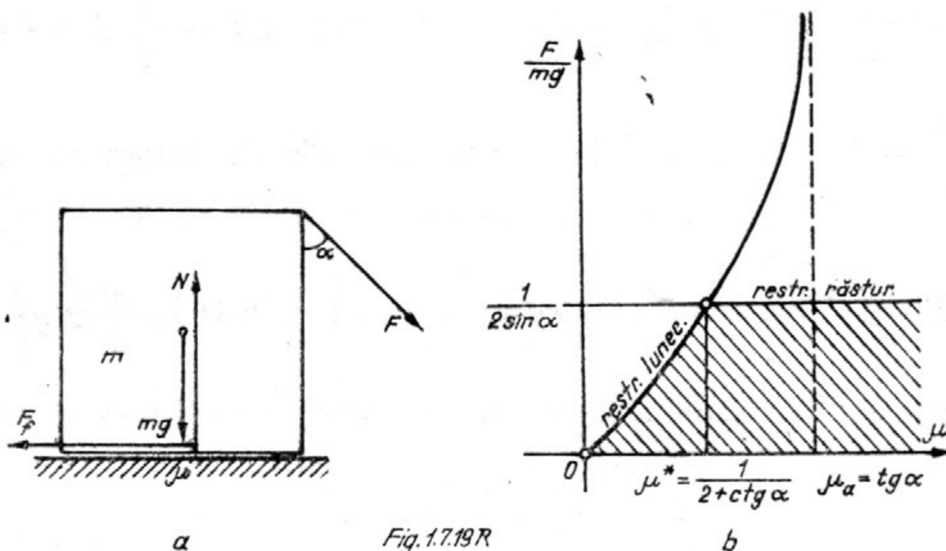


Fig. 1.7.19R

1.7.20. $m_{1,2} = \frac{M}{2}(1 \pm 2\sqrt{\Delta l/(l + 2\Delta l)} = 150$ g și 50 g.

1.7.21. $l < d/\cos\varphi \approx d\left(1 + \frac{1}{2}\varphi^2\right) = 1012{,}5$ mm.

1.7.22. a) $h \leqslant b,\ m \geqslant \mu M : (1-\mu),\ \mu < 1$; b) $h > b,\ \mu M : (1-\mu) \leqslant m \leqslant$ $\leqslant M(b/2) : (h-b),\ \mu < b : (2h-b)$.

1.7.23. $F = mg\sqrt{2}/4,\ \mu = 1/3$.

1.7.24. Cubul superior se poate răsturna numai pentru $\operatorname{tg}\alpha \geqslant 1$, iar ambele cuburi pentru $\operatorname{tg}\alpha \geqslant 1/2$. Pentru $\mu < \frac{1}{2}$ întîi lunecă cubul superior la unghiul planului $\alpha = \operatorname{arc\,tg}\mu$. Dacă $\mu > \frac{1}{2}$ se răstoarnă ambele cuburi la $\alpha = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2} = 26°34'$.

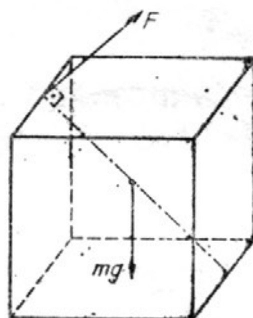


Fig. 1.7.23R

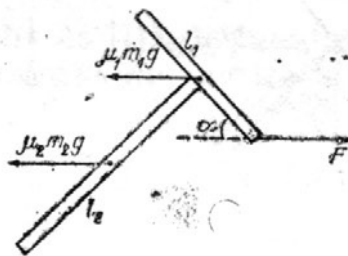


Fig. 1.7.27R

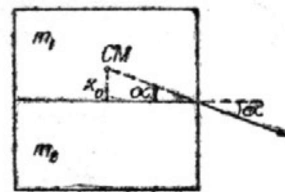


Fig. 1.7.28R

1.7.25. $\mu \leqslant b : \sqrt{4R^2 - b^2} = 0{,}050$.

1.7.26. $\operatorname{tg}\alpha = \mu_2 l_2 m_2 : (\mu_1 l_1 m_1)$.

1.7.27. $\operatorname{tg}\alpha = \mu_2 m_2 l_2 : [(\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2) l_1]$.

1.7.28. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}(m_1 - m_2) : (m_1 + m_2),\ \alpha = 9°28'$.

** **1.7.29.** Luăm un element de lanț de masă $\mathrm{d}m$ care subîntinde un unghi la centru $\mathrm{d}\theta$ (în radiani), deci are lungimea $\mathrm{d}s = R\mathrm{d}\theta$ și masa $\mathrm{d}m = \frac{m}{l}\mathrm{d}s = \frac{m}{l}R\mathrm{d}\theta$. Scriem condiția de echilibru pe direcția tangențială:

$$(T + \mathrm{d}T)\cos\frac{\mathrm{d}\theta}{2} - T\cos\frac{\mathrm{d}\theta}{2} - \mathrm{d}m\, g\cos\theta = 0 \text{ sau } \mathrm{d}T - \frac{m}{l}Rg\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = 0 \tag{1}$$

$\left(\cos\frac{\mathrm{d}\theta}{2} = 1\right)$ pe care o integrăm (limitele de integrare se corespund):

$$\int_{T_0}^{T}\mathrm{d}T = T - T_0 = \int_0^{\theta}\frac{m}{l}Rg\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{m}{l}Rg\int_0^{\theta}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{m}{l}Rg\sin\theta, \tag{2}$$

unde T_0 rezultă din condiția de echilibru pentru porțiunea de lanț care atîrnă:

$$2T_0 = \frac{m}{l}(l - \pi R)g. \tag{3}$$

Se poate integra și nedefinit:

$$T = \int\mathrm{d}T = \int\frac{m}{l}Rg\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{m}{l}Rg\sin\theta + C,$$

unde constanta de integrare se determină din condiția *la margine* ca pentru $\theta = 0$ să avem $T = T_0$, deci $T_0 = C$. Rezultă

$$T = \frac{1}{2}mg\left(1 + \frac{2R}{l}\sin\theta - \frac{\pi R}{l}\right) = \frac{1}{2}mg\left[1 - \frac{R}{l}(\pi - 2\sin\theta)\right]. \tag{4}$$

Tensiunea este maximă pentru $\theta = \pi/2$:

$$T_{max} = \frac{1}{2}mg\left[1 - (\pi - 2)\frac{R}{l}\right]. \tag{5}$$

Dacă $l = \pi R$, avem $T_0 = 0$ și

$$T = mg\frac{1}{\pi}\sin\theta,\ T_{max} = \frac{mg}{\pi}. \tag{6}$$

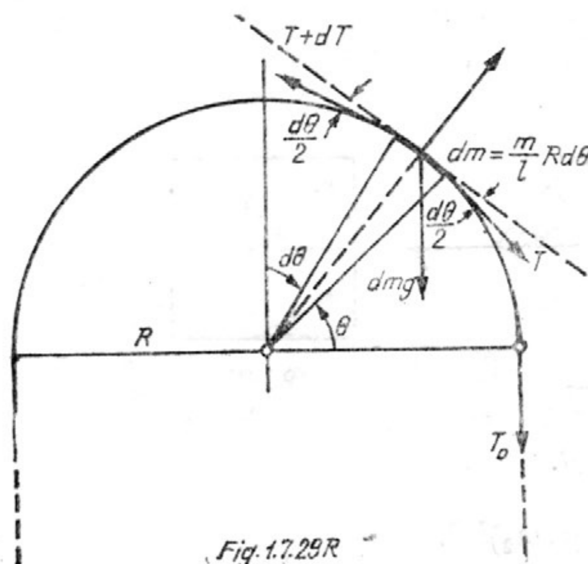


Fig. 1.7.29R

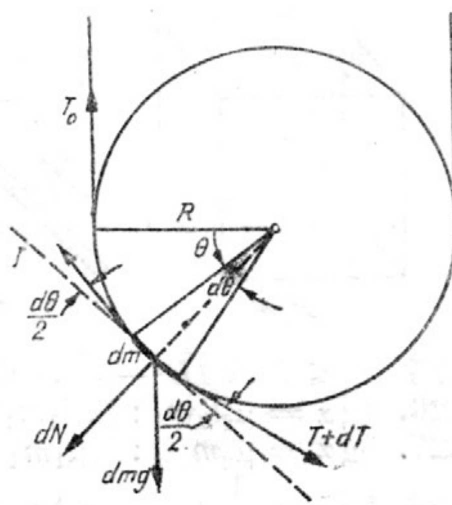


Fig. 1.7.30R

** **1.7.30.** Luăm un element de lanț de masă dm care subîntinde un unghi la centru dθ (în radiani), deci are lungimea ds = Rdθ și masa dm = $=\frac{m}{l}\,\mathrm{d}s=\frac{m}{l}\,R\,\mathrm{d}\theta$. Condiția de echilibru pe direcția tangențială:

$$(T+\mathrm{d}T)\cos\frac{\mathrm{d}\theta}{2}-T\cos\frac{\mathrm{d}\theta}{2}+\mathrm{d}mg\cos\theta=0 \text{ sau } \left(\cos\frac{\mathrm{d}\theta}{2}=1\right):$$

$$\mathrm{d}T=-\frac{m}{l}\,gR\cos\theta\,\mathrm{d}\theta, \tag{1}$$

pe care o integrăm (limitele de integrare se corespund):

$$\int_{T_0}^{T}\mathrm{d}T=T-T_0=-\frac{m}{l}\,gR\int_0^{\theta}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta=-\frac{mg}{l}\,R\sin\theta, \tag{2}$$

unde T_0 rezultă din condiția de echilibru:

$$2T_0=Mg+\frac{m}{l}\,\pi Rg. \tag{3}$$

Se poate integra și nedefinit:

$$T=\int\mathrm{d}T=-\frac{m}{l}\,gR\int\cos\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{m}{l}\,gR\sin\theta+C,$$

unde constanta de integrare se determină din condiția la margine ca pentru $\theta=0$ să avem $T=T_0$, deci $C=T_0$,

$$T=\frac{1}{2}\,Mg+\frac{1}{2}\,mg\,\frac{R}{l}\,(\pi-2\sin\theta) \tag{4}$$

Tensiunea minimă $(\theta=\pi/2)$:

$$T_{\min}=\frac{1}{2}\,Mg+\frac{1}{2}\,mg\,\frac{R}{l}\,(\pi-2). \tag{5}$$

Pentru lungimea minimă a lanțului $l=\pi R+2R$, av

$$T=\frac{1}{2}\,Mg+\frac{mg}{2(\pi+2)}\,(\pi-2\sin\theta \tag{6}$$

și are valoarea minimă:

$$T_{\min}=\frac{1}{2}\,Mg+\frac{1}{2}\,mg\,\frac{\pi-2}{\pi+2}\cdot$$

** **1.7.31.** Luăm un element de tijă de lungime dx și de masă dm situat la distanța x de axă. Momentul de inerție al acestui element de masă este

$$\mathrm{d}I=\mathrm{d}m\cdot x^2=\frac{m}{l}\,\mathrm{d}x\cdot x^2,\quad\left(\mathrm{d}m=\frac{m}{l}\,\mathrm{d}x\right). \tag{1}$$

Integrăm:

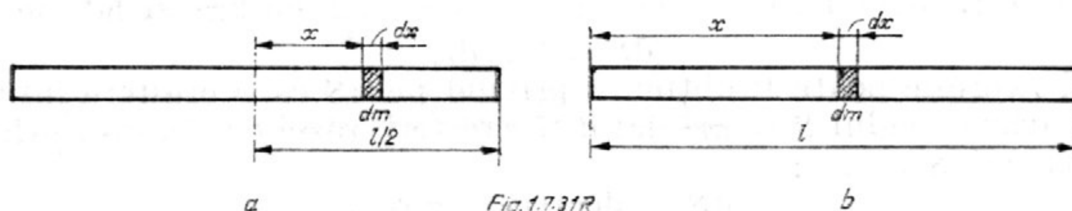


Fig. 1.7.31R

a) Faţă de axa centrală:

$$I_{\upsilon} = \int dI = \int_{-l/2}^{l/2} \frac{m}{l} x^2 dx = \frac{m}{l} \frac{x^3}{3} \Bigg|_{-l/2}^{l/2} = \frac{m}{3l} 2 \frac{l^3}{8} = \frac{1}{12} ml^2. \quad (2)$$

b) Faţă de axa marginală:

$$I = \int dI = \int_0^l \frac{m}{l} x^2 \, dx = \frac{m}{l} \frac{x^3}{3} \Bigg|_0^l = \frac{1}{3} ml^2. \quad (3)$$

Teorema lui Steiner (vd. Breviarul) se verifică imediat:

$$I = I_{\upsilon} + m \cdot \left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{12} ml^2 + \frac{1}{4} ml^2 = \frac{1}{3} ml^2.$$

** **1.7.32.** a) $I_x = \int dm \cdot y^2,\ I_y = \int dm \cdot x^2,\ I_z = \int dm(x^2 + y^2).$ (1)

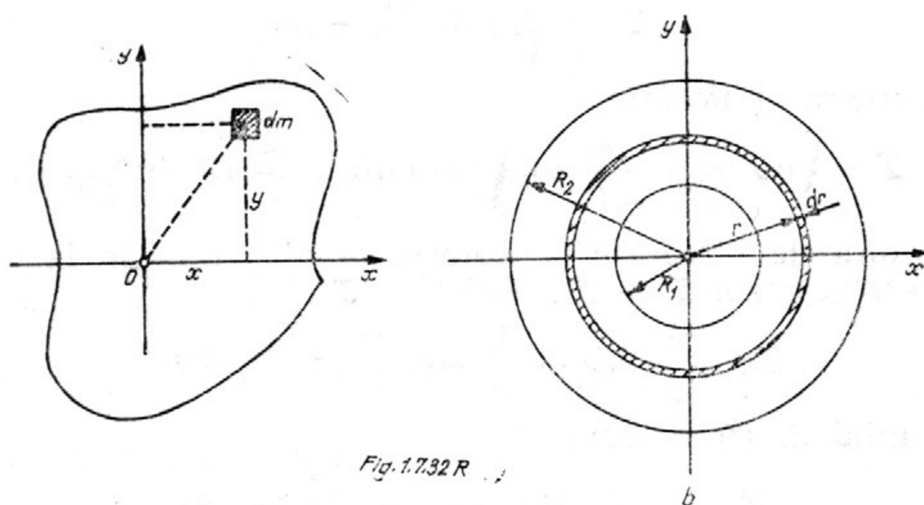


Fig. 1.7.32 R

Se vede imediat că:

$$I_z = \int dm \cdot x^2 + \int dm \cdot y^2 = I_y + I_x. \quad (2)$$

b) Din caza simetriei momentul de inerţie faţă de *oricare* diametru este acelaşi, deci $I_x = I_y$, dar $I_x + I_y = I_z$, rezultă

$$I_x = I_y = \frac{1}{2} I_z. \quad (3)$$

Să calculăm pe I_z. Pentru aceasta vom profita de simetria circulară a figurii plane. Alegem la distanţa r de centru o coroană circulară elementară, infinit de subţire (ca un fir) de grosime dr. Foate punctele materiale ale acestei coroane infinitezimale au aceeaşi distanţă r faţă de axa Oz, deci momentul de inerţie al acestei coroane elementare va fi

$$dI_z = dm \cdot r^2, \quad (4)$$

unde dm este masa coroanei elementare. Să calculăm aria acestei coroane, care poate fi privită ca o bandă (fâşie) de lungime $2\pi r$ şi lăţime dr:

$$dS = 2\pi \, r dr. \quad (5)$$

Aceeaşi expresie poate fi obţinută privind pe dS ca o creştere infinitezimală a ariei cercului $S = \pi r^2$ datorită creşterii razei cu dr, deci prin diferenţierea lui $S = \pi r^2$:

$$dS = d(\pi r^2) = 2\pi \, r dr.$$

În sfîrșit putem privi pe $\mathrm{d}S$ ca diferența dintre aria cercului de rază $r + \mathrm{d}r$ și aria cercului de rază r :

$$\mathrm{d}S = \pi(r + \mathrm{d}r)^2 - \pi r^2 = 2\pi r\mathrm{d}r + \pi(\mathrm{d}r)^2 \to 2\pi r\mathrm{d}r,$$

deoarece ultimul termen cu $(\mathrm{d}r)^2$ dispare *față* de primul termen $\mathrm{d}r$, fiind un infinit mic de ordin superior.
Acum exprimăm pe $\mathrm{d}m$:

$$\mathrm{d}m = \frac{m}{\pi(R_2^2 - R_1^2)}\mathrm{d}S = \frac{m}{\pi(R_2^2 - R_1^2)} 2\pi r\mathrm{d}r. \tag{6}$$

Integrăm (4) :

$$I_z = \int \mathrm{d}m \cdot r^2 = \int_{R_1}^{R_2} \frac{m}{\pi(R_2^2 - R_1^2)} 2\pi\, r\mathrm{d}r \cdot r^2 = \frac{m}{\pi(R_2^2 - R_1^2)} 2\pi \left.\frac{r^4}{4}\right|_{R_1}^{R_2} =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{m}{R_2^2 - R_1^2}(R_2^4 - R_1^4) = \frac{1}{2} m(R_1^2 + R_2^2), \tag{6}$$

apoi

$$I_x = I_y = \frac{1}{2} I_z = \frac{1}{4} m(R_2^2 + R_2^2). \tag{7}$$

Cazuri particulare : inel *subțire* omogen (cerc de butoi) de masă m și rază $R = R_1 = R_2$:

$$I_x = I_y = \frac{1}{2} mR^2,\ I_z = mR^2. \tag{8}$$

Expresia lui I_z de aici este evidentă, deoarece toate punctele materiale sînt la aceeași distanță R de axa Oz.

Disc subțire omogen de rază $R = R_2$, $R_1 = 0$:

$$I_x = I_y = \frac{1}{4} mR^2,\ I_z = \frac{1}{2} mR^2. \tag{9}$$

** **1.7.33.** Față de axa Oy figura se descompune în două tije subțiri de lungime a, paralele cu axa Ox plus două tije subțiri de lungime b paralele cu Oy. Momentul de inerție este o mărime *aditivă*, adică

$$I = \int_{V_1+V_2} \mathrm{d}mR^2 = \int_{V_1} \mathrm{d}mR^2 + \int_{V_2} \mathrm{d}mR^2 = I_1 + I_2. \tag{1}$$

Știind că pentru o tijă subțire omogenă de masă m și lungime l, față de axa sa centrală transversală : $I = \frac{1}{12} ml^2$ (vd. problena **1.7.31**), rezultă pentru cadrul nostru :

$$I_y = 2 \cdot \frac{1}{12} \frac{m}{2(a + b)} a \cdot a^2 + 2 \cdot \frac{m}{2(a + b)} b \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{1}{12} m \frac{a^2(a + 3b)}{a + b}. \tag{2}$$

Schimbînd a cu b, rezultă

$$I_x = \frac{1}{12} m \frac{b^2(b + 3a)}{a + b}. \tag{3}$$

Fiind figură plană (vd. problema 1.7.32) :

$$I_z = I_x + I_y = \frac{1}{12} m(a + b)^2. \tag{4}$$

În cazul pătratului ($a = b$):

$$I_x = I_y = \frac{1}{6} ma^2, \; I_z = \frac{1}{3} ma^2. \qquad (5)$$

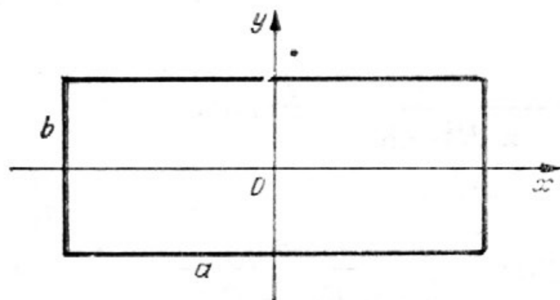


Fig. 1.7.33R

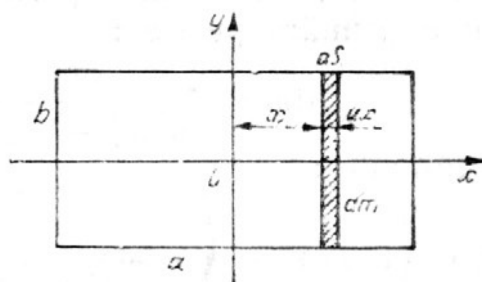


Fig. 1.7.34R

** **1.7.34.** Să calculăm momentul de inerţie faţă de axa Oy din figură. Alegem elementul de masă $\mathrm{d}m$ sub forma unei fâşii infinit de subţiri de grosime $\mathrm{d}x$ situată la distanţa x de axa Oy : $\mathrm{d}S = b\mathrm{d}x$,

$$\mathrm{d}m = \frac{m}{ab} \mathrm{d}S = \frac{m}{ab} b\mathrm{d}x = \frac{m}{a} \mathrm{d}x. \qquad (1)$$

Atunci

$$I_y = \int \mathrm{d}m x^2 = \int_{-a/2}^{a/2} \frac{m}{a} x^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{3} \frac{m}{a} x^3 \Big|_{-a/2}^{a/2} = \frac{1}{12} ma^2. \qquad (2)$$

Rezultatul se putea scrie dintr-o dată dacă cunoaştem momentul de inerţie al unei tije subţiri (vd. problema 1.7.31). În adevăr, faţă de axa Oy avem un sistem de tije subţiri de lungime a situate paralel cu axa Ox.
Analog,

$$I_x = \frac{1}{12} mb^2. \qquad (3)$$

Cunoscînd de la problema 1.7.32 că pentru o figură (placă) plană : $I_x + I_y = I_z$, găsim faţă de Oz (perpendiculară pe placă):

$$I_z = \frac{1}{12} m(a^2 + b^2). \qquad (4)$$

** **1.7.35.** Vom folosi rezultatul de la problema precedentă. În raport cu axa Oz paralelipipedul apare ca o sumă de plăci subţiri, paralele cu Oxy, avînd momentul de inerţie

$$\mathrm{d}I_z = \frac{1}{12} \mathrm{d}m(a^2 + b^2), \text{ deci}$$

$$I_z = \int \mathrm{d}I_z = \frac{1}{12} (a^2 + b^2) \int \mathrm{d}m = \frac{1}{12} m(a^2 + b^2). \qquad (1)$$

Permutînd a, b, c, găsim evident :

$$I_x = \frac{1}{12} m(b^2 + c^2), \; I_y = \frac{1}{12} m(c^2 + a^2). \qquad (2)$$

În particular pentru un cub :

$$I_x = I_y = I_z = \frac{1}{6} ma^2, \qquad (3)$$

pentru o placă subţire dreptunghiulară a, b, $c = 0$:

$$I_x = \frac{1}{12} mb^2,\ I_y = \frac{1}{12} ma^2,\ I_z = \frac{1}{12} m(a^2 + b^2) \tag{4}$$

şi pentru o tijă subţire omogenă a, $b = 0$, $c = 0$:

$$I_x = 0,\ I_y = I_z = \frac{1}{12} ma^2. \tag{5}$$

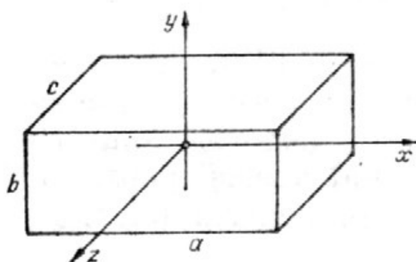


Fig. 1.7.35R

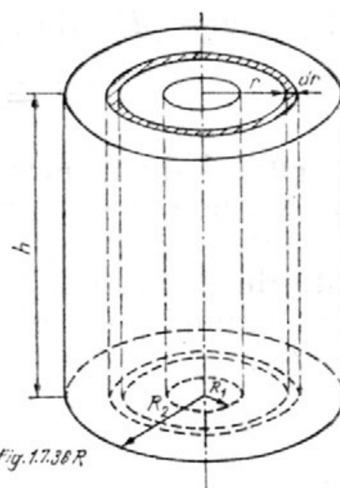


Fig. 1.7.36R

** **1.7.36.** Profităm de simetria cilindrică şi vom alege o pătură cilindrică elementară, infinit de subţire (ca o foiţă cilindrică) de rază r şi grosime dr. Toate particulele acestei pături infinitezimale sînt la aceeaşi distanţă r de axă, deaceea momentul de inerţie al acestei pături elementare de masă dm va fi : $\mathrm{d}I = \mathrm{d}m \cdot r^2$.

Să calculăm volumul dV al păturii elementare, care poate fi privită ca o pătură infinit de subţire de arie $2\pi\, rh$ şi grosime dr :

$$\mathrm{d}V = 2\pi\, rh\mathrm{d}r. \tag{1}$$

Acelaşi rezultat se poate obţine considerînd pătura infinitezimală ca o creştere infinit mică a volumului cilindrului de rază r : $V = \pi\, r^2 h$ datorită creşterii infinitezimale a razei sale cu dr, deci se obţine prin diferenţiere :

$$\mathrm{d}V = \mathrm{d}(\pi\, r^2 h) = 2\pi\, rh\mathrm{d}r.$$

În sfîrşit putem considera pătura elementară ca diferenţa dintre volumul cilindrului de rază $r + \mathrm{d}r$ şi volumul cilindrului de rază r :

$$\mathrm{d}V = \pi(r + \mathrm{d}r)^2 h - \pi\, r^2 h = 2\pi\, rh\mathrm{d}r + \pi(\mathrm{d}r)^2 h \to 2\pi\, rh\mathrm{d}r,$$

deoarece termenul cu $(\mathrm{d}r)^2$ este un infinit mic de ordin superior faţă de termenul liniar cu dr şi se anulează.

Integrăm pe volumul păturii cilindrice date (ρ — densitatea) :

$$\mathrm{d}I = \mathrm{d}m \cdot r^2 = \rho \mathrm{d}V\, r^2 = \rho\, 2\pi\, rh\mathrm{d}r \cdot r^2,$$

$$I = \int \mathrm{d}I = \rho\, 2\pi h \int_{R_1}^{R_2} r^3 \mathrm{d}r = \rho\, 2\pi h \frac{1}{4} (R_2^4 - R_1^4). \tag{2}$$

Dar

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{h\pi(R_2^2 - R_1^2)}, \tag{3}$$

deci

$$I = \frac{1}{2} m(R_1^2 + R_2^2). \tag{4}$$

Rezultatul coincide cu cel de la inel sau coroană circulară, fiindcă în adevăr, în raport cu axa sa cilindrul este o suprapunere de inele.

Cazuri particulare : a) Pătură cilindrică omogenă foarte *subţire* de masă m şi rază $R = R_1 = R_2$ (cerc de butoi) :

$$I = mR^2, \tag{5}$$

rezultat evident, deoarece în acest caz toate particulele se află la aceeaşi distanţă R de axă.

b) Cilindru omogen *plin* de masă m şi rază $R = R_2$, $R_1 = 0$:

$$I = \frac{1}{2} mR^2, \tag{6}$$

rezultat identic cu cel de la cerc sau disc plin, deoarece cilindrul plin, în raport cu axa sa, este o suprapunere de cercuri pline sau discuri.

** **1.7.37.** Momentul de inerţie căutat, datorită simetriei sferice, evident, nu depinde de diametrul ales, fiind acelaşi pentru orice diametru. Alegem 3 axe ortogonale cu originea în centrul păturii sferice, atunci faţă de aceste axe :

$$I_x = I_y = I_z = \frac{1}{3}(I_x + I_y + I_z). \tag{1}$$

Distanţele unui element dm, avînd coordonatele (x,y,z) pînă la axele de coordonate sînt respectiv (conform teoremei lui Pitagora) :

$$\sqrt{y^2 + z^2}, \ \sqrt{z^2 + x^2}, \ \sqrt{x^2 + y^2},$$

astfel încît

$$I_x = \int \mathrm{d}m(y^2 + z^2), \ I_y = \int \mathrm{d}m(z^2 + x^2), \ I_z = \int \mathrm{d}m(x^2 + y^2) \tag{2}$$

şi atunci (1) dă

$$I = I_x = I_y = I_z = \frac{1}{3}\int \mathrm{d}m \cdot 2(x^2 + y^2 + z^2) = \frac{2}{3}\int \mathrm{d}m \cdot r^2, \tag{3}$$

unde r este distanţa elementului dm pînă la centrul păturii sferice. Vom profita acum de simetria sferică pentru a alege convenabil elementul de masă dm şi anume sub forma unei pături sferice elementare, infinit de subţiri, de rază r şi grosime dr (ca un balon de săpun) : $\mathrm{d}m = \rho \, \mathrm{d}V$. Volumul acestei pături sferice infinitezimale se poate obţine înmulţind aria sa $4\pi r^2$ cu grosimea dr :

$$\mathrm{d}V = 4\pi \, r^2 \mathrm{d}r. \tag{4}$$

Acelaşi rezultat se obţine privind volumul păturii sferice infinitezimale ca o creştere infinit mică a volumului sferei $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ datorită creşterii razei cu dr, deci prin diferenţiere :

$$\mathrm{d}V = \mathrm{d}\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) = 4\pi r^2 \mathrm{d}r$$

sau ca diferenţă dintre volumul sferei $\frac{4}{3}\pi(r + \mathrm{d}r)^3$ şi al sferei $\frac{4}{3}\pi r^3$:

$$\mathrm{d}V = \frac{4\pi}{3}(r + \mathrm{d}r)^3 - \frac{4\pi}{3}r^3 = 4\pi r^2 \mathrm{d}r + 4\pi r(\mathrm{d}r)^2 + \frac{4}{3}\pi(\mathrm{d}r)^3 \to 4\pi r^2 \mathrm{d}r,$$

deoarece ceilalţi termeni sînt infiniţi mici de ordin superior care se anulează în raport cu termenul liniar cu dr.

Efectuăm integrarea în (2):

$$I = \frac{2}{3}\int \rho \mathrm{d}V\, r^2 = \frac{2}{3}\,\rho \int_{R_1}^{R_2} 4\pi r^4 \mathrm{d}r = \frac{8}{3}\,\pi\rho\,\frac{1}{5}\,(R_2^5 - R_1^5), \tag{5}$$

$$\text{dar } \rho = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi(R_2^3 - R_1^3)}, \text{ deci } I = \frac{2}{5}\,m\,\frac{R_2^5 - R_1^5}{R_2^3 - R_1^3}. \tag{6}$$

Cazuri particulare: Pătura sferică omogenă foarte *subțire* (balon de săpun) de masă m și rază $R = R_1 = R_2$: Descompunem în prealabil diferențele de puteri și simplificăm cu $R_2 - R_1$:

$$I = \frac{2}{5}\,m\,\frac{(R_2 - R_1)(R_2^4 + R_2^3 R_1 + R_2^2 R_1^2 + R_2 R_1^3 + R_1^4)}{(R_2 - R_1)(R_2^2 + R_2 R_1 + R_1^2)}.$$

Acum rezultă imediat ($R_1 = R_2 = R$):

$$I = \frac{2}{3}\,mR^2. \tag{7}$$

Sferă omogenă *plină* de masă m și rază $R = R_2$, $R_1 = 0$:

$$I = \frac{2}{5}\,mR^2. \tag{8}$$

** **1.7.38.** Problema dată reprezintă analogul *unghiular* al cazului *liniar* de la problema **1.2.147**, deaceea urmăriți paralel rezolvările celor două probleme.

Ecuația mișcării de rotație în jurul axei fixe

$$M - M_f = M - k\omega = I\varepsilon = I\,\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}. \tag{1}$$

Cînd se atinge turația limită (maximă) constantă, accelerația unghiulară ε se anulează, adică momentele se echilibrează (M_f egalează pe M):

$$M - k\omega_0 = 0,\; k = \frac{M}{\omega_0} = \frac{M}{2\pi n_0}. \tag{2}$$

Separăm variabilele în (1) și integrăm:

$$\mathrm{d}t = \frac{I\mathrm{d}\omega}{M - k\omega} = \frac{I}{k}\,\frac{\mathrm{d}\omega}{\omega_0 - \omega} = \frac{I}{M}\,\omega_0\,\frac{\mathrm{d}\omega}{\omega_0 - \omega},$$

$$\int \mathrm{d}t = t = \int \frac{I}{M}\,\omega_0\,\frac{\mathrm{d}\omega}{\omega_0 - \omega} = -\frac{I}{M}\,\omega_0[\ln(\omega_0 - \omega) + C],$$

unde constanta de integrare se determină din condiția inițială: la $t = 0$ avem $\omega = 0$: $0 = \ln\omega_0 + C$, $C = -\ln\omega_0 = \ln\frac{1}{\omega_0}$,

$$t = \frac{I}{M}\,\omega_0\,\ln\frac{\omega_0}{\omega_0 - \omega},\quad \omega = \omega_0\,(1 - \mathrm{e}^{-Mt/(I\omega_0)}). \tag{3}$$

Se poate integra și definit:

$$\int_0^t \mathrm{d}t = t = \int_0^\omega \frac{I}{M}\,\omega_0\,\frac{\mathrm{d}\omega}{\omega_0 - \omega} = -\frac{I}{M}\,\omega_0 \ln(\omega_0 - \omega)\Big|_0^\omega = -\frac{I}{M}\,\omega_0 \ln\frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0}.$$

Punînd în (3) $\omega = f\omega_0$, găsim timpul cerut:

$$t = \frac{I}{M}\,\omega_0 \ln \frac{1}{1-f} = 11{,}5 \text{ s.} \tag{4}$$

Continuăm integrarea:

$$\mathrm{d}\theta = \omega \mathrm{d}t, \int \mathrm{d}\theta = \theta = \int \omega_0(1-\mathrm{e}^{-Mt/(I\omega_0)})\mathrm{d}t = \omega_0 t + \frac{I}{M}\,\omega^2_0\, \mathrm{e}^{-Mt/(I\omega_0)} + C',$$

unde constanta C' se determină din condiția inițială: la $t = 0$, avem $\omega = 0$ și $\theta = 0$:

$$0 = \frac{I}{M}\,\omega_0^2 + C',\ C' = -\frac{I}{M}\,\omega_0^2,$$

$$\theta = \omega_0 t + \frac{I}{M}\,\omega_0^2(\mathrm{e}^{-Mt/(I\omega_0)} - 1). \tag{5}$$

Introducînd aici t din (3), obținem:

$$\theta = \frac{I}{M}\,\omega_0^2 \ln \frac{\omega_0}{\omega_0-\omega} - \frac{I}{M}\,\omega_0\omega. \tag{6}$$

Punînd aici $\omega = f\omega_0$, găsim:

$$\theta = 2\pi N = \frac{I}{M}\,\omega_0^2 \left(\ln \frac{1}{1-f} - f\right) = 2\pi \cdot 180 \text{ rad.} \tag{7}$$

Este comod să găsim direct $\theta = \mathrm{f}(\omega)$ în loc de $\theta = \mathrm{f}(t)$. Pentru aceasta înmulțim ecuația (1) cu $\mathrm{d}\theta = \omega \mathrm{d}t$:

$$(M-k\omega)\mathrm{d}\theta = I\,\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}\theta = I\omega\,\mathrm{d}\omega.$$

Separăm variabilele și integrăm:

$$\mathrm{d}\theta = \frac{I\omega \mathrm{d}\omega}{M-k\omega} = \frac{I}{M}\,\omega_0 \frac{\omega \mathrm{d}\omega}{\omega_0-\omega} = \frac{I}{M}\,\omega_0\, \frac{(\omega-\omega_0+\omega_0)\mathrm{d}\omega}{\omega_0-\omega} =$$

$$= \frac{I}{M}\,\omega_0 \left(-\mathrm{d}\omega + \frac{\omega_0 \mathrm{d}\omega}{\omega_0-\omega}\right),$$

$$\int \mathrm{d}\theta = \theta = \int \frac{I}{M}\,\omega_0(-\mathrm{d}\omega) + \int \frac{I}{M}\,\omega_0^2\, \frac{\mathrm{d}\omega}{\omega_0-\omega} =$$

$$= -\frac{I}{M}\,\omega_0\omega - \frac{I}{M}\,\omega_0^2[\ln(\omega_0-\omega) + C''],$$

unde constanta de integrare C'' se determină din condițiile inițiale: la $t = 0$ avem $\omega = 0$ și $\theta = 0$: $0 = \ln \omega_0 + C''$, $C'' = -\ln \omega_0$;

$$\theta = \frac{I}{M}\,\omega_0^2 \ln \frac{\omega_0}{\omega_0-\omega} - \frac{I}{M}\,\omega_0\omega. \tag{6}$$

Putem integra și nedefinit:

$$\int_0^\theta \mathrm{d}\theta = \int_0^\omega \frac{I}{M}\,\omega_0\, \frac{\omega \mathrm{d}\omega}{\omega_0-\omega} = \frac{I}{M}\,\omega_0 \int_0^\omega \left(-\mathrm{d}\omega + \frac{\omega_0 \mathrm{d}\omega}{\omega_0-\omega}\right),$$

$$\theta = \frac{I}{M}\,\omega_0\left(-\omega - \omega_0 \ln \frac{\omega_0-\omega}{\omega_0}\right). \tag{6}$$

Dacă ați urmărit analogia cu problema **1.2.147,** mărimile care se corespund sînt $M \sim F$. $I \sim m$, $\theta \sim x$, $\omega \sim v$, $\varepsilon \sim a$.

** **1.7.39.** a) Alegem elementul de masă dm sub forma unei fâșii infinit de subțiri (ca un fir) așezată la distanța x de axa de rotație și de grosime dx. Atunci momentul de inerție al acestei fâșii este

$$dI = dm \cdot x^2 = \frac{m}{bh} dS \cdot x^2 = \frac{m}{bh} x^2\, h dx = \frac{m}{b} x^2 dx. \qquad (1)$$

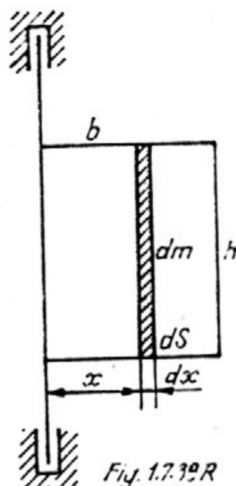


Fig. 1.7.39 R

Prin integrare obținem:

$$\int dI = I = \int_0^b \frac{m}{b} x^2 dx = \frac{1}{3} mb^2 = 16 \text{ g} \cdot \text{m}^2. \qquad (2)$$

Rezultatul se poate obține imediat dacă știm momentul de inerție al unei tije subțiri față de axa transversală de la un capăt (problema **1.7.31**). Atunci placa noastră apare ca un sistem de tije de lungime b așezate paralel cu latura b: $dI = \frac{1}{3} dm \cdot b^2$ și însumînd, găsim

$$I = \int dI = \frac{1}{3} b^2 \int dm = \frac{1}{3} mb^2.$$

b) Forța de rezistență asupra elementului dS:

$$dF_r = -k dS \cdot v^2 = -khdx\omega^2 x^2, \qquad (3)$$

momentul ei față de axa de rotație:

$$dM_r = x dF = -k\omega^2 h x^3 dx. \qquad (4)$$

Prin integrare găsim momentul rezultant:

$$M_r = \int dM_r = -k\omega^2 h \int_0^b x^3 dx = -\frac{1}{4} k\omega^2 h b^4 = -K\omega^2. \qquad (5)$$

Mai departe problema reprezintă analogul *unghiular* al cazului *liniar* din problema **1.2.145.** Urmăriți în paralel rezolvarea acestor două probleme.

Ecuația mișcării de rotație în jurul axei fixe:

$$M = I\varepsilon = I \frac{d\omega}{dt}, \; -K\omega^2 = I \frac{d\omega}{dt}. \qquad (6)$$

Separăm variabilele și integrăm

$$dt = -\frac{I}{K} \frac{d\omega}{\omega^2}, \; \int dt = t = -\int \frac{I}{K} \frac{d\omega}{\omega^2} = \frac{I}{K} \frac{1}{\omega} + C,$$

unde constanta de integrare se determină din condiţia iniţială: la $t = 0$ avem $\omega = \omega_0 = 2\pi n_0$: $0 = \frac{I}{K}\frac{1}{\omega_0} + C$, $C = -\frac{I}{K\omega_0}$,

$$t = \frac{I}{K}(1/\omega - 1/\omega_0), \quad \omega = \frac{1}{1/\omega_0 + Kt/I} \tag{7}$$

sau folosind (2) şi (5):

$$t = \frac{4}{3}\frac{m}{khb^2}\left(\frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega_0}\right), \quad \omega = \frac{1}{1/\omega_0 + \frac{3}{4}khb^2t/m,}, \tag{8}$$

de unde

$$k = \frac{4}{3}\frac{m}{hb^2t}\left(\frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega_0}\right) \tag{9}$$

şi punînd aici condiţia : $t = \tau$, $\omega = \frac{1}{2}\omega_0$, găsim :

$$k = \frac{4m}{3hb^2\tau\omega_0} = \frac{2m}{3\pi hb^2\tau n_0} = 32\ \mathrm{g/m^3}. \tag{10}$$

Putem obţine (8) integrînd definit (limitele de integrare se corespund)

$$\int_0^t \mathrm{d}t = -\frac{I}{K}\int_{\omega_0}^{\omega}\frac{\mathrm{d}\omega}{\omega^2} = \frac{I}{K}\frac{1}{\omega}\Big|_{\omega_0}^{\omega} = \frac{I}{K}\left(\frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega_0}\right).$$

c) Continuăm integrarea:

$$\mathrm{d}\theta = \omega\mathrm{d}t, \int\mathrm{d}\theta = \theta = \int\frac{1}{1/\omega_0 + Kt/I}\mathrm{d}t = \frac{I}{K}[\ln(1/\omega_0 + Kt/I) + C'],$$

unde constanta de integrare C' se determină din condiţia iniţială: la $t = 0$ avem $\omega = \omega_0$ şi $\theta = 0$: $0 = \ln\frac{1}{\omega_0} + C'$, $C' = -\ln\frac{1}{\omega_0} = \ln\omega_0$;

$$\theta = 2\pi N = \frac{I}{K}\ln\frac{1/\omega_0 + Kt/I}{1/\omega_0} = \frac{I}{K}\ln(1/\omega_0 + Kt/I). \tag{11}$$

Folosind (2), (5) şi (10) avem

$$I/K = \omega_0\tau, \tag{12}$$

$$\theta = 2\pi N = \omega_0\tau\ln(1 + t/\tau), \ N = n_0\tau\ln(1 + t/\tau). \tag{13}$$

Punînd $t = \tau$, găsim numărul de rotaţii cerut :

$$N = n_0\tau\ln 2 = 6{,}9 \text{ rot.} \tag{14}$$

Putem obţine rezultatul (14) şi astfel: Inmulţim ecuaţia (6) cu $\mathrm{d}\theta = \omega\,\mathrm{d}t$:

$$-K\omega^2\mathrm{d}\theta = I\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}\theta = I\omega\,\mathrm{d}\omega, \tag{15}$$

separăm variabilele şi integrăm :

$$\mathrm{d}\theta = -\frac{I\mathrm{d}\omega}{K\omega}, \quad \int\mathrm{d}\theta = \theta = -\frac{I}{K}\int\frac{\mathrm{d}\omega}{\omega} = -\frac{I}{K}[\ln\omega + C''],$$

unde constanta de integrare C'' se determină din condiţia iniţială: la $t = 0$ avem $\omega = \omega_0$, $\theta = 0$: $0 = \ln \omega_0 + C''$, $C'' = -\ln \omega_0$;

$$\theta = \frac{I}{K} \ln \frac{\omega_0}{\omega} = \omega_0 \tau \ln \frac{\omega_0}{\omega}, \tag{16}$$

care se poate obţine şi prin integrare definită (limitele de integrare se corespund):

$$\int_0^\theta d\theta = -\frac{I}{K}\int_{\omega_0}^{\omega} \frac{d\omega}{\omega}, \quad \theta = -\frac{I}{K} \ln \frac{\omega}{\omega_0} = \omega_0 \tau \ln \frac{\omega_0}{\omega}.$$

Punînd în (16) condiţia $\omega = \frac{1}{2}\omega_0$, regăsim (9).

** **1.7.40.** a) Să considerăm un element de bară de lungime dx, masă dm, situat la distanţa x de axa de rotaţie. La capetele sale acţionează cele două tensiuni elastice : $-T(x)$, $T(x + dx)$ care dau rezultanta *centrifugă* : $T(x + dx) - T(x) = dT(x)$, atunci lex secunda pentru mişcarea circulară uniformă a elementului dm se scrie :

$$-dT = dm\,\omega^2 x = \frac{m}{l}\, dx\, \omega^2 x, \tag{1}$$

care prin integrare dă

$$dT = T = -\int \frac{m}{l}\omega^2 x\, dx = -\frac{m}{2l}\omega^2[x^2 + C],$$

unde constanta de integrare se determină din condiţia *la margine* : pentru $x = l$ avem $T(l) = 0$: $0 = l^2 + C$, $C = -l^2$;

$$T(x) = \frac{m}{2l}\omega^2(l^2 - x^2). \tag{2}$$

Se putea integra şi definit (limitele de integrare se corespund) :

$$\int_0^T dT = T = -\int_l^x \frac{m}{l}\omega^2 x\, dx = -\frac{m}{2l}\omega^2 x^2 \Big|_l^x = -\frac{m}{2l}\omega^2(x^2 - l^2).$$

Reacţiunea lagărului asupra barei este egală în modul şi de semn opus cu tensiunea elastică de la capătul $x = 0$:

$$R = -T(0) = -\frac{1}{2} m\omega^2 l \tag{3}$$

(acţionează spre lagăr).

b) Fie $u(x)$ deplasarea centrifugă a secţiunii din x, atunci delasarea secţiunii infinit vecine din $v + dx$ va fi evident $u(x + dx)$, iar elementul de bară dx va deveni

$$dx + u(x + dx) - u(x) = dx + du.$$

Alungirea sa relativă va fi $\left(\text{amintim } \varepsilon = \frac{l - l_0}{l_0}\right)$:

$$\varepsilon(x) = \frac{(dx + du) - dx}{dx} = \frac{du}{dx}. \tag{4}$$

Conform legii lui Hooke:

$$\sigma(x) = \frac{T(x)}{S} = E \ \varepsilon(x) = E \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}, \tag{5}$$

separăm variabilele și integrăm:

$$\mathrm{d}u = \frac{1}{ES} T(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{ES}\frac{m}{2l}\omega^2(l^2 - x^2)\,\mathrm{d}x,$$

$$\int \mathrm{d}u = u = \frac{1}{ES}\frac{m}{2l}\omega^2 \int (l^2 - x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{ES}\frac{m}{2l}\omega^2\left(l^2 x - \frac{x^3}{3}\right) + C,$$

unde constanta de integrare se determină din condiția *la margine*: pentru $x = 0$, avem $u(0) = 0$, rezultă $C = 0$,

$$u(x) = \frac{m\omega^2 x}{2ESl}\left(l^2 - \frac{x^2}{3}\right). \tag{6}$$

Alungirea totală a barei se obține imediat:

$$\Delta l = u(l) = m\omega^2 l^2/(3ES), \tag{7}$$

ea reprezintă 2/3 din alungirea statică pe care ar producc-o forța de reacțiune R:

$$\Delta l = \frac{2}{3}\left[\frac{1}{2} m\omega^2 l \cdot l\right] : (ES).$$

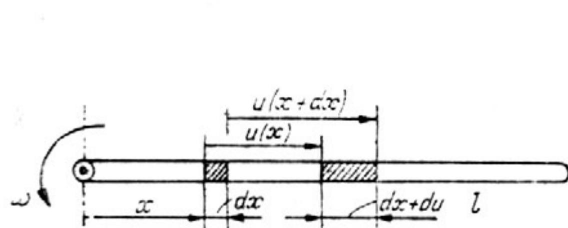


Fig. 1.7.40R

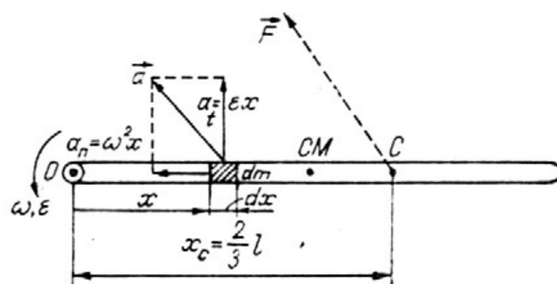


Fig. 1.7.41R

** **1.7.41.** Știm că rezultanta forțelor aplicate unui corp este egală cu masa corpului înmulțită cu accelerația centrului de masă CM (ca și cum masa corpului ar fi concentrată în CM). Centrul de masă are o mișcare circulară neuniformă, de aceea accelerația sa tangențială și cea normală sînt:

$$a_t = \varepsilon x_{\mathrm{cm}} = \varepsilon\frac{l}{2}, \quad a_n = \omega^2 x_{\mathrm{cm}} = \omega^2\frac{l}{2}. \tag{1}$$

Prin urmare, rezultanta forțelor aplicate are o componentă perpendiculară pe tijă și o componentă de-a lungul tijei centripet:

$$\vec{F}(F_t, F_n),\ F_t = \frac{1}{2} m\varepsilon l,\ F_n = \frac{1}{2} m\omega^2 l,$$

$$F = \sqrt{F_t^2 + F^2} = \frac{1}{2} ml\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}. \tag{2}$$

Deși valoarea (mărimea) forței rezultante este exact ca și cum toată masa corpului ar fi concentrată în CM, punctul de aplicație al acestei rezultante *nu este în CM*!

Descompunem corpul în puncte materiale (particule). Asupra unei par-

ticule oarecare m_k acţionează forţe externe $\vec{F}_k$ şi forţe interne $\vec{\mathscr{F}}_k$ din partea celorlalte particule din sistem. Lex secunda se scrie:

$$\vec{F}_k + \vec{\mathscr{F}}_k = m_k\vec{a}_k,\ k = 1,2,3,\ \ldots . \tag{3}$$

dacă sumăm membru cu membru toate ecuaţiile (3) găsim

$$\sum_k \vec{F}_k + \sum_k \vec{\mathscr{F}}_k = \sum_k m_k\vec{a}_k, \tag{4}$$

dar *rezultanta forţelor interne, ca şi momentul rezultant al forţelor interne faţă de orice pol, sînt nule*:

$$\sum_k \vec{\mathscr{F}}_k = 0,\ \sum_k \vec{r}_k \times \vec{\mathscr{F}}_k = 0. \tag{5}$$

Pe de altă parte, vectorul de poziţie al centrului de masă

$$\vec{r}_{\text{cm}} = \frac{1}{m}\sum m_k\vec{r}_k \tag{6}$$

derivat fiind de două ori dă:

$$\dot{\vec{r}}_{\text{cm}} = \vec{v}_{\text{cm}} = \frac{1}{m}\sum m_k\dot{\vec{r}}_k = \frac{1}{m}\sum m_k\vec{v}_k, \tag{7}$$

$$\dot{\vec{v}}_{\text{cm}} = \vec{a}_{\text{cm}} = \frac{1}{m}\sum m_k\dot{\vec{v}}_k = \frac{1}{m}\sum m_k\vec{a}_k,$$

astfel încît ecuaţia (4) devine:

$$\sum \vec{F}_k = \vec{F} = \sum m_k\vec{a}_k = m\vec{a}_{\text{cm}}, \tag{8}$$

adică am găsit rezultatul binecunoscut.

Să construim acum momentul forţelor înmulţind ecuaţia (3) *vectorial în stînga* cu vectorul de poziţie $\vec{r}_k$:

$$\vec{r}_k \times \vec{F}_k + \vec{r}_k \times \vec{\mathscr{F}}_k = \vec{r}_k \times m_k\vec{a}_k,$$

sumăm aceste ecuaţii membru cu membru, ţinînd seama de (5):

$$\sum \vec{r}_k \times \vec{F}_k = \vec{M} = \sum \vec{r}_k \times m_k\vec{a}_k. \tag{9}$$

În cazul distribuţiei *continue* a masei în locul particulei m_k va sta elementul de masă dm cu vectorul său de poziţie $\vec{r}$ şi în locul sumei vom avea o integrală:

$$\vec{M} = \int \vec{r} \times \vec{a}\,\mathrm{d}m. \tag{10}$$

Să aplicăm ultima ecuaţie în cazul nostru. Luăm un element de masă $\mathrm{d}m = \frac{m}{l}\mathrm{d}x$ la distanţa x de axă, el are o mişcare circulară neuniformă cu acceleraţia tangenţală şi cea normală:

$$a_t = \varepsilon x,\ a_n = \omega^2 x. \tag{11}$$

Vom lua momentele faţă de articulaţia O. Forţele normale (centripete) d$m\,\omega^2 x$ nu dau moment faţă de O (braţ nul), iar cele tangenţiale dau un moment vertical, perpendicular pe planul orizontal al mişcării. Toate aceste momente elementare se însumează deci *algebric* pentru a da momentul rezultant al forţelor aplicate:

$$M = \int x\,\mathrm{d}m\,a_t = \int_0^l \frac{m}{l}\,\varepsilon x^2\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\,m\varepsilon l^2. \tag{12}$$

Pe de altă parte, notînd cu x_c coordonata punctului de aplicaţie al rezultantei forţelor aplicate, trebuie ca momentul acestei rezultante să fie identic cu (12):

$$F_t \cdot x_c = M, \quad \frac{1}{2} m\varepsilon l \cdot x_c = \frac{1}{3} m\varepsilon l^2, \quad x_c = \frac{2}{3} l. \tag{13}$$

Acest punct de aplicaţie a rezultantei forţelor aplicate se cheamă *centrul de oscilaţie* (are proprietăţi interesante).

** **1.7.42.** Descompunem corpul într-un sistem de puncte materiale (particule) de mase m_k, $k = 1,2,3, \ldots$ Asupra fiecărei particule m_k acţionează în general forţe externe $\vec{F}_k$ şi forţe interne $\vec{\mathscr{F}}_k$ din partea celorlalte particule din sistem. Forţele interne de interacţie între particulele sistemului sînt totdeauna perechi: acţiunea şi reacţiunea (lex tertia), deaceea rezultanta lor şi momentul rezultant faţă de orice pol, sînt nule:

$$\sum_k \vec{\mathscr{F}}_k = 0, \quad \sum_k \vec{r}_k \times \vec{\mathscr{F}}_k = 0. \tag{1}$$

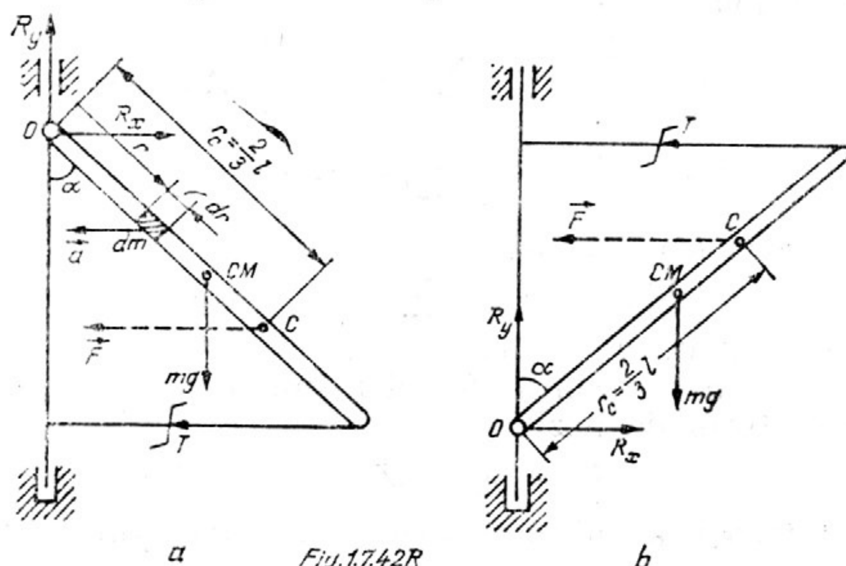


Fig.1.7.42R

Scriem lex secunda pentru fiecare particulă:

$$\vec{F}_k + \vec{\mathscr{F}}_k = m_k \vec{a}_k, \quad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{2}$$

Sumăm membru cu membru aceste ecuaţii:

$$\sum \vec{F}_k + \sum \vec{\mathscr{F}}_k = \sum m_k \vec{a}_k \text{ sau } \sum \vec{F}_k = \vec{F} = m\vec{a}_{\text{cm}}, \tag{3}$$

fiindcă

$$\vec{r}_{\text{cm}} = \frac{1}{m} \sum m_k \vec{r}_k, \quad \dot{\vec{r}}_{\text{cm}} = \vec{v}_{\text{cm}} = \frac{1}{m} \sum m_k \dot{\vec{r}}_k = \frac{1}{m} \sum m_k \vec{v}_k,$$

$$\dot{\vec{v}}_{\text{cm}} = \vec{a}_{\text{cm}} = \frac{1}{m} \sum m_k \dot{\vec{v}}_k = \frac{1}{m} m_k \vec{a}_k. \tag{4}$$

Am găsit rezultatul cunoscut (3).

Să considerăm acum momentul forţelor faţă de un pol arbitrar. Pentru aceasta înmulţim *vectorial la stînga* fiecare ecuaţie (2) cu $\vec{r}_k$ şi sumăm ecuaţiile obţinute membru cu membru:

$$\sum_k \vec{r}_k \times \vec{F}_k + \sum_k \vec{r}_k \times \vec{\mathscr{F}}_k = \sum_k \vec{r}_k \times m_k \vec{a}_k \text{ sau } \sum_k \vec{r}_k \times \vec{F}_k =$$

$$= \vec{M} = \sum_k \vec{r}_k \times m_k \vec{a}_k. \tag{5}$$

În cazul distribuției continue a masei punctul material (particula) m_k devine elementul de masă dm cu accelerația sa $\vec{a}$ și vectorul său de poziție $\vec{r}$ (fără indici), iar suma discretă trece în suma continuă, adică în integrală:

$$\vec{M} = \int \vec{r} \times \vec{a} \, dm. \tag{6}$$

Vom aplica relațiile (3) și (6) în cazul problemei noastre.

a) Luăm un element de masă $dm = \frac{m}{l} dr$ la distanța r de articulație; acesta are o mișcare circulară uniformă cu accelerația centripetă $a = \omega^2 r \sin\alpha$. Vom aplica relația (6) față de articulație (amintim că articulația ideală nu dă moment). Momentele elementare $\vec{r} \times \vec{a} dm$ sînt toate perpendiculare pe desen (spre desen), deaceea se însumează algebric:

$$dM = r a dm \cos\alpha = r\omega^2 r \sin\alpha \cos\alpha \frac{m}{l} dr,$$

$$M = \int dM = \frac{m}{l} \omega^2 \sin\alpha \cos\alpha \int_0^l r^2 dr = \frac{1}{3} m l^2 \omega^2 \sin\alpha \cos\alpha. \tag{7}$$

Relația (3) dă:

$$F_x = m a_{cmx} = -m\omega^2 \frac{1}{2} l \sin\alpha, \; F_y = -m a_{cmy} = 0. \tag{8}$$

Punctul de aplicație al rezultantei (8) se poate obține din condiția ca momentul ei față de orice pol să fie egal cu (6). Notînd cu r_c distanța acestui punct pînă la articulație și alegînd polul în articulație, momentul rezultantei (8) trebuie să fie egal cu momentul (7):

$$|F_x| \cdot r_c \cos\alpha = M, \; \frac{1}{2} m\omega^2 l \sin\alpha \cdot r_c \cos\alpha = \frac{1}{3} m\omega^2 l^2 \sin\alpha \cos\alpha,$$

$$r_c = \frac{2}{3} l. \tag{9}$$

Prin urmare, deși rezultanta forțelor externe aplicate este $\vec{F} = m\vec{a}_{cm}$, ca și cum masa corpului ar fi concentrată în CM, totuși punctul de aplicație al rezultantei este în *centrul de oscilație* (9) (rezultat cunoscut).

Pe de altă parte, asupra tijei acționează 3 forțe externe: $\vec{R}$, $m\vec{g}$ și $\vec{T}$. Rezultanta acestor forțe și momentul rezultant al acestor forțe față de articulație sînt:

$$F_x = R_x - T, \; F = R_y - mg, \tag{10}$$

$$M = mg \frac{l}{2} \sin\alpha + Tl \cos\alpha. \tag{11}$$

Egalînd aceste expresii cu (8), (7), avem:

$$M = mg \frac{l}{2} \sin\alpha + T \, l \cos\alpha = \frac{1}{3} m l^2 \omega^2 \sin\alpha \cos\alpha,$$

de unde rezultă

$$T = mg \operatorname{tg}\alpha \left(\frac{1}{3g} \omega^2 l \cos\alpha - \frac{1}{2} \right). \tag{12}$$

Deoarece $T \geqslant 0$ (tensiunea într-un *fir* nu poate fi negativă), tija va sta depărtată de axa verticală numai dacă

$$\omega^2 > \frac{3}{2} \frac{g}{l \cos \alpha} = \omega_m^2, \tag{13}$$

deci va începe să se depărteze de axa verticală numai dacă

$$\omega > \sqrt{\frac{3g}{2l}} = \omega_c. \tag{14}$$

Mai departe, dacă $\omega \geqslant \omega_m$:

$$R_x = T - \frac{1}{2} m\omega^2 l \sin \alpha = -\frac{1}{2} mg \operatorname{tg} \alpha \left(\frac{1}{3g} \omega^2 l \cos \alpha + 1 \right),$$
$$R_y = mg. \tag{15}$$

În cazul limită $\omega = \omega_m$:

$$T = 0, \ R_x = -\frac{3}{4} mg \operatorname{tg} \alpha, \ (\omega = \omega_m). \tag{16}$$

Dacă $\omega \leqslant \omega_c = \sqrt{3g/(2l)}$, bara nu deviază :

$$T = 0, \ R_x = 0, \ R_y = mg, \ (\omega \leqslant \omega_c). \tag{17}$$

Pentru $\omega_c < \omega < \omega_m$ bara va devia cu un unghi $\theta < \alpha$ dat de $T = 0$:

$$\cos \theta = \frac{3g}{2\omega^2 l}, \ T = 0, \ R_x = -\frac{1}{2} m\omega^2 l \sin\theta, \ R_y = mg. \tag{18}$$

b) În baza rezultatelor precedente, rezultanta forțelor externe aplicate este $\vec{F} = m\vec{a}_{cm}$ (8) :

$$F_x = -\frac{1}{2} m\omega^2 l \sin\alpha, \ F_y = 0 \tag{8}$$

cu punctul de aplicație în centrul de oscilație $r_c = \frac{2}{3} l$.

Momentul forțelor externe față de articulație trebuie să fie (7) :

$$M = \frac{1}{3} m\omega^2 l^2 \sin \alpha \cos\alpha. \tag{7}$$

Pe de altă parte, asupra tijei acționează 3 forțe : $m\vec{g}$, $\vec{R}$ și $\vec{T}$, rezultanta lor și momentul lor trebuie să fie egale cu (8), (7) de mai sus :

$$R_x - T = F_x = -\frac{1}{2} m\omega^2 l \sin\alpha, \ R_y - mg = F_y = 0 \ ; \tag{19}$$

$$Tl \cos\alpha - mg \frac{1}{2} l \sin\alpha = M = \frac{1}{3} m\omega^2 l^2 \sin \alpha \cos \alpha. \tag{20}$$

De aici rezultă :

$$T = mg \operatorname{tg}\alpha \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3g} \omega^2 l \cos \alpha \right), \tag{21}$$

$$R_x = \frac{1}{2} mg \operatorname{tg}\alpha \left(1 - \frac{1}{3g} \omega^2 l \cos \alpha \right), \ R_y = mg. \tag{22}$$

La turații mici avem $R_x > 0$, bara împinge asupra articulației, dar la turații $\omega > \sqrt{3g/(l \cos\alpha)}$, avem $R_x < 0$ și bara trage de articulație.

** **1.7.43.** Întrucît rezultanta forțelor *interne* și momentul rezultant al forțelor *interne* față de orice pol sînt nule, rezultă în virtutea principiului II că rezultanta $\vec{F}$ și momentul rezultant $\vec{M}$ al forțelor *externe* aplicate sînt :

$$\vec{F} = \int \vec{a}\,\mathrm{d}m = m\vec{a}_{\mathrm{cm}}, \tag{1}$$

$$\vec{M} = \int \vec{r} \times \vec{a}\,\mathrm{d}m. \tag{2}$$

În cazul problemei noastre rezultanta forțelor externe aplicate :

$$F_r = -m\omega^2 R_0,\ F_\theta = m\varepsilon R_0,\ F = \sqrt{F_r^2 + F_\theta^2} = mR_0\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}, \tag{3}$$

înclinată cu unghiul α față de raza vectoare :

$$\operatorname{tg}\alpha = F_\theta / F_r = -\frac{\varepsilon}{\omega^2}. \tag{4}$$

Deși *mărimea* forței rezultante este exact ca și cum masa plăcii ar fi concentrată în CM, totuși *punctul de aplicație* al acestei rezultante nu este în CM (ci în centrul de oscilație). Fie R_c distanța de la axa de rotație pînă la punctul de aplicație al rezultantei. Pentru a afla momentul rezultant al forțelor externe aplicate, vom folosi ecuația (2). Alegem polul în punctul O al axei de rotație. Atunci toate momentele elementare $\mathrm{d}\vec{M} = \vec{r} \times \vec{a}\,\mathrm{d}m$ sînt perpendiculare pe placă și se însumează algebric :

$$M = \int r\cdot a_t\,\mathrm{d}m = \int r\varepsilon r\mathrm{d}m = \varepsilon\int r^2\mathrm{d}m = I\varepsilon, \tag{5}$$

unde I este momentul de inerție al plăcii *față de axa de rotație*. Am regăsit ecuația cunoscută pentru mișcarea de rotație în jurul axei fixe. Egalăm momentul rezultantei (3) cu (5) :

$$M = F_\theta\cdot R_c = I\varepsilon,\ R_c = \frac{I\varepsilon}{F_\theta} = \frac{I}{mR_0}. \tag{6}$$

Cine cunoaște teoria pendulului fizic, recunoaște în (6) lungimea *redusă* a pendulului fizic față de axa de rotație, iar C este *centrul de oscilație*. Aplicînd teorema lui Steiner :

$$I = I_0 + mR_0^2, \tag{7}$$

putem scrie :

$$R_c = \frac{I_0}{mR_0} + R_0, \tag{8}$$

deci centrul de oscilație C se află mai departe de axa de oscilație O decît CM.

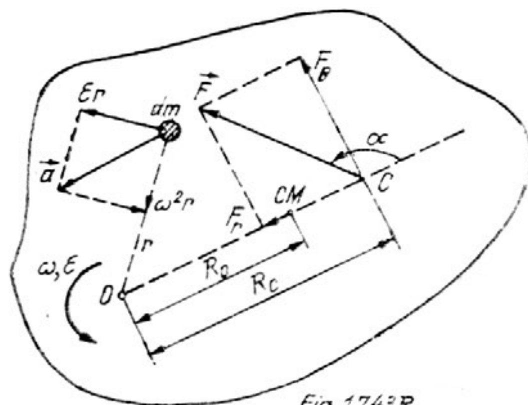


Fig. 1.7.43R

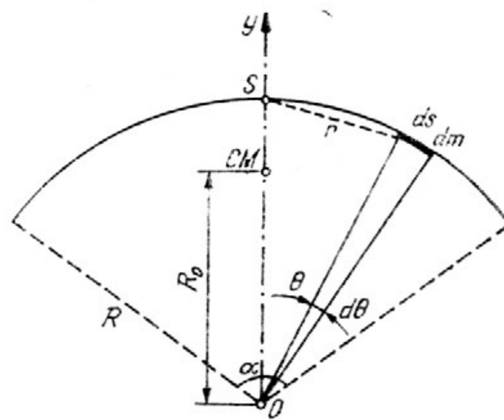


Fig. 1.7.44R

** **1.7.44.** Să găsim poziţia centrului de masă CM:

$$R_0 = \frac{1}{m}\int y\mathrm{d}m = \frac{1}{m}\int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} R\cos\theta\frac{m}{\alpha}\mathrm{d}\theta = \frac{R}{\alpha}\sin\theta\Big|_{-\alpha/2}^{\alpha/2} = \frac{2R}{\alpha}\sin\frac{\alpha}{2}. \quad (1)$$

Calculăm momentul de inerţie faţă de axa de suspensie din S:

$$I = \int r^2\mathrm{d}m = \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2}\left(2R\sin\frac{\theta}{2}\right)^2\frac{m}{\alpha}\mathrm{d}\theta = \frac{4m}{\alpha}R^2\int_{-\alpha/2}^{\alpha/2}\sin^2\frac{\theta}{2}\mathrm{d}\theta =$$

$$= \frac{2m}{\alpha}R^2\int_{-\alpha/2}^{\alpha/2}(1-\cos\theta)\mathrm{d}\theta = 2mR^2\left(1-\frac{2}{\alpha}\sin\frac{\alpha}{2}\right). \quad (2)$$

Dealtfel, în cazul nostru putem afla I (2) cunoscînd (1) şi aplicînd de două ori teorema lui Steiner:

$$\text{faţă de } S:\ I = I_0 + m(R-R_0)^2,$$
$$\text{faţă de } O:\ mR^2 = I_0 + mR_0^2,$$

de unde

$$I = m(R^2 - R_0^2) + m(R-R_0)^2 = 2mR(R-R_0) =$$
$$= 2mR^2\left(1-\frac{2}{\alpha}\sin\frac{\alpha}{2}\right).$$

Perioada micilor oscilaţii ale unui pendul fizic este

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgR_{cm}}}, \quad (3)$$

unde I este momentul de inerţie al corpului faţă de axa de oscilaţie şi R_{cm} — distanţa CM pînă la axa de oscilaţie. În cazul nostru:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mg(R-R_0)}} = 2\pi\sqrt{\frac{2R}{g}}, \quad (4)$$

deci independentă de lungimea arcului de cerc, lungimea redusă a acestui pendul fizic fiind $l_r = 2R$ şi centrul de oscilaţie fiind deci în punctul diametral opus lui S.

(*) **1.7.45.**

$$T = 2\pi\sqrt{I/(mgx)}, \quad (1)$$

dar conform teoremei lui Steiner:

$$I = I_0 + mx^2, \quad (2)$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_0}{mgx} + \frac{x}{g}}. \quad (3)$$

Condiţia de extremum pentru T este anularea derivatei $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}$.

Putem anula derivata expresiei de sub radical:

$$-\frac{I_0}{mgx^2} + \frac{1}{g} = 0, \text{ de unde } x_m = \sqrt{I_0/m}, \quad (4)$$

$$T_m = \pi\sqrt{\frac{2}{g}}\sqrt[4]{\frac{I_0}{m}}. \quad (5)$$

Dealtfel sub radical avem suma a doi termeni al căror produs este constant, atunci suma este minimă cînd termenii sînt egali:

$$I_0/(mgx) = x/g, \quad x_m = \sqrt{I_0/m}.$$

Rezultatul este valabil pentru orice pendul fizic: există o distanţă x_m (4) pînă la CM, pentru care perioada este minimă (5).
În cazul barei:

$$I_0 = \frac{1}{12} ml^2 \tag{6}$$

şi atunci

$$x_m = \frac{\sqrt{3}}{6} l, \quad T_m = 2\pi \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{3g} l}. \tag{7}$$

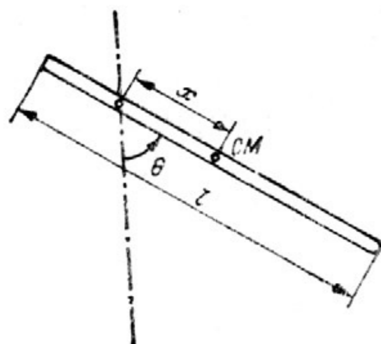


Fig. 1.7.45R

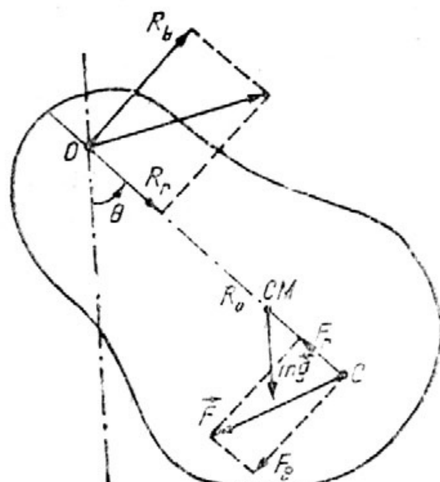


Fig. 1.7.46R

* **1.7.46.** a) Conservarea energiei cinetice şi potenţiale dă:

$$mgh = \frac{1}{2} I\omega^2, \; h = R_0(\cos\theta - \cos\alpha),$$

de unde

$$\omega^2 = \frac{2}{I} mgR_0(\cos\theta - \cos\alpha). \tag{1}$$

Prin derivare în raport cu *timpul*:

$$2\omega\dot{\omega} = \frac{2}{I} mgR_0(-\sin\theta \cdot \dot{\theta}), \quad \text{dar} \quad \dot{\omega} = \varepsilon, \; \dot{\theta} = \omega,$$

$$\varepsilon = -\frac{1}{I} mgR_0 \sin\theta. \tag{2}$$

b) Rezultanta forţelor externe aplicate pendulului:

$$\vec{F} = m\vec{a}_{cm}, \; F_r = ma_n = -m\omega^2 R_0 = -\frac{2}{I} gm^2R_0^2(\cos\theta - \cos\alpha),$$

$$F_\theta = ma_t = m\varepsilon R_0 = -\frac{1}{I} gm^2R_0^2 \sin\theta. \tag{3}$$

Această forţă rezultantă *nu* are punctul de aplicaţie în CM! deşi valoarea ei este aceeaşi ca şi cum masa corpului ar fi concentrată în CM. Pe de altă parte pendulul este supus la două forţe externe: greutatea $m\vec{g}$ şi

forța de reacțiune a axei $\vec{R}(R_r, R_\theta)$. Identificînd rezultanta acestora cu (3) găsim

$$mg\cos\theta + R_r = F_r = -\frac{2}{I}gm^2R_0^2(\cos\theta - \cos\alpha),$$

$$-mg\sin\theta + R_\theta = F_\theta = -\frac{1}{I}gm^2R_0^2\sin\theta,$$

de unde

$$R_r = -mg\cos\theta - \frac{2}{I}gm^2R_0^2(\cos\theta - \cos\alpha) < 0,$$

$$R_\theta = mg\sin\theta - \frac{1}{I}gm^2R_0^2\sin\theta = mg\sin\theta(1 - mR_0^2/I) \geqslant 0, \tag{4}$$

deoarece conform teoremei lui Steiner $I = I_0 + mR_0^2$ și deci $I \geqslant mR_0^2$. Reciproc, asupra axului de suspensie pendulul va acționa cu forțele $-R_r$ și $-R_\theta$, deci trage radial de axă și apasă transversal pe axă. În general, axa de suspensie va reacționa și cu un cuplu (moment) asupra pendulului și reciproc pendulul va acționa asupra axei cu un cuplu de moment opus.

c)
$$I_0 = \frac{1}{12}ml^2, \quad I = \frac{1}{3}ml^2, \quad R_0 = \frac{1}{2}l, \tag{5}$$

$$\omega^2 = \frac{3g}{l}(\cos\theta - \cos\alpha), \qquad \varepsilon = -\frac{3g}{2l}\sin\theta, \tag{6}$$

$$R_r = -\frac{1}{2}mg(5\cos\theta - 3\cos\alpha), \quad R_\theta = \frac{1}{4}mg\sin\theta. \tag{7}$$

** **1.7.47.** Asupra barei acționează două forțe externe $\vec{G}$ și $\vec{N}$ a căror rezultantă :

$$\vec{G} + \vec{N} = m\vec{a}_{cm}, \quad -G + N = ma_{cm}. \tag{1}$$

Mișcarea de rotație în jurul CM :

$$M = N\frac{l}{2}\cos\theta = I\varepsilon = \frac{1}{12}ml^2\varepsilon. \tag{2}$$

Nu avem forțe orizontale, CM va coborî pe verticală :

$$y_{cm} = \frac{l}{2}\sin\theta, \quad v_{cm} = \dot{y}_{cm} = \frac{l}{2}\cos\theta\cdot\dot{\theta} = -\frac{l}{2}\omega\cos\theta, \quad \dot{\theta} = -\omega,$$

$$a_{cm} = \dot{v}_{cm} = \ddot{y}_{cm} = -\frac{l}{2}(\dot{\omega}\cos\theta - \omega\sin\theta\cdot\dot{\theta}) = -\frac{l}{2}(\omega^2\sin\theta + \varepsilon\cos\theta). \tag{3}$$

a) Pentru momentul *inițial* : $\omega = 0$ și ecuațiile (1), (2) dau

$$-G + N_0 = ma_{cm0} = -\frac{1}{2}ml\varepsilon_0\cos\alpha,$$

$$N_0\frac{l}{2}\cos\alpha = \frac{1}{12}ml^2\varepsilon_0,$$

de unde

$$N_0 = \frac{G}{1 + 3\cos^2\alpha} \quad \text{sau} \quad \vec{N}_0 = -\frac{\vec{G}}{1 + 3\cos^2\alpha},$$

$$\varepsilon_0 = \frac{6G\cos\alpha}{ml\,(1 + 3\cos^2\alpha)}. \tag{4}$$

Forța de apăsare asupra podelei va fi deci $\vec{G} : (1 + 3\cos\alpha)$.

b) $$\vec{G} + \vec{N}_0 = m\vec{a}_{cm0},\ \vec{a}_{cm0} = \vec{g} : [1 + 1/(3\cos^2\alpha)]. \tag{5}$$

c) $$\varepsilon_0 = \frac{6g\cos\alpha}{l(1 + 3\cos^2\alpha)}. \tag{6}$$

d) CM coboară pe verticală după axa Oy, atunci coordonatele capătului superior B sînt :

$$x = -\frac{l}{2}\cos\theta, \quad y = l\sin\theta, \quad \frac{x^2}{(l/2)^2} + \frac{y^2}{l^2} = 1, \tag{7}$$

elipsă cu semiaxele $l/2$ și l.

e) Din (1) și (3) avem

$$N = G + ma_{cm} = G - \frac{1}{2}ml(\omega^2\sin\theta + \varepsilon\cos\theta),$$

iar din (2) $$N = \frac{1}{6}\frac{ml\varepsilon}{\cos\theta},$$

astfel încît rezultă

$$\varepsilon\left(\frac{ml}{6\cos\theta} + \frac{ml}{2}\cos\theta\right) + \frac{1}{2}ml\sin\theta\omega^2 = G$$

sau $$\dot{\omega}\left(\cos^2\theta + \frac{1}{3}\right) + \omega^2\sin\theta\cos\theta = \frac{2G}{ml}\cos\theta. \tag{8}$$

Să transformăm această ecuație într-una mai simplă. Înmulțim peste tot cu $2\omega\,dt = -2d\theta$ și ținem seama că $\omega\cos\theta\,dt = -\cos\theta\,d\theta = -d\sin\theta$:

$$2\omega d\omega\left(\frac{4}{3} - \sin^2\theta\right) - 2\omega^2\sin\theta\,d\sin\theta = -\frac{4G}{ml}d\sin\theta$$

sau

$$d\left(\omega^2\left(\frac{4}{3} - \sin^2\theta\right)\right] = -\frac{4G}{ml}d\sin\theta.$$

Variabilele s-au separat. Integrăm :

$$\int d\left[\omega^2\left(\frac{4}{3} - \sin^2\theta\right)\right] = -\frac{4G}{ml}\int d\sin\theta,$$

$$\omega^2\left(\frac{4}{3} - \sin^2\theta\right) = -\frac{4G}{ml}\sin\theta + C, \tag{9}$$

unde constanta de integrare se determină din condiția inițială :

$$\text{la } t = 0,\ \theta = \alpha,\ \omega = 0 : 0 = -\frac{4G}{ml}\sin\alpha + C,\ C = \frac{4G}{ml}\sin\alpha,$$

$$\omega^2 = \frac{12G(\sin\alpha - \sin\theta)}{ml(4 - 3\sin^2\theta)}. \tag{10}$$

** **1.7.48.** Centrul de masă descrie un arc de cerc de rază $l/2$. Rezultanta forţelor externe $\vec{F} = m\vec{a}_{cm}$ dă pe direcţia centripetă şi tangenţială :

$$(mg - N_1)\sin\theta - N_2\cos\theta = m\omega^2\frac{l}{2}, \quad (1)$$

$$(mg - N_1)\cos\theta + N_2\sin\theta = m\varepsilon\frac{l}{2}. \quad (2)$$

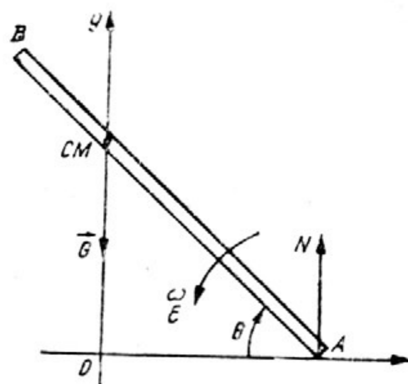


Fig. 1.7.47 P

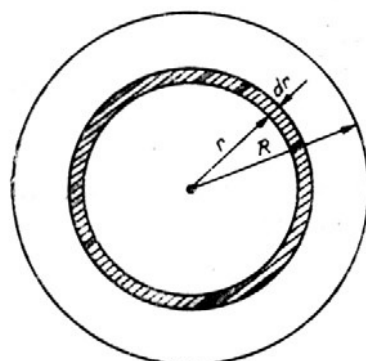


Fig. 1.7.49 R

Ecuaţia mişcării de rotaţie în jurul CM :

$$N_1\frac{l}{2}\cos\theta - N_2\frac{l}{2}\sin\theta = I\varepsilon = \frac{1}{12}ml^2\varepsilon. \quad (3)$$

Din ecuaţiile (2) şi (3) rezultă imediat acceleraţia unghiulară :

$$\varepsilon = \frac{3}{2}\frac{g}{l}\cos\theta = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega}. \quad (4)$$

Pentru a afla viteza unghiulară ω vom integra ecuaţia (4), dar în prealabil o înmulţim cu 2 ω pentru a putea separa variabilele ($\omega = -\dot{\theta}$) :

$$2\omega d\omega = d(\omega^2) = 3\frac{g}{l}\cos\theta\,\omega dt = \frac{3g}{l}\cos\theta(-d\theta) = -\frac{3g}{l}d\sin\theta.$$

Prin integrare :

$$\int d(\omega^2) = \omega^2 = -\frac{3g}{l}\int d\sin\theta = -\frac{3g}{l}\sin\theta + C,$$

unde constanta de integrare se determină din condiţia iniţială :

la $t = 0$ avem $\theta = \alpha$ şi $\omega = 0$: $0 = -\frac{3g}{l}\sin\alpha + C$, $C = \frac{3g}{l}\sin\alpha$, (5)

$$\omega^2 = \frac{3g}{l}(\sin\alpha - \sin\theta).$$

b) Din ecuaţiile (1) şi (2), ţinînd seama de ε (4) şi ω^2(5), rezultă :

$$N_1 = \frac{1}{4}mg(1 + 9\sin^2\theta - 6\sin\alpha\sin\theta), \quad (6)$$

$$N_2 = \frac{3}{4}mg(3\sin\theta - 2\sin\alpha)\cos\theta. \quad (7)$$

c) Condiţia de desprindere de perete :

$$N_2 = 0 \rightarrow \sin\theta_0 = \frac{2}{3}\sin\alpha. \quad (8)$$

d) În momentul desprinderii (8):

$$N_{20} = 0,\ N_{10} = \frac{1}{4} mg, \quad \vec{N}_{10} = -\frac{1}{4} m\vec{g}, \tag{9}$$

$$m\vec{g} + \vec{N}_{10} = m\vec{a}_{cm0}, \quad \vec{a}_{cm0} = \frac{3}{4}\vec{g}. \tag{10}$$

e) În momentul desprinderii (5) devine:

$$\omega_0^2 = \frac{g}{l}\sin\alpha. \tag{11}$$

Folosind rezultatul (9) al problemei precedente, anume

$$\omega^2\left(\frac{4}{3} - \sin^2\theta\right) = -\frac{4g}{l}\sin\theta + C, \tag{12}$$

determinăm constanta de integrare din condiţia iniţială: pentru $\theta = \theta_0$ (8) avem $\omega = \omega_0$ (11):

$$\frac{g}{l}\sin\alpha\left(\frac{4}{3} - \frac{4}{9}\sin^2\alpha\right) = -\frac{4g}{l}\frac{2}{3}\sin\alpha + C,$$

$$C = \frac{4g}{l}\sin\alpha\left(1 - \frac{1}{9}\sin^2\alpha\right),$$

astfel încît:

$$\omega^2 = \frac{4g}{3l}\,\frac{9(\sin\alpha - \sin\theta) - \sin^3\alpha}{4 - 3\sin^2\theta}. \tag{13}$$

** **1.7.49.** Profităm de simetria circulară a discului şi alegem un element de arie dS sub forma unui inel infinit de subţire, de rază r şi grosime dr, ca în figură. Aria acestui element se poate calcula în trei moduri: dS este aria unei fîşii de lungime $2\pi r$ şi lăţime dr: $\mathrm{d}S = 2\pi r\mathrm{d}r$. Altfel, d$S$ este creşterea infinitezimală a ariei cercului $S = \pi r^2$, datorită creşterii infinitezimale cu dr a razei sale, deci $\mathrm{d}S = \mathrm{d}(\pi r^2) = 2\pi\, r\mathrm{d}r$. În sfîrşit, d$S$ este diferenţa ariilor cercurilor de rază $r + \mathrm{d}r$ şi r: $\mathrm{d}S = \pi(r + \mathrm{d}r)^2 - \pi r^2 \to 2\pi\, r\mathrm{d}r$, (termenul pătratic în dr se anulează faţă de termenul liniar dr). Forţa de greutate fiind repartizată uniform, apăsarea pe aria dS va fi evident $\mathrm{d}N = \frac{mg}{\pi R^2}\mathrm{d}S$. Forţele de frecare din cuprinsul inelului dS au braţul r şi dau momentul rezultant faţă de centrul discului:

$$\mathrm{d}M = \mu\mathrm{d}N\cdot r = \mu\frac{mgr}{\pi R^2}\mathrm{d}S = \mu\frac{mg}{R^2}2\,r^2\mathrm{d}r,$$

integrăm pe tot discul:

$$M = \int\mathrm{d}M = \int_0^R 2\mu\frac{mg}{R^2}r^2\mathrm{d}r = \frac{2}{3}\mu mgR. \tag{1}$$

Acesta este momentul forţelor de frecare, atunci ecuaţia mişcării de rotaţie (uniform încetinită):

$$-M = I\varepsilon \quad \text{sau} \quad -\frac{2}{3}\mu mgR = \frac{1}{2}mR^2\varepsilon, \quad \varepsilon = -\frac{4}{3}\mu g\frac{1}{R}. \tag{2}$$

Timpul pînă la oprire şi unghiul pînă la oprire:

$$t_m = -\frac{\omega_0}{\varepsilon} = \frac{3}{4}\omega_0 R\frac{1}{\mu g}, \tag{3}$$

$$\theta_m = 2\pi N_m = -\frac{\omega_0^2}{2\varepsilon} = \frac{3}{8}\omega_0^2\frac{R}{\mu g}, \tag{4}$$

numărul de rotații pînă la oprire:

$$N_m = \frac{1}{2\pi}\,\theta_m = \frac{3}{16\,\pi}\,\omega_0^2\,\frac{R}{\mu g}. \tag{5}$$

** **1.7.50.** Fie un sistem oarecare. Luăm un element de masă dm care are accelerația $\vec{a}$ și vectorul de poziție $\vec{r}$ față de un pol oarecare. Asupra acestui element acționează forțe externe d$\vec{F}$ din partea corpurilor care *nu* fac parte din sistem și forțe interne d$\vec{\mathcal{F}}$ din partea celorlalte particule *din* sistem. Lex secunda pentru acest element se scrie:

$$\mathrm{d}\vec{F} + \mathrm{d}\vec{\mathcal{F}} = \mathrm{d}m \cdot \vec{a}. \tag{1}$$

Luînd momentele forțelor față de polul ales avem de asemenea:

$$\vec{r} \times \mathrm{d}\vec{F} + \vec{r} \times \mathrm{d}\vec{\mathcal{F}} = \vec{r} \times \vec{a}\cdot \mathrm{d}m. \tag{2}$$

Acum să ne amintim de teorema: rezultanta forțelor *interne* ale unui sistem și momentul rezultant al forțelor *interne* față de orice pol, sînt nule:

$$\int \mathrm{d}\vec{\mathcal{F}} = 0,\ \int \vec{r} \times \mathrm{d}\vec{\mathcal{F}} = 0. \tag{3}$$

Integrăm ecuațiile (1) și (2) ținînd seama de (3):

$$\int \mathrm{d}\vec{F} + \int \mathrm{d}\vec{\mathcal{F}} = \int \vec{a}\,\mathrm{d}m \quad \text{sau} \quad \vec{F} = \int \vec{a}\,\mathrm{d}m,$$

$$\int \vec{r} \times \mathrm{d}\vec{F} + \int \vec{r} \times \mathrm{d}\vec{\mathcal{F}} = \int \vec{r} \times \vec{a}\,\mathrm{d}m \quad \text{sau} \quad \vec{M} = \int \vec{r} \times \vec{a}\,\mathrm{d}m, \tag{4}$$

unde $\vec{F}$ și $\vec{M}$ sînt rezultanta și momentul rezultant al forțelor *externe* aplicate sistemului.

Vectorul de poziție al centrului de masă CM este

$$\vec{r}_{\mathrm{cm}} = \frac{1}{m}\int \vec{r}\,\mathrm{d}m. \tag{5}$$

Prin derivare de două ori, găsim:

$$\dot{\vec{r}}_{\mathrm{cm}} = \vec{v}_{cm} = \frac{1}{m}\int \dot{\vec{r}}\,\mathrm{d}m = \frac{1}{m}\int \vec{v}\,\mathrm{d}m = \frac{\vec{P}}{m},$$

unde $\vec{P}$ este impulsul total al sistemului,

$$\vec{P} = m\vec{v}_{\mathrm{cm}}; \tag{6}$$

$$\ddot{\vec{r}}_{\mathrm{cm}} = \dot{\vec{v}}_{\mathrm{cm}} = \vec{a}_{\mathrm{cm}} = \frac{1}{m}\int \ddot{\vec{r}}\,\mathrm{d}m = \frac{1}{m}\int \dot{\vec{v}}\,\mathrm{d}m = \frac{\dot{\vec{P}}}{m} = \frac{1}{m}\int \vec{a}\,\mathrm{d}m = \frac{\vec{F}}{m},$$

sau

$$\vec{F} = \dot{\vec{P}} = \int \vec{a}\,\mathrm{d}m = m\vec{a}_{\mathrm{cm}}, \tag{7}$$

am regăsit rezultate binecunoscute.

În cazul problemei noastre, asupra tijei acționează două forțe externe: greutatea $m\vec{g}$ în CM și reacțiunea articulației $\vec{R}$ în articulație. CM are o mișcare circulară uniformă, deci are accelerația centripetă:

$$a_{\mathrm{cm}} = \omega^2\,\frac{l}{2}\sin\alpha. \tag{8}$$

Ecuaţia (7) dă

$$R_x = -ma_{cm} = -m\omega^2\frac{l}{2}\sin\alpha,$$
$$R_y - mg = 0, \quad R_y = mg. \tag{9}$$

Să apicăm acum ecuaţia (4). Luăm un element de masă dm, de grosime dr, situat la distanţa r de articulaţie. Acest element are o mişcare circulară uniformă, deci are acceleraţia centripetă $a = \omega^2 r\sin\alpha$. Momentul $\vec{r}\times\vec{a}\,\mathrm{d}m$ este perpendicular pe desen pentru toate elementele barei deci se însumează algebric:

$$M = \int -a\,\mathrm{d}m\,r\cos\alpha, \quad \mathrm{d}m = \frac{m}{l}\mathrm{d}r,$$

(am ales sensul pozitiv pentru momente — sensul trigonometric).

$$M = -\int_0^l \omega^2 r\sin\alpha\frac{m}{l}\mathrm{d}r\cdot r\cos\alpha = -\frac{m}{l}\,\omega^2\sin\alpha\cos\alpha\int_0^l r^2\mathrm{d}r =$$
$$= -\frac{1}{3}\,ml^2\omega^2\sin\alpha\cos\alpha. \tag{10}$$

Acest moment trebuie să fie egal cu momentul forţelor externe $\vec{R}$ şi $m\vec{g}$, dar $\vec{R}$ nu dă moment faţă de articulaţie (are braţul zero), prin urmare:

$$M = -mg\frac{l}{2}\sin\alpha = -\frac{1}{3}\,ml^2\omega^2\sin\alpha\cos\alpha,$$
$$\omega^2 = \frac{3}{2}\,\frac{g}{l\cos\alpha}. \tag{11}$$

Atunci (9) devine:

$$R_x = -\frac{3}{4}\,mg\,\mathrm{tg}\alpha,\ R_y = mg. \tag{12}$$

Se poate observa că deşi rezultanta forţelor externe este $m\vec{a}_{cm}$ ca şi cum toată masa corpului ar fi concentrată în CM, *punctul de aplicaţie* al acestei rezultante *nu* este în CM, ci în *centrul de oscilaţie*, situat în cazul nostru la distanţa $\frac{2}{3}\,l$ de articulaţie (rezultat pe care l-am mai întîlnit şi la alte probleme). În adevăr, fie $C(r_c)$ punctul de aplicaţie al rezultantei. Atunci momentul ei trebuie să fie egal cu M (10):

$$-F\cdot r_c\cos\alpha = -m\omega^2\frac{l}{2}\sin\alpha\cdot r_c\cos\alpha = M = -\frac{1}{3}\,ml^2\omega^2\sin\alpha\cos\alpha,$$
$$r_c = \frac{2}{3}\,l. \tag{13}$$

Din relaţia (11) rezultă că tija va începe să devieze dacă

$$\omega > \sqrt{3g/(2l)}. \tag{14}$$

** **1.7.51.** a) Curba este evident simetrică faţă de verticala care trece prin punctul de minim al curbei. Alegem axele ca în figură. Luăm un ele-

ment de lanț, de masă dm și lungime ds în punctul de coordonate (x, y) Fie $\lambda = m/l$ densitatea liniară a lanțului. Avem

$$\mathrm{d}m = \lambda\ \mathrm{d}s,\ \mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2} = \mathrm{d}x\sqrt{1 + (\mathrm{d}y/\mathrm{d}x)^2} = \mathrm{d}x\sqrt{1 + y'^2}. \quad (1)$$

$$\mathrm{tg}\,\theta = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y',\quad \sin\theta = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}},\quad \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}}. \quad (2)$$

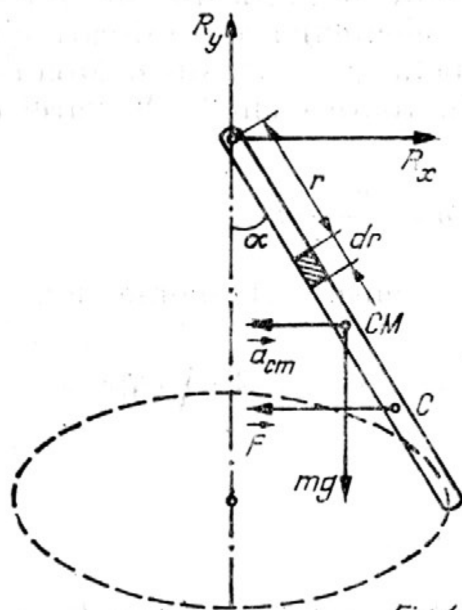


Fig. 1.7.50R

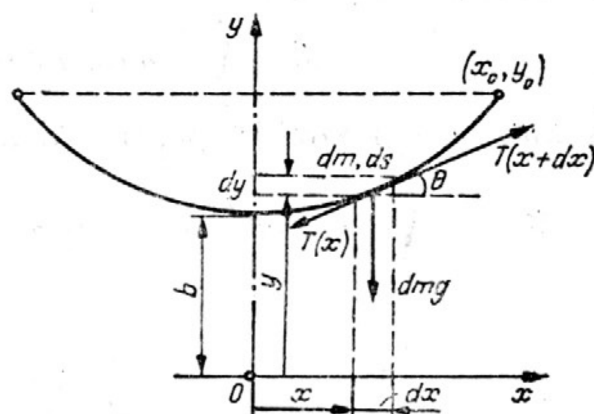


Fig. 1.7.51R

Asupra elementului dm acționează trei forțe: cele două tensiuni de la capetele sale și greutatea sa Scriem condițiile de echilibru pe axe:

$$T(x + \mathrm{d}x)\cos(\theta + \mathrm{d}\theta) - T(x)\cos\theta = 0. \quad (3)$$

$$T(x + \mathrm{d}x)\sin(\theta + \mathrm{d}\theta) - T(x)\sin\theta - \mathrm{d}m\cdot g = 0 \quad (4)$$

Prima ecuație reprezintă creșterea (diferențiala) funcției $T\cos\theta$ și ne spune că această funcție este constantă:

$$T\cos\theta = T\frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}} = C = T_0. \quad (5)$$

Proiecția tensiunii din lanț pe axa orizontală este constantă și egală cu tensiunea din punctul de minim.

A doua ecuație se retranscrie astfel:

$$\mathrm{d}(T\sin\theta) = \mathrm{d}m\cdot g \quad \text{sau} \quad \mathrm{d}\left(T\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}\right) = \lambda g \mathrm{d}s = \lambda g\, \mathrm{d}x\sqrt{1 + y'^2}$$

și ținînd seama de (5) se retranscrie astfel:

$$T_0\mathrm{d}y' = \lambda g\, \mathrm{d}x\sqrt{1 + y'^2}. \quad (6)$$

Notînd $y' = p$, variabilele se separă și putem integra

$$T_0\frac{\mathrm{d}p}{\sqrt{1 + p^2}} = \lambda g\, \mathrm{d}x,\quad T_0\int\frac{\mathrm{d}p}{\sqrt{1 + p^2}} = \lambda g\int \mathrm{d}x,$$
$$T_0 \arg\mathrm{sh}\, p = \lambda g x + C, \quad (7)$$

unde constanta de integrare C se determină din condiția că în punctul de minim $x = 0$ avem $y' = p = 0$, deci $C = 0$, $(\arg\mathrm{sh}\, 0 = 0)$. Rezultă:

$$\arg\mathrm{sh}\, p = \lambda g x/T_0,\ p = y' = \mathrm{sh}(\lambda g x/T_0). \quad (8)$$

Integrăm mai departe:

$$\int \mathrm{d}y = y = \int \mathrm{sh}(\lambda g x/T_0)\, \mathrm{d}x = \frac{T_0}{\lambda g}\mathrm{ch}(\lambda g x/T_0) + C'.$$

Este comod să alegem constanta de integrare $C' = 0$ și să notăm

$$b = T_0/(\lambda g) = T_0 l/G, \tag{9}$$

atunci

$$y = b \operatorname{ch} \frac{x}{b} = \frac{b}{2} (e^{x/b} + e^{-x/b}), \tag{10}$$

această curbă se mai cheamă curba ,,lănțișor'', minimul ei $y_m = b$ (pentru $x = 0$, $\operatorname{ch} 0 = 1$).

b) Tensiunea din lanț se găsește imediat din (5) și (8):

$$T = T_0\sqrt{1 + y'^2} = T_0 \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 \frac{x}{b}} = T_0 \operatorname{ch} \frac{x}{b} = \\ = T_0 \frac{y}{b} = \lambda g y = \frac{G}{l} y. \tag{11}$$

Să calculăm lungimea lanțului:

$$ds = dx\sqrt{1 + y'^2} = dx \cdot \operatorname{ch} \frac{x}{b}, \int ds = s = \int \operatorname{ch} \frac{x}{b} dx = b \operatorname{sh} \frac{x}{b} + C.$$

Dacă măsurăm lungimea arcului de lănțișor de la punctul de minim, atunci pentru $x = 0$ trebuie să avem $s = 0$, deci $C = 0$:

$$s = b \operatorname{sh} \frac{x}{b}. \tag{12}$$

Putem găsi o relaie între coordonatele capetelor lanțului ($\pm x_0$, y_0) și lungimea lanțului l și săgeata f:

$$\frac{l}{2} = b \operatorname{sh} \frac{x_0}{b}, \quad f = y_0 - b = b \operatorname{ch} \frac{x_0}{b} - b. \tag{13}$$

Știind că

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1, \tag{14}$$

găsim:

$$(f + b)^2 - l^2/4 = b^2, \; f^2 + 2fb - l^2/4 = 0, \\ b = \frac{1}{2f} (l^2/4 - f^2) = T_0/(\lambda g). \tag{15}$$

Pe de altă parte tensiunea la capete este:

$$T_c = T_0 \operatorname{ch} \frac{x_0}{b} = T_0 \frac{y_0}{b} = \lambda g y_0 = \frac{m}{l} g y_0 = \frac{G}{l} y_0. \tag{16}$$

Putem exprima pe y_0 prin l și f:

$$y_0^2 = b^2 \operatorname{ch}^2 \frac{x_0}{b} = b^2\left(1 + \operatorname{sh}^2 \frac{x_0}{b}\right) = b^2 \left(1 + \frac{l^2}{4b^2}\right) = b^2 + l^2/4,$$

înlocuind pe b din (15) rezultă

$$y_0 = \frac{1}{2f} (l^2/4 + f^2). \tag{17}$$

Atunci din (9) și (15) găsim

$$T_0 = \frac{bG}{l} = \frac{1}{2fl} (l^2/4 - f^2)G, \quad T_c = \frac{G}{l} y_0 = \frac{1}{2fl} (l^2/4 + f^2)G. \tag{18}$$

c) La limita lunecării verigilor de la capete, avem :

$$T_0 = T_{cx} = \mu T_{cy} = \frac{\mu G}{2}, \quad T_c = \sqrt{T_{cx}^2 + T_{cy}^2} = T_{cy}\sqrt{1 + \mu^2} =$$

$$= T_{cy}/\cos\varphi = G/(2\cos\varphi), \tag{19}$$

$$b = \frac{T_0}{G} l = \frac{\mu l}{2}. \tag{20}$$

Pe de altă parte din (16) și (13) :

$$T_c = \frac{G}{l} y_0 = \frac{G}{l} b \operatorname{ch} \frac{x_0}{b} =$$

$$= \frac{G}{2b \operatorname{sh}(x_0/b)} b \operatorname{ch} \frac{x_0}{b} = \frac{G}{2 \operatorname{th}(x_0/b)} = \frac{G}{2\cos\varphi},$$

de unde

$$\operatorname{th}(x_0/b) = \cos\varphi, \quad x_0/b = \arg\operatorname{th}\cos\varphi. \tag{21}$$

Dar să ne amintim că

$$\arg\operatorname{th} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}, \tag{22}$$

astfel încît, ținînd seama de (20) :

$$x_0 = b\,\frac{1}{2}\ln\frac{1+\cos\varphi}{1-\cos\varphi} = \frac{\mu l}{4}\ln \operatorname{ctg}^2\frac{\varphi}{2} = \frac{\mu l}{2}\ln\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2},$$

de unde rezultă distanța cerută dintre capete :

$$d = 2x_0 = l \operatorname{tg}\varphi \ln\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}.$$

** **1.7.52.** Vom neglija deformarea *transversală* a barei. Să considerăm în absența gravitației și a deformării un element de bară de lungime dx, masă $dm = \frac{m}{l}dx$ situat la distanța x de capătul superior. Datorită greutății secțiunea din x se deplasează cu $u(x)$, iar secțiunea din $x + dx$ se deplasează cu $u\,(x + dx)$ și deci elementul dx va deveni :

$$dx + u(x + dx) - u(x) = dx + du,$$

alungirea sa este du și alungirea relativă :

$$\varepsilon(x) = \frac{du}{dx}. \tag{1}$$

Dar conform legii lui Hooke

$$\sigma(x) = \frac{F}{S_0} = E\,\varepsilon(x), \tag{2}$$

unde $F = T(x)$ este tensiunea din bară în secțiunea x. Este evident că

$$T(x + dx) - T(x) = dT = -\,dm\cdot g = -\frac{m}{l} g\,dx,$$

de unde prin integrare

$$\int dT = T = -\frac{m}{l} g \int dx = -\frac{m}{l} gx + C,$$

unde constanta de integrare se determină din condiţia *la margine*: pentru $x = l$ avem $T(l) = 0: 0 = -\frac{m}{l} gl + C$, $C = mg$,

$$T(x) = mg\left(1 - \frac{x}{l}\right). \tag{3}$$

Legea lui Hooke (2) dă acum:

$$\varepsilon(x) = \frac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{ES_0} T(x) = \frac{1}{ES_0} mg\left(1 - \frac{x}{l}\right), \tag{4}$$

de unde
$$\mathrm{d}u(x) = \frac{1}{ES_0} mg\left(1 - \frac{x}{l}\right)\mathrm{d}x,$$

$$\int \mathrm{d}u = u = \frac{1}{ES_0} mg \int \left(1 - \frac{x}{l}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{ES_0} mg\left(x - \frac{x^2}{2l}\right) + C',$$

unde constanta de integrare C' se determină din condiţia *la margine*: pentru $x = 0$ avem $u(0) = 0$, deci $C' = 0$;

$$u(x) = \frac{mg}{ES_0}\left(x - \frac{x^2}{2l}\right). \tag{5}$$

Alungirea totală se obţine de aici imediat punînd $x = l$:

$$\Delta l = u(l) = \frac{mgl}{2ES_0}, \tag{6}$$

ca şi cum forţa de greutate mg ar acţiona la mijlocul barei în CM şi deci acţionează numai asupra jumătăţii superioare $l/2$ a barei, cea inferioară ieşind din joc.

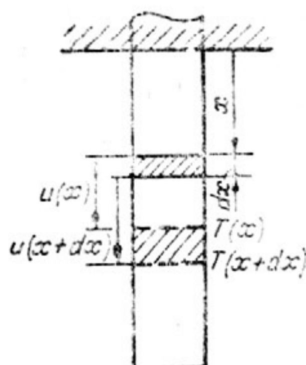


Fig. 1.7.52 R

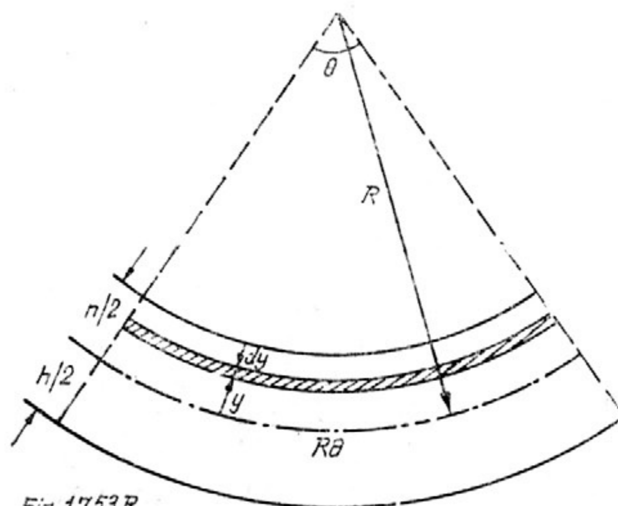


Fig. 1.7.53 R

** **1.7.53.** Să considerăm un strat infinit de subţire de grosime $\mathrm{d}y$ situat la distanţa y de planul median de simetrie. Acest strat suferă alungirea relativă

$$\varepsilon(y) = \frac{(R - y)\,\theta - R\theta}{R\theta} = -\frac{y}{R}, \tag{1}$$

pentru $y > 0$ stratul este comprimat, iar pentru $y < 0$ este alungit. Ştim că lucrul mecanic efectuat la tracţiunea barei raportat la unitatea de volum, egal cu densitatea de energie potenţială de deformare elastică, este

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}V} = \frac{1}{2} E\varepsilon^2. \tag{2}$$

Prin urmare pentru stratul considerat

$$\mathrm{d}W = \frac{1}{2} E\varepsilon^2 \mathrm{d}V = \frac{1}{2} E \frac{y^2}{R^2} lb\,\mathrm{d}y.$$

Integrăm pe tot volumul benzii:

$$\int dW = W = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{1}{2} \frac{E}{R^2} lby^2 dy = \frac{1}{24} \frac{E}{R^2} lbh^3. \quad (3)$$

În particular, dacă curbăm banda într-un cerc complet: $l = 2\pi R$:

$$W = \frac{1}{6} \pi^2 E \frac{1}{l} bh^3. \quad (4)$$

1.8. Mecanica fluidelor

Hidrostatica

1.8.1. La cel tronconic, deoarece prin răsturnare ρgh va crește.
1.8.2. a) Nivelul nu se schimbă, b) nivelul scade.
1.8.3. Se va ridica.
1.8.4. Nivelul apei crește, iar nivelul superior al uleiului scade.
1.8.5. $\Delta p \sim \frac{2}{3} \rho gh \sim 30$ MPa ≈ 300 atm.
1.8.6. $M = \rho h\pi R^2 - m$.
1.8.7. $\Delta h = -F/(S\rho_a g) = -10$ cm (scade).

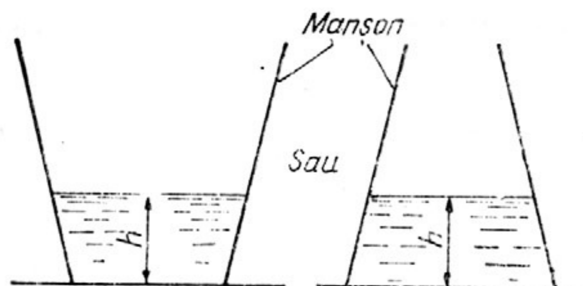


Fig. 1.8.1R

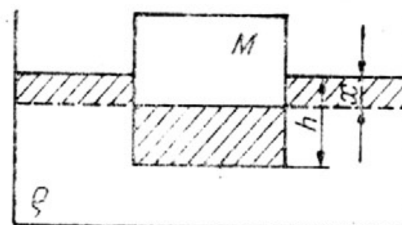


Fig. 1.8.15R

1.8.8. $m = \rho_0 \rho_g Sh : (\rho_0 - \rho_g) = 3{,}5$ kg.
1.8.9. $m = (\rho_a - \rho_g) Sh = 20$ kg.
1.8.10. $\rho = \rho_0(h + d)/d = 1{,}6$ g/cm³.
1.8.11. $\rho_l = \rho_a(G - G_l) : (G - G_a) = 800$ kg/m³.
1.8.12. Nu se schimbă; $F'/F = (g + a)/g$.
1.8.13. $m_b = \rho Va/(g + a) = 7{,}8$ kg.
1.8.14. $F = F_f : (1 - s/S)$.
1.8.15. $x = m/(\rho\pi R^2)$.
1.8.16. $S = \Delta F/(\rho g\Delta h) = 6{,}25$ cm².
1.8.17. $h = (m + m_1)/(2S\rho) = 10$ cm.

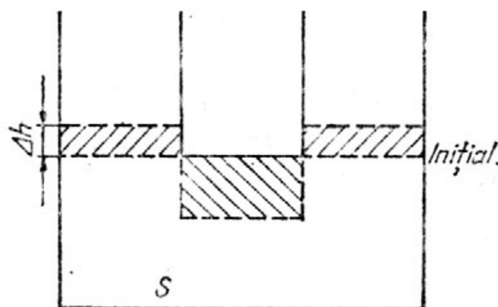


Fig. 1.8.16R

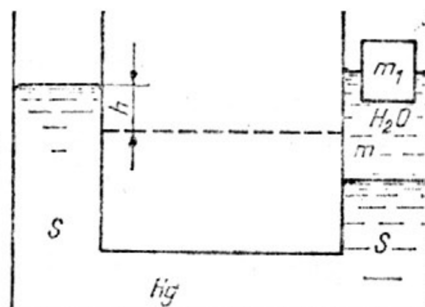


Fig. 1.8.17R

1.8.18. $x = mS_2 : [\rho(S_1 + S_2)S_1] = 0{,}73$ m.
1.8.19. $x = m(S - S_0)/(\rho S S_0)$.

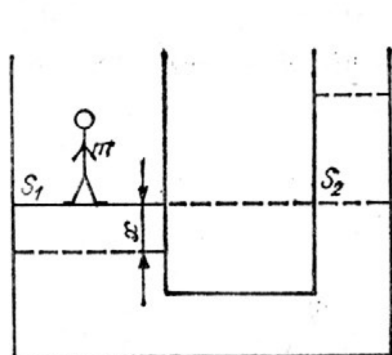


Fig.1.8.18R

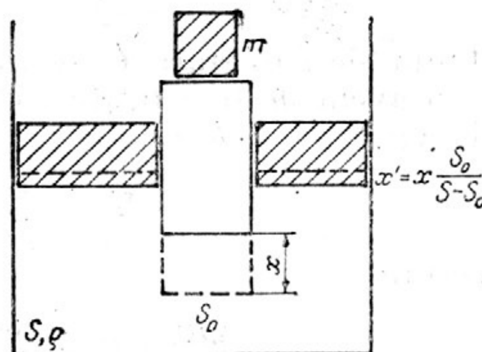


Fig.1.8.19R

1.8.20. $\Delta h = h\rho s/(\rho_0 S)$, manşonul rămîne scufundat la fel în apă.
1.8.21. $H = h(D/d)^2(\rho/\rho_0 - 1) + h = 7{,}7$ cm.

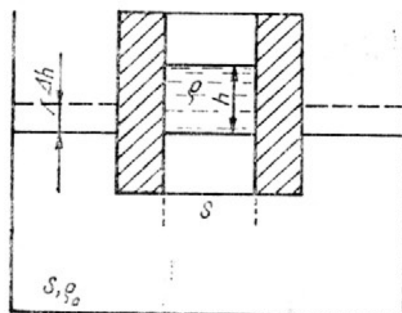


Fig.1.8.20R

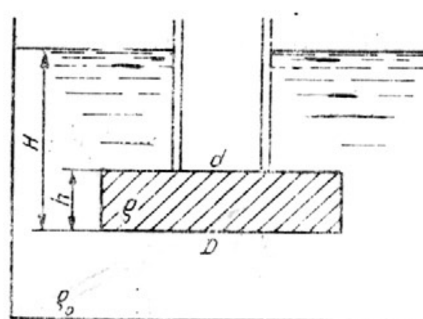


Fig.1.8.21R

1.8.22. $\Delta h = m\Delta\rho : [\rho(\rho + \Delta\rho)S] \approx m\Delta\rho/(\rho^2 S) = 2{,}0$ mm.
1.8.23. $\Delta h = (\rho_1 h_1 - \rho_2 h_2) : \rho_m = 5{,}1$ mm.
1.8.24. $V_1/V = (\rho_2 - \rho) : (\rho_2 - \rho_1)$.
1.8.25. $F = \rho g h S + mg - F_A$.
** **1.8.26.** Fie $\rho = kx^2$. Să luăm un strat infinit de subţire la adîncimea x, de grosime dx, avînd deci masa

$$dm = \rho(x)\,dV = \rho(x) S dx = Skx^2 dx. \tag{1}$$

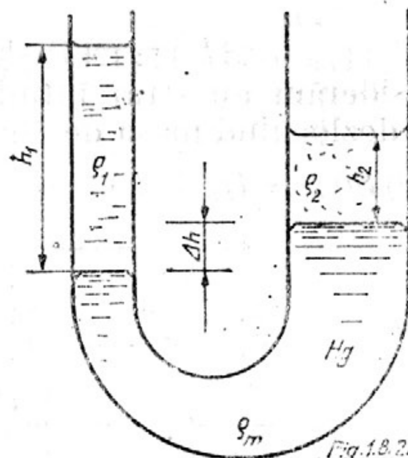


Fig.1.8.23R

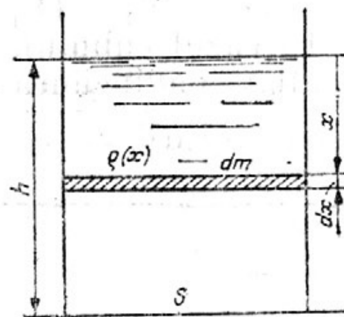


Fig.1.8.26R

Prin integrare găsim masa lichidului pînă la adîncimea x:

$$m(x) = \int_0^x Skx^2 dx = Sk\int_0^x x^2 dx = \frac{1}{3}Skx^3. \tag{2}$$

Se poate integra și nedefinit:

$$m = \int dm = \int Skx^2 dx = \frac{1}{3} Skx^3 + C,$$

unde constanta de integrare C se determină din condiția *la margine*: pentru $x = 0$ avem $m(0) = 0$, deci $C = 0$.
Masa totală va fi $(x = h)$:

$$M = \frac{1}{3} Skh^3. \qquad (3)$$

Condiția cerută:

$$m(h') = \frac{1}{3} Skh'^3 = \frac{M}{2},$$

de unde

$$h' = h/\sqrt[3]{2} = 0{,}79\, h. \qquad (4)$$

1.8.27. a) $x = l\,(1 - \sqrt{1 - \rho/\rho_0}) = 70$ cm, b) $\sin\alpha = h : [l\sqrt{1 - \rho/\rho_0}] = \frac{1}{2}$, $\alpha = 30°$, c) $\mu = \mathrm{tg}\,\alpha = 1/\sqrt{3} = 0{,}58$.

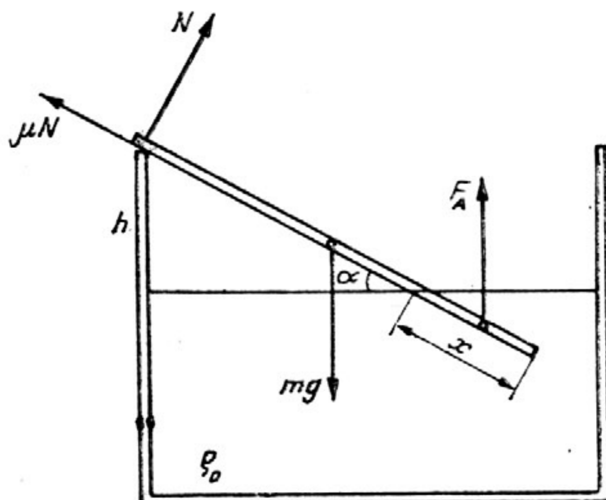
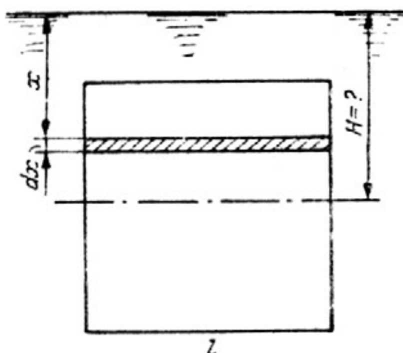
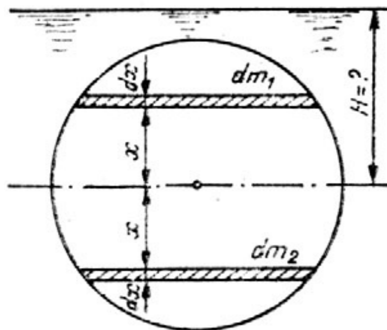


Fig. 1.8.27R

1.8.28. $b_1/b_2 = 1 + (2\rho - \rho_0)\, V/m = 1{,}52$.
1.8.29. $l = [m_1 + m_2 - (V_1 + V_2)(\rho_0 + Ah_1)] : (AV_2) = 12{,}5$ cm.
(**) **1.8.30.** a) În cazul cubului, considerăm un strat infinit de subțire, de grosime dx, aflat la adîncimea x și dezlocuind masa de fluid

$$dm = \rho(x)dV = (\rho_0 + kx)\, S dx = (\rho_0 + kx)\, l^2 dx. \qquad (1)$$





a Fig. 1.8.30R b

Notăm cu H adîncimea la care se află centrul cubului. Integrăm :

$$m = \int \mathrm{d}m = \int_{H-l/2}^{H+l/2} (\rho_0 + kx)\, l^2 \mathrm{d}x = \rho_0 l^2 \cdot x \Big|_{H-l/2}^{H+l/2} + kl^2 \frac{1}{2} x^2 \Big|_{H-l/2}^{H+l/2} =$$

$$= \rho_0 l^2 \cdot l + kl^2 \frac{1}{2} 2Hl = (\rho_0 + kH)V. \quad (2)$$

Masa de fluid dezlocuită fiind egală cu masa cubului, rezultă

$$H = (m - \rho_0 V) : (kV). \quad (3)$$

b) În cazul sferei, vom folosi proprietatea de *simetrie* a sferei, raționamentul de mai jos fiind aplicabil și cubului. Considerăm două straturi infinit de subțiri de grosime $\mathrm{d}x$ așezate *simetric* față de planul ecuatorial al sferei, ca în figură.

$$\mathrm{d}m_1 = [\rho_0 + k(H - x)]\mathrm{d}V,\ \mathrm{d}m_2 = [\rho_0 + k\,(H + x)]\,\mathrm{d}V,$$

$$\mathrm{d}m_1 + \mathrm{d}m_2 = 2(\rho_0 + kH)\,\mathrm{d}V, \quad (4)$$

deci suma celor două mase dezlocuite nu depinde de x și însumîndu-le găsim :

$$m = \int \frac{\mathrm{d}m_1 + \mathrm{d}m_2}{2} = (\rho_0 + kH)\,V, \quad (5)$$

rezultat identic pentru cele două corpuri simetrice :

$$H = (m - \rho_0 V) : (kV). \quad (6)$$

Observăm că și în cazul cubului se poate face evident același raționament. De asemenea, putem lua elemente foarte mici Δm, Δx, etc, și raționametul rămîne valabil, deci problema se poate rezolva și fără calculul diferențial și integral.

* **1.8.31.** Presiunea din dreptul dopului se poate considera ca fiind compusă din presiunea $p_0 = H + \rho gh$ de-a lungul axului cilindrului, plus presiunea inerțială datorită rotației. Considerînd un element $\mathrm{d}m$

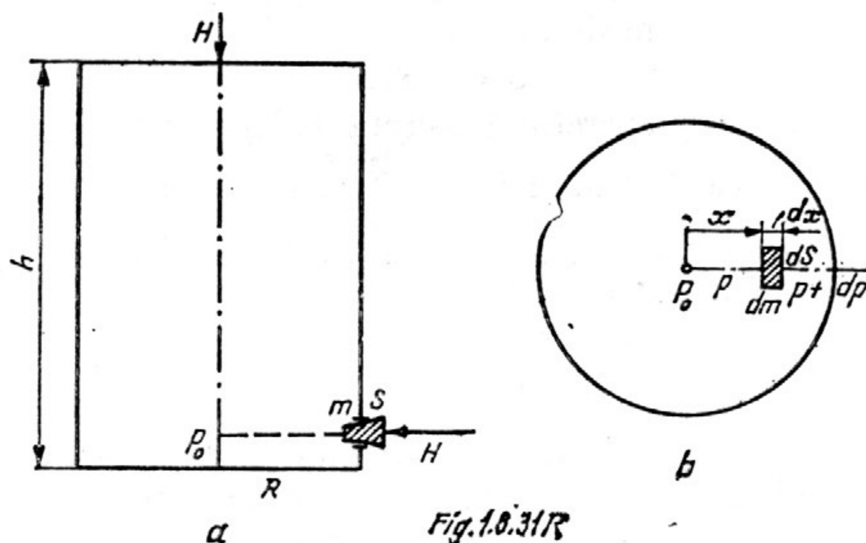


Fig.1.8.31R

ca în figură, avem ecuația principiului II al mecanicii pentru mișcarea circulară, pe direcția radială, centripet :

$$\mathrm{d}F = [(p + \mathrm{d}p) - p]\,\mathrm{d}S = \mathrm{d}m \cdot \omega^2 x = \rho\,\mathrm{d}S\,\mathrm{d}x\,\omega^2 x \ \text{ sau } \ \mathrm{d}p = \rho\omega^2 x\,\mathrm{d}x, \quad (1)$$

de unde prin integrare [limitele de integrare se corespund astfel: $(x = 0, p = p_0), (x, p)$]:

$$\int_{p_0}^{p} \mathrm{d}p = \int_{0}^{x} \rho\omega^2 x \,\mathrm{d}x \text{ sau } p - p_0 = \frac{1}{2} \rho\omega^2 x^2, \tag{2}$$

$$p(x) = H + \rho g h + \frac{1}{2}\rho\omega^2 x^2, \quad p(R) = H + \rho g h + \frac{1}{2} \rho\omega^2 R^2.$$

Se poate integra și nedefinit:

$$p = \int \mathrm{d}p = \int \rho\omega^2 x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \rho\omega^2 x^2 + C,$$

unde constanta de integrare se determină din condiția *la margine*: pentru $x = 0$ avem $p = p_0 = H + \rho g h$, deci $C = p_0$.
Cu cilindrul în repaus avem la limită condiția de echilibru pentru dop:

$$F + (H + \rho g h) S - HS - F_f = 0, \tag{3}$$

unde F_f este forța de frecare. În cazul rotației avem pentru dop:

$$HS + F_f - pS = m\omega^2 R.$$

Eliminînd F_f și înlocuind p, rezultă:

$$n = \frac{1}{2\pi}[F : (mR + S\rho R^2/2)]^{1/2} = 16 \text{rot/s}. \tag{5}$$

1.8.32. $v_0' = v_0\rho_0 : (\rho - \rho_0) = 10{,}0$ m/s.

1.8.33. $p = (p_0 + mg/S)(1 - \Delta h/h) = 90{,}0$ kPa.

Hidrodinamica

1.8.34. $v = \sqrt[3]{2\eta P/(\rho S)} = 6{,}4$ m/s.

1.8.35. $f = \rho Q \dfrac{Q}{S} = 5{,}0$ N.

1.8.36. $P = 8Q^3 : (\pi^2 D^4 \rho^2) + Qgh = 1{,}0 \text{ W} + 49 \text{ W}, \quad P' = Qgh = 49 \text{ W} < P.$

1.8.37. $P'/P = \sqrt{1 - h/H}$; $P''/P = 1 + h/H$.

(*) **1.8.38.** Fie debitul masic al apei

$$Q = \rho S v. \tag{1}$$

Pentru a calcula forța exercitată asupra paletei vom calcula variația de impuls pe unitatea de timp: $F = \left|\dfrac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}\right|$. În timpul $\mathrm{d}t$ masa de apă care ciocnește paleta este $Q\mathrm{d}t$ și variația sa de impuls va fi $Q\,\mathrm{d}t(u - v)$, unde u este viteza liniară periferică a paletei. Prin urmare forța:

$$F = Q(v - u) = Sv(v - u) \tag{2}$$

și puterea

$$P = F \cdot u = Sv(v - u)u. \tag{3}$$

În membrul drept avem produsul a două mărimi a căror sumă este *constantă*, atunci maximul produsului are loc cînd factorii sînt egali:

$$v - u = u, \; u = v/2, \tag{4}$$

deci

$$P_{\max} = \frac{1}{4} \rho S v^3 \text{ pentru turația } n = \frac{1}{2\pi}\frac{v}{2R} = 1{,}00 \text{ rot/s}. \tag{5}$$

Altfel, cu ajutorul derivatelor:

$$P = \text{const. } (v - u)\,u = f(u).$$

condiţia de extremum este anularea derivatei:

$$f'(u) = 0 = \text{const. } (v - 2u), \text{ de unde } u = v/2. \tag{7}$$

Natura extremului este dată de semnul derivatei a doua:

$$f''(u) = Sv(-2) < 0, \tag{8}$$

deci avem un *maxim*. Dealtfel, scriind puterea astfel:

$$P = -\,Svu^2 + Sv^2u = f(u), \tag{9}$$

se vede că puterea este o funcţie pătratică al cărei grafic este o parabolă care are un maxim ($a = -\,Sv < 0$) pentru

$$u = \left[-\frac{b}{2a}\right] = -\frac{Sv^2}{2(-Sv)} = \frac{v}{2}. \tag{10}$$

1.8.39. $a = \rho Qv/m = 1{,}00 \text{ m/s}^2$.

1.8.40. $\eta = 2 : (n + 1)$.

** **1.8.41.** La adîncimea x presiunea hidrostatică a păturii de lichid este $p = \rho gx$ (presiunea atmosferică se compensează de o parte şi de alta). Alegem o arie elementară dS sub forma unei făşii orizontale de lăţime infinitezimală dx, situată la adîncimea x. Pe această fîşie dS presiunea este $p(x) = \rho gx$ şi deci forţa hidrostatică exercitată pe această arie:

$$dF = p(x)\,dS = \rho gxl\,dx. \tag{1}$$

Însumăm aceste forţe elementare, adică integrăm:

$$\int dF = F = \int_0^l \rho glx\,dx = \rho gl\frac{l^2}{2} = \frac{1}{2}\,\rho Vg = \frac{1}{2}\,mg = \frac{G}{2}. \tag{2}$$

Fie x_0 punctul de aplicaţie al acestei rezultante. Trebuie ca momentul rezultantei faţă de orice pol să fie egal cu momentul rezultant al tuturor forţelor elementare de presiune faţă de acelaşi pol. Să luăm momentele faţă de punctul A, atunci momentul elementar dM al forţei dF, adică contribuţia fîşiei dS, va fi:

$$dM = dF\cdot x = \rho gxl\,dx\cdot x = \rho glx^2\,dx. \tag{3}$$

Sumăm (integrăm) toate aceste momente:

$$M = \int dM = \int_0^l \rho glx^2\,dx = \rho gl\cdot\frac{l^3}{3} = G\frac{l}{3} \tag{4}$$

şi egalăm cu momentul forţei rezultante (2):

$$F\cdot x_0 = \frac{G}{2}\cdot x_0 = M = \frac{1}{3}\,Gl,$$

de unde

$$x_0 = \frac{2}{3}\,l, \tag{5}$$

adică punctul de aplicaţie este la adîncimea 2/3 din l, ceea ce era de aşteptat deoarece presiunea creşte liniar cu adîncimea.

** **1.8.42.** Condiţia de plutire:

$$\rho_g SH = \rho_a S(H - h), \text{ de unde } h = H(\rho_a - \rho_g)/\rho_a. \tag{1}$$

În poziția de echilibru, forța de greutate este echilibrată de forța arhimedică inițială, astfel încît dacă blocul este cufundat cu x față de linia de plutire, va apare o forță arhimedică suplimentară $F_A = \rho_a Sxg$ împotriva căreia trebuie efectuat lucrul mecanic. La o cufundare elementară dx se efectuează lucrul mecanic elementar

$$\mathrm{d}L = F_A \mathrm{d}x = \rho_a Sgx\,\mathrm{d}x. \qquad (2)$$

prin integrare obținem lucrul mecanic total:

$$L = \int \mathrm{d}L = \int_0^h \rho_a Sgx\,\mathrm{d}x = \rho_a Sg\frac{h^2}{2} = \frac{1}{2\rho_a} SH^2(\rho_a - \rho_g)^2 g. \qquad (3)$$

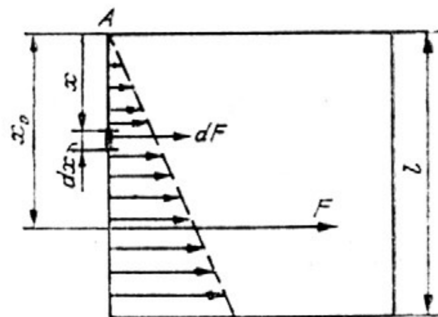


Fig. 1.8.41 R

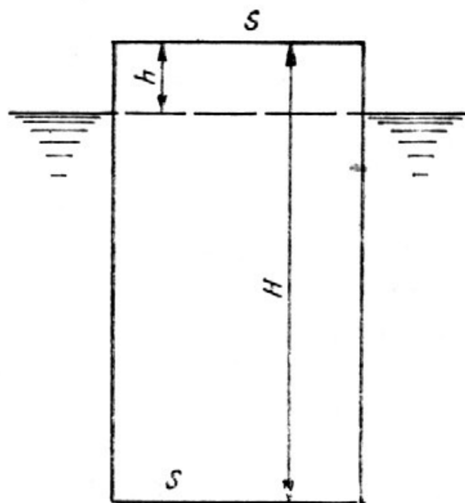


Fig. 1.8.42 R

** **1.8.43.** În regim staționar de rotație a lichidului asupra unui element de lichid de masă dm situat la suprafața liberă a lichidului acționează două forțe: greutatea d$m\cdot\vec{g}$ și reacțiunea normală d$\vec{N}$ din partea lichidului (forțele de frecare sînt neglijabile). Nu poate exista *în regim staționar* o componentă a reacțiunii lichidului, tangentă la suprafața lichidului.

Pe direcția radială:

$$\mathrm{d}m\cdot g\,\mathrm{tg}\,\theta = \mathrm{d}m\omega^2 y, \quad \mathrm{tg}\,\theta = \frac{1}{g}\omega^2 y. \qquad (1)$$

Dar dacă ecuația liniei libere a lichidului din planul Oyz este $z = z(y)$, atunci $\mathrm{tg}\,\theta = \mathrm{d}z/\mathrm{d}y$, deci

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{g}\omega^2 y, \quad \mathrm{d}z = \frac{1}{g}\omega^2 y\,\mathrm{d}y. \qquad (2)$$

Integrăm:

$$\int \mathrm{d}z = z = \int \frac{1}{g}\omega^2 y\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2g}\omega^2 y^2 + C,$$

unde constanta de integrare se determină din condiția *la margine*: pentru $y = 0$, avem $z = h$, deci $C = h$;

$$z = h + \frac{1}{2g}\omega^2 y^2. \qquad (3)$$

Aceasta este o parabolă în planul Oyz și din simetria cilindrică rezultă că suprafața liberă a lichidului este un paraboloid de revoluție cu

axa Oz:

$$z = h + \frac{1}{2g}\omega^2(x^2 + y^2). \tag{4}$$

Presiunea într-un punct oarecare al lichidului (x,y,z) (în afară de presiunea atmosferică) este dată de presiunea hidrostatică a coloanei de lichid de deasupra, deci

$$p(x, y, z) = \rho g\left[h + \frac{1}{2g}\omega^2(x^2 + y^2)\right] - \rho g z = \rho g(h - z) + \frac{1}{2}\rho\omega^2(x^2 + y^2), \tag{5}$$

ceeace reprezintă presiunea $\rho g\,(h-z)$ pe axa de rotaţie la nivelul punctului considerat plus presiunea „forţelor centrifuge":

$$\int \mathrm{d}p = \int_0^r \rho a_c \mathrm{d}r = \int_0^r \rho\omega^2 r\,\mathrm{d}r = \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2 = \frac{1}{2}\rho\omega^2(x^2 + y^2). \tag{6}$$

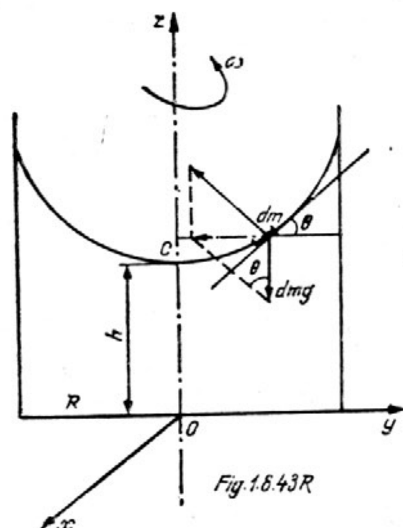


Fig. 1.8.43R

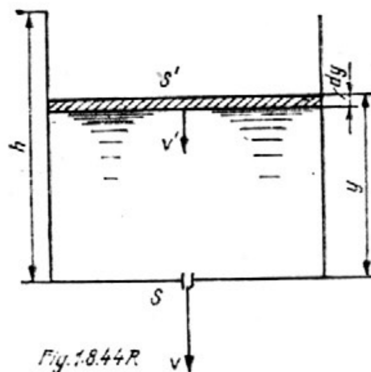


Fig. 1.8.44R

** **1.8.44.** Fie la un moment dat t nivelul lichidului y. După un timp infinit mic dt, deci la momentul $t + \mathrm{d}t$ nivelul lichidului va coborî cu $-\mathrm{d}y$, deci volumul de lichid scurs va fi $S'(-\mathrm{d}y)$. Acest volum se scurge prin orificiul S cu viteza dată de *formula lui Torricelli*:

$$v = \sqrt{2gy} : \sqrt{1 - S^2/S'^2}. \tag{1}$$

Cum debitul volumic este Sv, rezultă imediat:

$$S'(-\mathrm{d}y) = Sv\mathrm{d}t = S\sqrt{2gy}\,\mathrm{d}t : \sqrt{1 - S^2/S'^2}.$$

Separăm variabilele și integrăm:

$$\mathrm{d}t = -\frac{S'}{S}\sqrt{1 - S^2/S'^2}\,\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{2gy}} = -\sqrt{S'^2/S^2 - 1}\sqrt{\frac{2}{g}}\,\frac{\mathrm{d}y}{2\sqrt{y}},$$

$$\int \mathrm{d}t = t = -\sqrt{S'^2/S^2 - 1}\sqrt{\frac{2}{g}}\int\frac{\mathrm{d}y}{2\sqrt{y}} = -\sqrt{S'^2/S^2 - 1}\sqrt{\frac{2}{g}}(\sqrt{y} + C),$$

unde constanta de integrare se determină din condiţia iniţială: la $t = 0$ avem $y = h$, rezultă $C = -\sqrt{h}$, deci

$$t = \sqrt{S'^2/S^2 - 1}\sqrt{\frac{2h}{g}}\left(1 - \sqrt{\frac{y}{h}}\right). \tag{2}$$

Se putea integra și definit (limitele de integrare trebuie să se corespundă):

$$\int_0^t \mathrm{d}t = t = -\sqrt{S'^2/S^2 - 1}\sqrt{\frac{2}{g}}\int_0^y \frac{\mathrm{d}y}{2\sqrt{y}} = -\sqrt{S'^2/S^2 - 1}\sqrt{\frac{2}{g}}(\sqrt{y} - \sqrt{h}).$$

Dacă se scurge o fracțiune f din volum înseamnă că $(h-y)S = fhS$, $y = (1-f)h$, deci

$$t = \sqrt{S'^2/S^2 - 1}\sqrt{\frac{2h}{g}}(1 - \sqrt{1-f}). \tag{3}$$

Dacă $S \ll S'$, formula lui Forricelli se simplifică:

$$v = \sqrt{2gy},\ t = \frac{S'}{S}\sqrt{\frac{2h}{g}}(1 - \sqrt{1-f}). \tag{4}$$

Dacă se scurge întregul volum: $f = 1$.

(*) 1.8.45. Bătaia este

$$b = vt = \sqrt{2g(h-y)}\cdot\sqrt{2y/g} = 2\sqrt{(h-y)y}, \tag{1}$$

unde viteza este dată de formula lui Forricelli. Maximul lui b corespunde maximului cantității de sub radical a cărei derivată

$$h - 2y = 0 \text{ dă condiția } y = h/2,\ b_{\max} = h. \tag{2}$$

Rezultatul se putea obține imediat știind că: dacă suma a doi termeni este constantă, atunci produsul lor este maxim cînd ei sînt egali:

$$h - y = y, \text{ de unde } y = h/2.$$

Forța reactivă se obține calculînd variația de impuls pe unitatea de timp. În timpul $\mathrm{d}t$ iese masa $\mathrm{d}m$ care duce impulsul $\mathrm{d}m\cdot v$, deci forța

$$F = \frac{\mathrm{d}m\cdot v}{\mathrm{d}t} = Q_m v, \left(\text{debitul masic } Q_m = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\right), \tag{3}$$

dar

$$Q_m = \rho S v, \tag{4}$$

prin urmare,

$$F = \rho S v^2 = \rho S\cdot 2g\frac{h}{2} = \rho g h S \tag{5}$$

(corespunzător presiunii hidrostatice pe fundul vasului).
Se putea aplica direct formula lui Meșcerski pentru forța reactivă:

$$\vec{F}_r = \vec{v}_{rel}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t},$$

în cazul nostru (3).

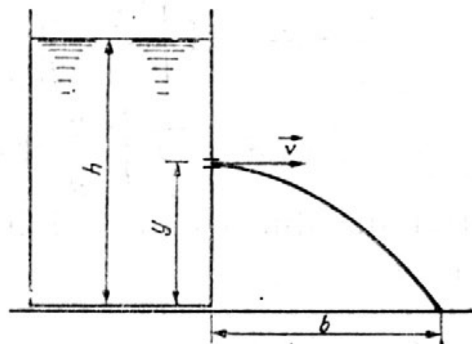


Fig. 1.8.45R

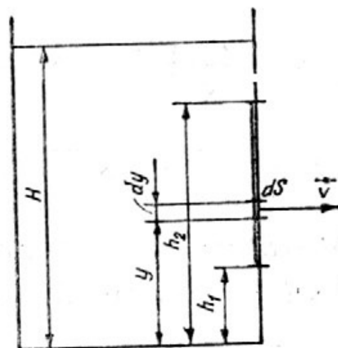


Fig. 1.8.46R

** **1.8.46.** Forța reactivă asupra elementului de arie $dS = bdy$ este dată de variația (pierderea) de impuls prin această arie pe unitatea de timp. În unitatea de timp iese masa de lichid dată de debitul masic $dQ_m = \rho dSv$ care duce cu sine impulsul $dQ_m \cdot v$, deci forța reactivă asupra elementului de arie dS:

$$dF_r = dQ_m \cdot v = \rho d\, Sv^2. \qquad (1)$$

Conform formulei lui Forricelli $v^2 = 2g(H - y)$:

$$dF_r = \rho b\, dy \cdot 2g(H - y). \qquad (2)$$

Prin integrare găsim forța cerută

$$F_r = \int dF_r = \rho b \cdot 2g \int_{h_1}^{h_2} (H - y)dy = \rho b \cdot 2g \left[-\frac{1}{2}(H - y)^2 \right]_{h_1}^{h_2} =$$

$$= \rho b \cdot 2g(h_2 - h_1)\left[H - \frac{1}{2}(h_1 + h_2) \right]. \qquad (3)$$

** **1.8.47.** Vom rezolva problema în SR legat de tub. Atunci trebuie introduse forțe complementare: pe direcția radială va acționa forța centrifugă $m\omega^2 r$. Vom considera fluidul ideal (incompresibil și lipsit de vîscozitate) și vom aplica teorema variației energiei cinetice .Într-un timp infinit mic dt prin orificiu iese o masă elementară dm, totul se petrece ca și cum din secțiunea S' dispare elementul de masă dm cu energia cinetică $dmv'^2/2$, iar în secțiunea S apare elementul de masă dm cu energia cinetică $dmv^2/2$, toate celelalte porțiuni intermediare de fluid neintervenind, deci ca și cum elementul dm a fost transportat în timpul dt din secțiunea S' în secțiunea S sub acțiunea forțelor centrifge. Scriem că variația energiei cinetice este egală cu lucrul mecanic efectuat de forțele aplicate. În SR considerat lucrul mecanic face numai forța centrifugă:

$$\frac{1}{2} dmv^2 - \frac{1}{2} dmv'^2 = \int_{l-x}^{l} dm \cdot \omega^2 r\, dr = dm \cdot \omega^2 \frac{r^2}{2}\Bigg|_{l-x}^{l} = \frac{1}{2} dm\, \omega^2 (2lx - x^2). \qquad (1)$$

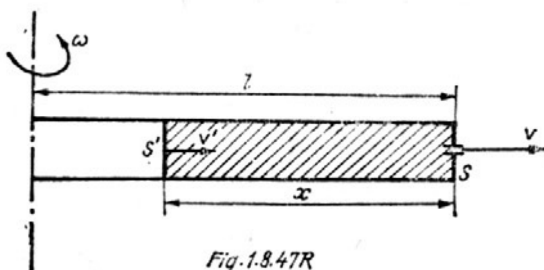


Fig. 1.8.47R

Lichidul fiind incompresibil, ecuația de continuitate dă (debitul volumic este același peste tot):

$$S'v' = Sv. \qquad (2)$$

Din cele două ecuații rezultă viteza de curgere în momentul cînd coloana de lichid are lungimea x:

$$v = \omega\sqrt{2lx - x^2} : \sqrt{1 - S^2/S'^2}. \qquad (3)$$

Într-un timp infinit mic dt se scurge un volum elementar de lichid

$$dV = Sv\, dt = S'v'dt = -S'dx, \text{ căci } v'dt = -dx, \qquad (4)$$

unde x este lungimea *coloanei* de lichid la un moment dat, iar v este dat de (3). Separăm variabilele și integrăm:

$$\mathrm{d}t = -\frac{S'}{S}\frac{\mathrm{d}x}{v} = -\frac{S'\sqrt{1 - S^2/S'^2}}{S\omega\sqrt{2lx - x^2}}\,\mathrm{d}x. \tag{5}$$

Calculăm separat integrala:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2lx - x^2}} = \arccos\left(1 - \frac{x}{l}\right) + C, \tag{6}$$

atunci

$$\int \mathrm{d}t = t = -\frac{1}{\omega}\sqrt{S'^2/S^2 - 1}\left[\arccos\left(1 - \frac{x}{l}\right) + C\right], \tag{7}$$

unde constanta de integrare se determină din condiția inițială: la $t = 0$ avem $x = h$; rezultă $C = -\arccos\,(1 - h/l)$,

$$t = \frac{1}{\omega}\sqrt{S'^2/S^2 - 1}\left[\arccos\left(1 - \frac{h}{l}\right) - \arccos\left(1 - \frac{x}{l}\right)\right]. \tag{8}$$

Se putea integra și definit (limitele de integrare se corespund):

$$\int_0^t \mathrm{d}t = t = \int_h^x -\frac{1}{\omega}\sqrt{S'^2/S^2 - 1}\,\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2lx - x^2}} =$$

$$= -\frac{1}{\omega}\sqrt{S'^2/S^2 - 1}\cdot \arccos\left(1 - \frac{x}{l}\right)\Bigg|_h^x.$$

Punînd condiția $x = 0$, găsim timpul cerut de golire:

$$\tau = \frac{1}{\omega}\sqrt{S'^2/S^2 - 1}\cdot\arccos\left(1 - \frac{h}{l}\right) \approx \frac{1}{\omega}\frac{S'}{S}\arccos\left(1 - \frac{h}{l}\right). \tag{9}$$

** **1.8.48.** Trebuie efectuat lucru mecanic împotriva forței arhimedice care excede greutatea, deci împotriva forței *ascensionale*. Să calculăm forța arhimedică dacă adîncimea de cufundare este y. Ea este egală cu greutatea volumului de lichid dezlocuit, adică a calotei sferice:

$$F_A = \rho g\frac{\pi}{3}y^2(3R - y) \tag{1}$$

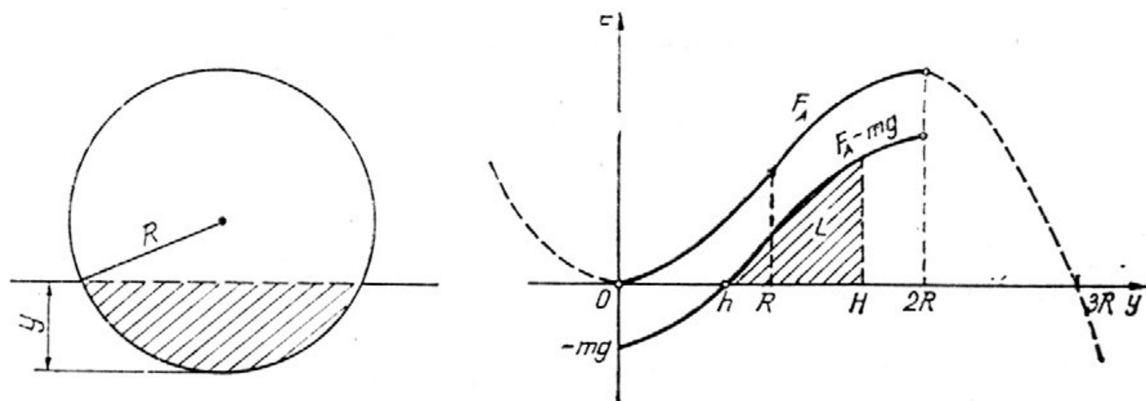


Fig. 1.8.48.R

(vd. figura). Condiția de plutire dă:

$$mg = \rho g\frac{\pi}{3}h^2(3R - h). \tag{2}$$

Lucrul mecanic cerut :

$$L = \int (F_A - mg)\,\mathrm{d}y. \qquad (3)$$

a)
$$L = \int_h^H \rho g \frac{\pi}{3}\,[3Ry^2 - y^3 - 3Rh^2 + h^3]\,\mathrm{d}y =$$
$$= \frac{\pi}{12}\,\rho g(H-h)^2[4R(H+2h) - (H^2 + 2Hh + 3h^2)]. \qquad (4)$$

Punînd aici $H = R$, găsim

$$L_a = \frac{\pi}{4}\,\rho g(R-h)^2(R^2 + 2Rh - h^2), \qquad (5)$$

pentru orice $h \in [0,\ 2R]$, $L \geqslant 0$.

b) Punem în (4) $H = 2R$:

$$L_b = \frac{\pi}{12}\,\rho g(2R-h)^3(2R+3h). \qquad (6)$$

c) Punem în (4) $H = 0$:

$$L_c = \frac{\pi}{12}\,\rho g h^3(8R - 3h). \qquad (7)$$

d)
$$L_d = \int_0^{2R}(F_A - mg)\,\mathrm{d}y = \int_0^h \ldots + \int_h^{2R} \ldots = L_b - L_c =$$
$$= \frac{2\pi}{3}\,\rho g(R-h)(2R^2 + 2Rh - h^2). \qquad (8)$$

1.9. Oscilații și unde

Oscilații mecanice

1.9.1. $t = \dfrac{T}{2\pi}\arcsin f$; pentru $f = 1/2$, $t = T/12$.

1.9.2. $t = \dfrac{T}{2\pi}\arccos\dfrac{1}{n}$; pentru $n = 2$, $t = T/6 = \dfrac{\pi}{3}\sqrt{l/g} = 0{,}33$ s.

1.9.3. $t_1 = 2\sqrt{R/g} > t_2 = \dfrac{\pi}{2}\sqrt{R/g}$.

1.9.4. $\Delta t = D(T_0/T - 1) = -Df:(1+f) = -8{,}6$ s (întîrzie).

1.9.5. $\cos\alpha = 1 - \dfrac{1}{2}(2\pi v)^2:(gT)^2$ sau $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \pi v/(gT)$, $\alpha = 60°$.

1.9.6. Scripetele nu se rotește, deci perioada coincide cu perioada pendulului simplu gravitațional.

1.9.7. $T = 2\pi\sqrt{l_1 l_2/(gd)} = 1{,}0$ s.

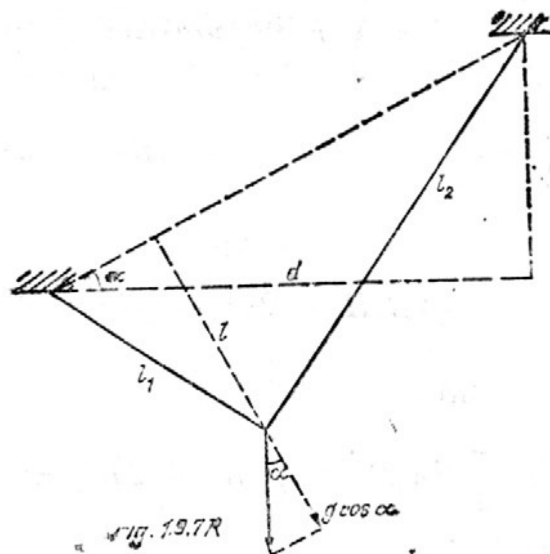


Fig. 1.9.7R

1.9.8. $a \approx (1/n^2)Lg : (4\pi^2 l) = 1/n^2, \ n = 1,2,3, \ldots$ m/s².

1.9.9. $N = [(1/\pi)\sqrt{2l : (g \operatorname{tg} \alpha)}] = 3.$

* **1.9.10.** $T = 2\pi\sqrt{l/g}$; deoarece accelerația g și perioada T se schimbă foarte puțin, putem calcula variațiile lor ca diferențiale. Calculăm derivata logaritmică (adică logaritmăm și apoi diferențiem):

$$\frac{dT}{T} = -\frac{1}{2}\frac{dg}{g}.$$

Conform principiului superpoziției cîmpul gravitațional deasupra zăcămîntului poate fi calculat ca suprapunerea cîmpului creat de Pămînt considerat global omogen de densitate ρ_0:

$$g_0 = \gamma M/R^2 = \gamma \rho_0 \frac{4\pi}{3} R \tag{2}$$

și a cîmpului suplimentar creat de zăcămîntul sferic considerat de densitate $\rho - \rho_0$:

$$\Delta g = \gamma(\rho - \rho_0)\frac{4\pi}{3} r^3/h^2. \tag{3}$$

Prin urmare:

$$\frac{\Delta T}{T} = -\frac{1}{2}\frac{\Delta g}{g} = -\frac{1}{2}\gamma(\rho - \rho_0)\frac{4\pi}{3}\frac{r^3}{h^2} : \left[\gamma\rho_0\frac{4\pi}{3}\frac{1}{R}\right] =$$

$$= -\frac{n-1}{2}\frac{r^3}{h^2 R} \approx 10^{-4} = 10^{-2}\ \%. \tag{4}$$

1.9.11. $t = \tau/3 = 0{,}10$ s.

1.9.12. $T = 2\pi\sqrt{\Delta l/g} = 0{,}40$ s.

1.9.13. $x_0 = g/(4\pi^2\nu^2) = 6{,}0$ cm.

1.9.14. $v = \sqrt{2g\left(h - l + \frac{mg}{2k}\right)} = 7{,}0$ m/s.

1.9.15. $F_2 = F_1/2 = 100$ N.

1.9.16. $T = 2\pi\frac{l}{L}\sqrt{m/k} = 0{,}31$s.

1.9.17. $T'/T = \sqrt{1 + m'/m}$; $A'/A = |1 \pm m'/m| = 3{,}0$, resp. $1{,}0$.

1.9.18. $T = 2\pi\sqrt{m_1A/(m_2g)} = 0{,}31$ s.

1.9.19. $A = |mg/k - x_0|$, $x_{ech} = mg/k$; $x_{min} = x_0$, $x_{max} = 2mg/k - x_0$ dacă $x_0 \leqslant mg/k$; $x_{min} = 2mg/k - x_0$, $x_{max} = x_0$ dacă $x_0 \geqslant mg/k$; $Q = \frac{1}{2}kA^2$.

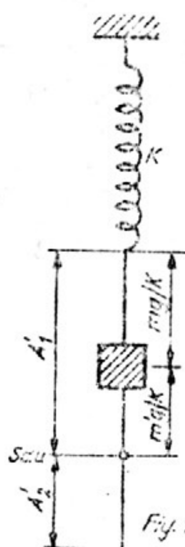


Fig. 1.9.17 R

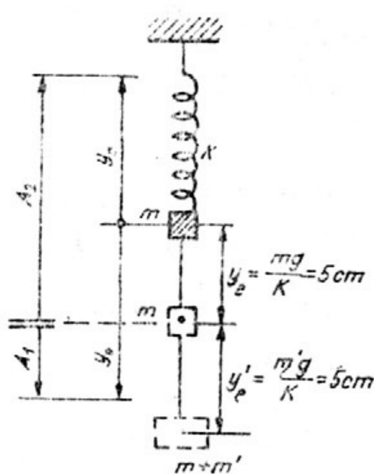


Fig. 1.9.24 R

1.9.20. În ambele cazuri: $N_{max} = mg(M + 2m) : (M + m) = 1{,}33mg = 6{,}54$ N, $N_{min} = mgM : (M + m) = 0{,}67\ mg = 3{,}27$ N.

1.9.21. $Q_2 = Q_1m_2^2/m_1^2 = 200$ mJ.

1.9.22. $A = m_2g/k = 10$ cm, $Q = \frac{1}{2}kA^2 = 50$ mJ.

1.9.23. $A = m_2g/k = 10$ cm, $Q = kA^2/2 = 0{,}50$ J.

1.9.24. a) $y_e = mg/k = 5{,}0$ cm, $A_1 = y_0 - mg/k = 5{,}0$ cm, resp. 15 cm, $v' = v_0m' : (m + m') = 1{,}5$ m/s. b) $y'_e = m'g/k = 5{,}0$ cm, $A'_1 = \sqrt{(m + m')/k}\cdot v' = 15$ cm, resp.

$A'_2 = \sqrt{(A_2 + y'_e)^2 + (m + m')v'^2/k} = 25$ cm. c) $Q = kA'^2/2 = 0{,}11$ J, resp. 0,31 J.

1.9.25. $y_d = (m + M)g/k = 15$ cm, $v_d^2 = k^2(y_0^2 - y_d^2) : (m + M)^2 = 7/6\ \mathrm{m^2/s^2}$, $h = y_d + v_d^2/(2g) = 21$ cm, $A' = [Mv_d^2/k + (y_d - mg/k)^2]^{1/2} = 14{,}7$ cm.

1.9.26. $t = \sqrt{2m(g-a)/(ka)} = 0{,}10$ s, $x_{max} = \frac{m}{k}(g + \sqrt{a(2g-a)}) =$

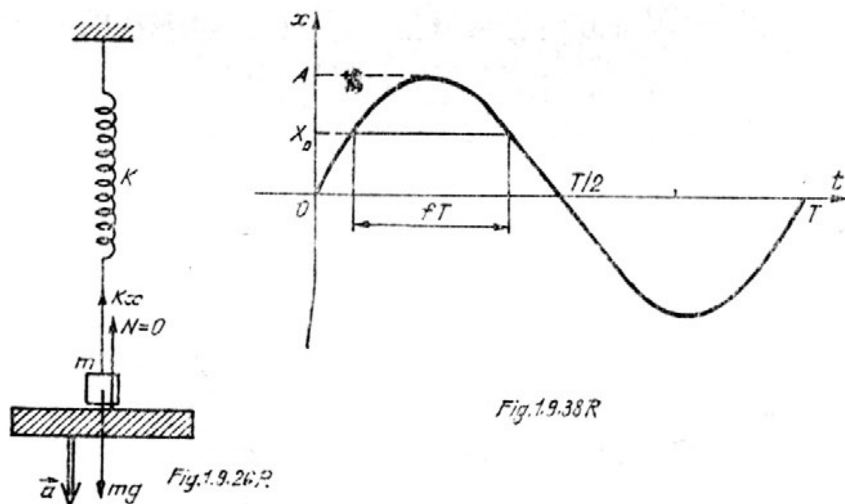


Fig. 1.9.26 R

Fig. 1.9.38 R

$= 9{,}1$ cm, $A = \frac{m}{k}\sqrt{a(2g-a)} = 4{,}2$ cm.

1.9.27. $\mu = k(s_1 - s_2)/(mg) = 0{,}090.$

1.9.28. $A = dk_2 : (k_1 + k_2) = 2{,}5$ cm,

$$v_m = k_2 d : \sqrt{m(k_1 + k_2)} = 1{,}0 \text{ m/s}.$$

1.9.29. $t = L/v_0 + \pi\sqrt{m/(2k)} = 2{,}3$ s.

1.9.30. $A = 6l\left(\sin\frac{\beta}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\right) = 0{,}33$ m, $T = 2\pi\sqrt{\left(\sin\frac{\beta}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\right)\cdot 6l/g} =$ $= 1{,}50$ s.

1.9.31. $b = \mu mg/k = 2{,}0$ mm, $(2n-1)b < A < (2n+1)b$, $n = 20$, $s = [kA^2 - (A - 2nb)^2] : (2\mu mg) = 1{,}64$ m, $t = n\pi\sqrt{m/k} = 2{,}84$ s.

1.9.32. $s_1 = v_0\sqrt{l/(\mu g)} = 1{,}00$ m, $t_1 = \frac{\pi}{2}\sqrt{l/\mu g} = 1{,}57$ s; b) $s_2 = s_1(\sqrt{2} - 1) =$ $= 0{,}41$ m, $t_2 = t_1/2 = 0{,}78$ s.

1.9.33. $\tau = \frac{\pi}{2}\sqrt{l/(\mu g)} = 0{,}78$ s, $v_0 = f\sqrt{\mu g l} = 0{,}49$ m/s.

1.9.34. $\tau = \sqrt{l/(\mu g)}\cdot \arcsin(\sqrt{\mu g l}/v_0) + \sqrt{v_0^2 - \mu g l}/(\mu g) = 1{,}13$ s.

1.9.35. $t = \pi : \sqrt{bg\cos\alpha} = 1{,}85$ s; $s = (2/b)\operatorname{tg}\alpha = 1{,}17$ m.

1.9.36. $\omega = \sqrt{k/m \pm \mu g/l} = 5{,}0$ rad/s, resp. $4{,}0$ rad/s, $(\mu mg < kl)$.

1.9.37. $T' = \frac{1}{2}T\left(1 - \frac{1}{\pi}\arcsin\frac{x_0}{A}\right) = 0{,}60$ s.

1.9.38. $x_0 = A\sin\left[(1-2f)\frac{\pi}{2}\right] = \frac{A}{2}$.

1.9.39. $\tau = n\cdot 2\pi\sqrt{m/k} = 0{,}3\cdot n$, s $(n \in N)$.

1.9.40. $\tau = \frac{\pi}{2}\sqrt{mM : [k(m + M)]} = 1{,}4$ s.

1.9.41. $A = \frac{mg}{k}\sqrt{1 + 2hk/(mg)} = 37{,}5$ cm.

1.9.42. $A'/A = \sqrt{M : (M + m)} = 0{,}80.$

1.9.43. $A = \mu g(m + M)/(2k) = 10$ cm.

1.9.44. $F = (M + m)g = 14{,}7$ N.

1.9.45. $\mu > 2T : [(M + m_1 + m_2)g] = 0{,}40.$

1.9.46. $T = 2\pi\sqrt{(m + M/2) : k} = 0{,}62$ s.

1.9.47. $T = 2\pi\sqrt{(m + 4M) : k} = 1{,}26$ s. (I neglijabil).

1.9.48. a) $A = \mu g : [\omega^2(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)] = 1{,}2$ mm; b) $A = g : [\omega^2\cos\alpha] =$ $= 3{,}6$ mm.

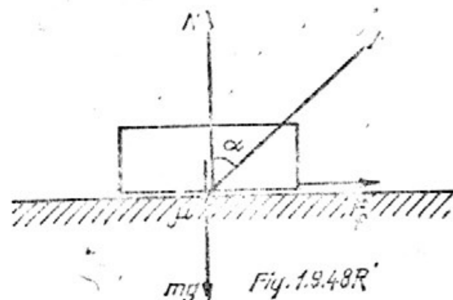


Fig. 1.9.48R



Fig. 1.9.49R

** **1.9.49.** Legea fundamentală a mecanicii se scrie astfel:

$$F = ma, \text{ unde } a = \ddot{y} \text{ și } F = -ky + kA_0 \sin \Omega t. \quad (1)$$

Obținem ecuația diferențială

$$m\ddot{y} + ky = kA_0 \sin \Omega t. \quad (2)$$

Această ecuație liniară (în y și în derivatele sale) cu coeficienți constanți și cu partea dreaptă are ca soluție generală *suma* dintre soluția *generală* a ecuației *fără* partea dreaptă plus o soluție *particulară* a ecuației *complete*. Soluția generală a ecuației (2) *fără* partea dreaptă $m\ddot{y} + ky = 0$ este binecunoscută:

$$y = A \sin (\omega t + \alpha), \ \omega = \sqrt{k/m}, \quad (3)$$

unde A (amplitudinea) și α (faza inițială) sînt determinate de condițiile inițiale.

Soluția particulară a ecuației complete (2) este *de același tip* ca și funcția din partea dreaptă:

$$y = B \sin (\Omega t + \beta). \quad (4)$$

Calculînd derivata

$$\ddot{y} = -\Omega^2 B \sin (\Omega t + \beta) \quad (5)$$

și introducînd-o în (2) trebuie să avem *identic*:

$$-m\Omega^2 B \sin (\Omega t + \beta) + kB \sin (\Omega t + \beta) \equiv kA_0 \sin \Omega t,$$

de unde rezultă:

$$\beta = 0 \text{ și } B = kA_0 : (k - m\Omega^2) = A_0 : (1 - \Omega^2/\omega^2), \quad (6)$$

deci soluția particulară

$$y = \frac{A_0}{1 - \Omega^2/\omega^2} \sin \Omega t. \quad (7)$$

Datorită pierderilor inevitabile de energie din sistem (datorită frecărilor), în locul oscilațiilor sinusoidale (3) vom avea de fapt oscilații *amortizate*, care după un anumit timp, pînă la urmă, dispar și rămîn numai oscilațiile „forțate" de tip (7) (cu termen corectiv pentru frecări), oscilații care reprezintă *regimul permanent* de oscilație (cu amplitudine constantă și cu frecvența forței exterioare). Se vede că pentru $\Omega < \omega$ bila și punctul superior oscilează în fază, iar pentru $\Omega > \omega$ — în opoziție de fază. La *rezonanță* $\Omega \to \omega$, amplitudinea oscilațiilor tinde la infinit (fiindcă n-am ținut seama de pierderile de energie).

* **1.9.50.** Fiind vorba de micile oscilații vom considera unghiul α *foarte mic*, ceea ce ne permite să facem aproximațiile de mai jos. Energia cinetică a halterei se obține considerînd o rotație infinitezimală a halterei cu viteza unghiulară $\omega = \dot{\alpha}$ *la limită* în jurul CM, astfel încît vitezele bilelor sînt $v = \frac{l}{2}\omega = \frac{l}{2}\dot{\alpha}$ și energia cinetică:

$$E_c = 2 \cdot \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{4} ml^2\dot{\alpha}^2 = \frac{1}{2}\mu\dot{\alpha}^2, \ \mu = ml^2/2. \quad (1)$$

Analog, energia potențială (luînd CM):

$$E_p = (2m)\, gh = 2mg\, [R\alpha\sin\alpha - (R - R\cos\alpha)]. \quad (2)$$

Pentru a obține E_p pînă la aproximația de ordinul II trebuie să luăm $\sin\alpha \approx \alpha$ și $\cos \alpha \approx 1 - \alpha^2/2$, ceea ce dă

$$E_p = 2mg[R\alpha^2 - R + R(1 - \alpha^2/2)] = mgR\alpha^2 = \frac{1}{2}\varkappa\alpha^2, \ \varkappa = 2mgR. \quad (3)$$

În aproximaţia de ordinul I $E_p = 0$, ceeace justifică şi aproximaţiile de la calculul lui E_c. Reamintim următoarele :

Dacă un sistem are un singur grad de libertate caracterizat de coordonata generalizată s, atunci E_c şi E_p se scriu :

$$E_c = \frac{1}{2}\mu\dot{s}^2, \ F_p = \frac{1}{2}\varkappa s^2, \tag{4}$$

unde μ este „masa" şi $\varkappa$ — „constanta elastică" corespunzătoare coordonatei s. Atunci, sistemul fiind conservativ, forţa generalizată

$$F = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}E_p = -\varkappa s \tag{5}$$

este de tip elastic şi energia totală se conservă :

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2}\mu\dot{s}^2 + \frac{1}{2}\varkappa s^2 = \text{const} \tag{6}$$

pe care derivînd-o în raport cu timpul, obţinem ecuaţia diferenţială cunoscută a oscilatorului armonic :

$$\mu\dot{s}\ \ddot{s} + \varkappa s\ \dot{s} = 0 \text{ sau } \mu\ddot{s} + \varkappa s = 0, \tag{7}$$

adică oscilaţii sinusoidale în coordonata s cu frecvenţa şi perioada :

$$\omega^2 = \varkappa/\mu, \ \ T = 2\pi\sqrt{\mu/\varkappa}. \tag{8}$$

În cazul nostru, din (1) şi (3) rezultă :

$$T = 2\pi\sqrt{(ml^2/2) : (2mgR)} = \pi l\ : \sqrt{gR} = 1{,}57 \ \text{ s.}$$

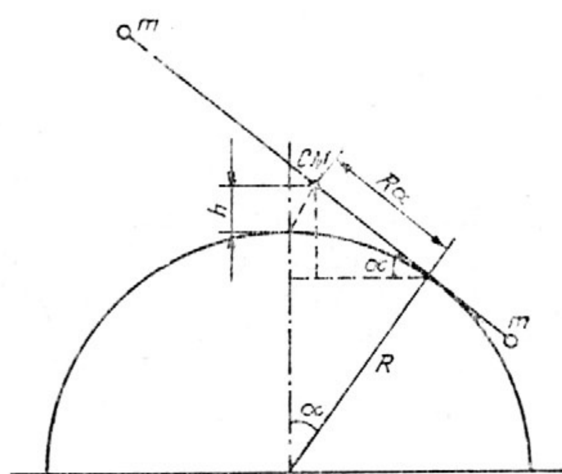


Fig. 1.9.50R

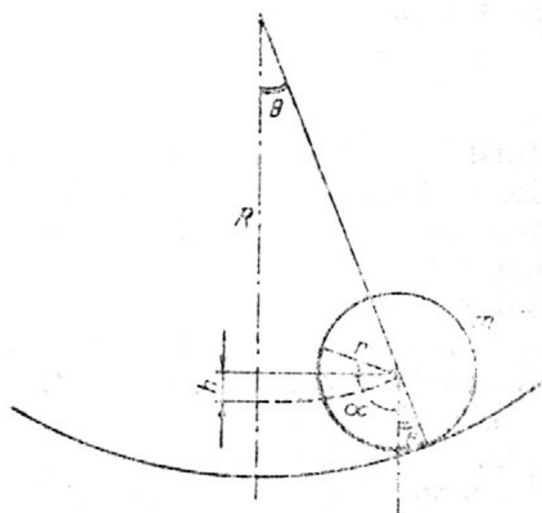


Fig. 1.9.51R

* **1.9.51.** Oscilaţiile fiind de mică amplitudine, unghiul θ este foarte mic şi putem face aproximaţiile de mai jos. Energia potenţială a cercului :

$$E_p = mgh = mg\ (R-r)\ (1-\cos\theta), \tag{1}$$

dar

$$\cos\theta \cong 1 - \theta^2/2,$$

$$E_p \cong mg(R-r)\theta^2/2 = \frac{1}{2}\varkappa\theta^2, \ \varkappa = mg(R-r), \tag{2}$$

E_p este de ordinul II infinitezimal.
Energia cinetică :

$$E_c \cong \frac{1}{2}I\omega^2, \tag{3}$$

unde I este momentul de inerție al cercului față de punctul de contact cu cilindrul. Conform teoremei lui Steiner:

$$I = I_0 + mr^2 = 2mr^2. \tag{4}$$

Viteza unghiulară $\omega = \dot{\alpha}$, dar trebuie s-o exprimăm prin $\dot{\theta}$. Observăm că prin rostogolire fără lunecare avem:

$r(\alpha + \theta) = R\theta$, de unde prin derivare:

$$r\dot{\alpha} = (R-r)\dot{\theta} \tag{5}$$

și deci energia cinetică

$$E_c = \frac{1}{2} 2mr^2 \cdot \left(\frac{R-r}{r}\dot{\theta}\right)^2 = m(R-r)^2\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}\mu\dot{\theta}^2,\ \mu = 2m(R-r)^2. \tag{6}$$

Conform problemei precedente **1.9.50**:

$$T = 2\pi\sqrt{\mu/\varkappa} = 2\pi\sqrt{2m(R-r)^2 : [mg(R-r)]} = 2\pi\sqrt{2(R-r)/g} = 1{,}88 \text{ s}.$$

* **1.9.52.** Oscilațiile fiind mici, unghiul θ este foarte mic și putem face aproximațiile de mai jos. Problema de față este de fapt problema precedentă **1.9.51** „inversată".

Energia potențială:

$$E_p = Mgh = Mg(R-r)(1-\cos\theta) \cong Mg(R-r)\frac{\theta^2}{2}. \tag{1}$$

Energia cinetică:

$$E_c \cong \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}(I_0 + MR^2)\dot{\theta}^2 = MR^2\dot{\theta}^2, \tag{2}$$

unde I este momentul de inerție al cercului față de punctul de contact cu cilindrul și am aplicat teorema lui Steiner. Conform problemei **1.9.50**:

$$T = 2\pi\sqrt{\mu/\varkappa} = 2\pi\sqrt{2MR^2 : [Mg(R-r)]} = 2\pi\frac{R}{R-r}\sqrt{2(R-r)/g} = 4{,}0 \text{ s}.$$

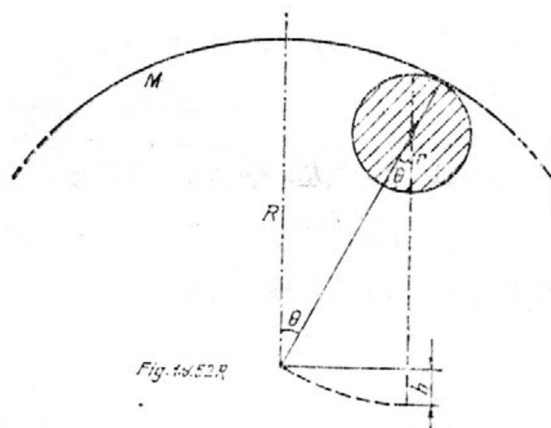


Fig. 1.9.52 R

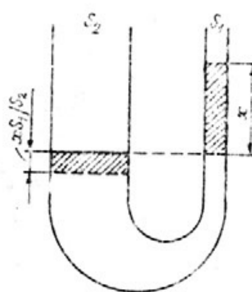


Fig. 1.9.53 R

* **1.9.53.** $E_p = \rho g S_1 x \cdot \left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}S_1/S_2\right) = \frac{1}{2}\varkappa x^2,$ (1)

$$E_c = \frac{1}{2}\left(m\frac{S_1}{S_1+S_2}\right)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\left(m\frac{S_2}{S_1+S_2}\right)(\dot{x}S_1/S_2)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}m\frac{S_1}{S_1+S_2}(1 + S_1/S_2)\dot{x}^2 = \frac{1}{2}\mu\dot{x}^2. \tag{2}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\mu/\varkappa} = 2\pi\sqrt{m : [(S_1+S_2)\rho g]} = 2{,}0 \text{ s}.$$

1.9.54. $l \sim 2\pi nR/\nu \sim 0{,}3$ mm.
1.9.55. $l = T^2g : (4\pi^2) = 1{,}0$ m.

Unde elastice

1.9.56. $c = \frac{\lambda}{2}(\nu_1 + \nu_2) = 15$ m/s, $v = \frac{\lambda}{2}(\nu_1 - \nu_2) = 5{,}0$ **m/s.**

1.9.57. Faza este aceeași pentru toate particulele între două **noduri** consecutive și variază cu π cînd trecem printr-un nod.

1.9.58. Con cu semideschiderea $\alpha = \arcsin(c/v)$, $d = hv/c =$ **10 km.**

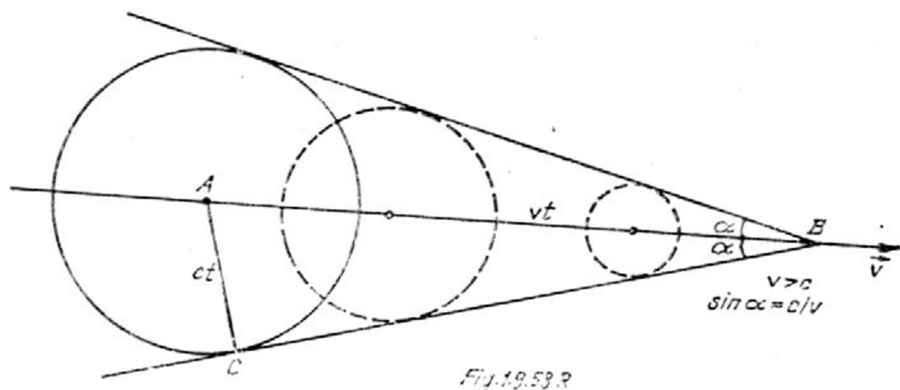


Fig.1.9.58.R

1.9.59. $n = c\sqrt{\rho/E} = 0{,}065.$

** **1.9.60.** a) $w_c = \frac{\mathrm{d}W_c}{\mathrm{d}V_0} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}V_0}v^2 = \frac{1}{2}\rho_0 v^2,$ (1)

unde $\mathrm{d}V_0$ este elementul de volum nedeformat (în absența undei) și ρ_0 densitatea în absența undei (a mediului nedeformat). Dar

$$v = \dot{u} = \frac{\partial u}{\partial t} = -\omega A \cos(kx + \beta)\sin(\omega t + \alpha), \tag{2}$$

$$w_c = \frac{1}{2}\rho_0\,\omega^2 A^2\cos^2(kx + \beta)\sin^2(\omega t + \alpha), \tag{3}$$

deci

$$\langle w_c \rangle = \frac{1}{4}\rho_0\omega^2 A^2\cos^2(kx + \beta). \tag{4}$$

$$\text{b) } W_p = \int_{l_0}^{l_0+\Delta l} F\mathrm{d}x = \int_{l_0}^{l_0+\Delta l}[S_0E(x-l_0) : l_0]\mathrm{d}x = (S_0E/l_0)\int_{l_0}^{l_0+\Delta l}(x-l_0)\mathrm{d}(x -$$

$$- l_0) = \frac{1}{2}\frac{S_0E}{l_0}(x-l_0)^2\Big|_{l_0}^{l_0+\Delta l} = \frac{1}{2}S_0l_0E(\Delta l/l_0)^2 = \frac{1}{2}V_0E\varepsilon^2, \tag{5}$$

de unde

$$w_p = \frac{W_p}{V_0} = \frac{1}{2}E\varepsilon^2, \tag{6}$$

unde E este modulul de elasticitate (Young), iar ε — deformația elastică relativă.

Deformația $\varepsilon(x, t)$ într-un anumit punct x la un anumit moment t se calculează astfel (vd. figura). Luăm în punctul x un strat de grosime

nedeformată dx, transversal pe direcţia de propagare. La momentul t el se va găsi deplasat şi va avea grosimea:

$$\mathrm{d}x + u(x + \mathrm{d}x, t) - u(x, t).$$

Scăzînd de aici grosimea iniţială nedeformată dx, obţinem alungirea $u(x + \mathrm{d}x, t) - u(x,t)$ şi raportînd-o la lungimea iniţială nedeformată $(l - l_0) : l_0 = \varepsilon$, obţinem alungirea relativă sau deformaţia elastică:

$$\varepsilon(x, t) = \frac{u(x + \mathrm{d}x, t) - u(x,t)}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial u}{\partial x}(x, t). \qquad (7)$$

Ştiind că viteza undelor longitudinale

$$c = \sqrt{E/\rho_0}, \qquad (8)$$

găsim

$$w_p = \frac{1}{2} c^2 \rho_0 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 = \frac{1}{2} c^2 \rho_0 k^2 A^2 \sin^2 (kx + \beta) \cos^2 (\omega t + \alpha), \qquad (9)$$

dar

$$k = \omega/c, \qquad (10)$$

rezultă

$$\langle w_p \rangle = \frac{1}{4} \rho_0 \omega^2 A^2 \sin^2 (kx + \beta). \qquad (11)$$

c) $\langle w \rangle = \langle w_c \rangle + \langle w_p \rangle = \frac{1}{4} \rho_0 \omega^2 A^2. \qquad (12)$

1.9.61. $\nu_d = \Delta\nu : (1 - \sqrt{F_1/F_2}) = 100$ Hz.
1.9.62. $\nu_d = \Delta\nu / f = 1000$ Hz.
1.9.63. $l = c/(4\nu) = 0{,}34$ m, $\nu' = 2\nu = 500$ Hz.
1.9.64. $\nu_3 = 3\nu = 1320$ Hz, $\nu'_\varepsilon = 3\nu/2 = 660$ Hz.
1.9.65. $N = 10^{\Delta L/10} = 100$.

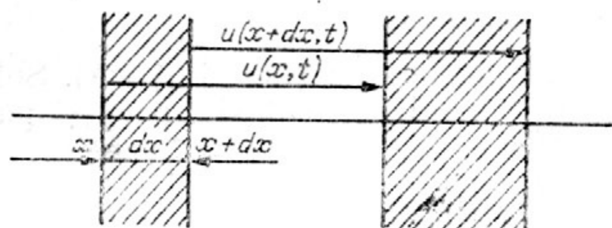


Fig. 1.9.60 R

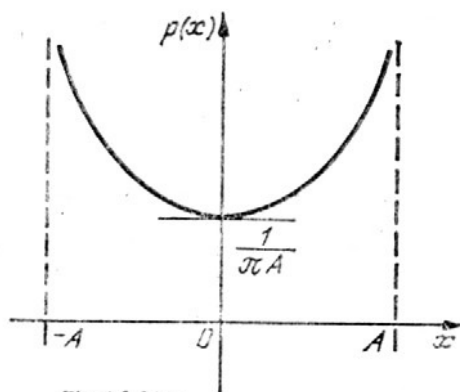


Fig. 1.9.66 R

** **1.9.66.** Probabilitatea de a găsi particula pe intervalul $(x, x + \mathrm{d}x)$ este proporţională cu timpul dt cît se găseşte particula în acest interval:

$$\mathrm{d}P(x) = p(x)\mathrm{d}x = C\mathrm{d}t, \ p(x) = \frac{C}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t} = \frac{C}{v(x)}, \qquad (1)$$

$$v = \dot{x} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\omega A \sin(\omega t + \alpha) = \pm \omega A \sqrt{1 - x^2/A^2} = -\omega\sqrt{A^2 - x^2}, \qquad (2)$$

$$p(x) = \frac{C}{\omega\sqrt{A^2 - x^2}}. \qquad (3)$$

Constanta C se obține din condiția de normare: probabilitatea de a găsi particula *oriunde* pe intervalul $(-A, A)$ este 1 (certitudine!):

$$1 = \int dP = \int_{-A}^{A} p(x)dx = \int_{-A}^{A} \frac{Cdx}{\omega\sqrt{A^2-x^2}} = \frac{C}{\omega} \arcsin \frac{x}{A}\Big|_{-A}^{A} =$$

$$= \frac{C}{\omega} 2 \frac{\pi}{2}, \text{ de unde } C = \frac{\omega}{\pi},$$

$$p(x) = \frac{dP(x)}{dx} = \frac{1}{\pi\sqrt{A^2 - x^2}}. \quad (4)$$

Probabilitatea de a găsi particula la extremitățile $x = \pm A$ este foarte mare fiindcă acolo particula zăbovește mai mult: viteza scade către zero, particula se oprește și se întoarce, pe cînd prin centrul $x = 0$ particula trece cu viteză maximă (vd. figura)

* **1.9.67.** Ecuația traiectoriei:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1, \quad (1)$$

o elipsă parcursă în sens trigonometric.

$$a_x = \ddot{x} = -\omega^2 x, \ a_y = -\omega^2 y, \ \vec{a} = -\omega^2 \vec{r}, \quad (2)$$

$$\vec{F} = m\vec{a} = -m\omega^2\vec{r} = -k\vec{r}, \quad (3)$$

forța este de tip elastic cu constanta cuasielastică

$$k = m\omega^2 \text{ și } T = 2\pi\sqrt{m/k}. \quad (4)$$

** **1.9.68.** În SR neinerțial legat de lift trebuie să introducem forța complementară $-m\vec{a}$. Ecuația fundamentală a mecanicii se scrie atunci astfel:

$$ma = -kx + mBt \text{ sau } x + \omega^2 x = Bt, \ \omega^2 = k/m. \quad (1)$$

Soluția acestei ecuații diferențiale cu partea dreaptă este egală cu soluția *generală* a ecuației *fără* partea dreaptă plus o soluție *particulară* a ecuației *complete*. Soluția generală a ecuației fără partea dreaptă este binecunoscuta oscilație armonică

$$x = A \sin (\omega t + \alpha) \quad (2)$$

cu două constante de integrare A (amplitudinea), α (faza inițială). Soluția particulară a ecuației complete este de obicei de același tip ca și partea dreaptă. În cazul nostru se vede imediat că

$$x = \frac{B}{\omega^2} t \quad (3)$$

verifică ecuația, prin urmare

$$x = A \sin (\omega t + \alpha) + \frac{B}{\omega^2} t, \quad (4)$$

$$v = \dot{x} = \omega A \cos (\omega t + \alpha) + B/\omega^2. \quad (5)$$

Determinăm constantele de integrare din condițiile inițiale: la $t = 0$ avem $x = 0$, $v = \dot{x} = 0$:

$$0 = A \sin\alpha, \ 0 = \omega A \cos\alpha + B/\omega^2, \text{ de unde } \alpha = 0, \ A = -B/\omega^3, \quad (6)$$

$$x = \frac{B}{\omega^3}(\omega t - \sin \omega t), \ \omega = \sqrt{k/m}. \quad (7)$$

** **1.9.69.** Ecuațiile diferențiale ale mișcării :

$$m\ddot{x} = -kx + F \text{ pentru } t \leqslant \tau,$$
$$m\ddot{x} = -kx \text{ pentru } t \geqslant \tau. \quad (1)$$

În primul caz putem scrie

$$(x - F/k)^{\cdot\cdot} + \frac{k}{m}(x - F/k) = 0. \quad (2)$$

Aceasta este binecunoscuta ecuație diferențială a oscilatorului armonic cu soluția

$$x - F/k = A \cos(\omega t + \alpha), \ \omega = \sqrt{k/m}, \quad (3)$$
$$v = \dot{x} = -\omega A \sin(\omega t + \alpha),$$

unde constantele de integrare A, α se determină din condițiile inițiale : la $t = 0$ avem $x = 0$ și $v = 0$:

$$-F/k = A \cos\alpha, \ 0 = -\omega A \sin\alpha, \ \alpha = 0, \ A = -F/k. \quad (4)$$

Atunci soluția devine

$$x = \frac{F}{k}(1 - \cos\omega t), \ \omega = \sqrt{k/m}, \ t \leqslant \tau. \quad (5)$$

În al doilea caz soluția este cea a oscilatorului armonic :

$$x = B \cos[\omega(t - \tau) + \beta], \ t \geqslant \tau. \quad (6)$$

Pentru $t = \tau$ cele două soluții trebuie să dea același x și v (trebuie să se racordeze) :

$$x|_{t=\tau} = \frac{F}{k}(1 - \cos\omega\tau) = B \cos\beta,$$
$$v|_{t=\tau} = \dot{x}|_{t=\tau} = \frac{F}{k}\omega \sin\omega\tau = -\omega B \sin\beta. \quad (7)$$

Eliminînd pe $\sin\beta$, $\cos\beta$ (prin ridicare la pătrat și adunare : $\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1$), obținem amplitudinea cerută :

$$B = \frac{F}{k}\sqrt{2 - 2\cos\omega\tau} = \frac{2F}{k}\left|\sin\frac{\omega\tau}{2}\right|, \ \omega = \sqrt{k/m}. \quad (8)$$

Amintim că prin integrarea unei ecuații diferențiale de ordinul n diferențial (care conține derivatele funcției pînă la ordinul n) apar n constante de integrare, care se determină din condițiile „inițiale" ca pentru o anumită valoare a argumentului, funcția și primele sale $n-1$ derivate să ia valori date. În cazul mecanicii ecuația diferențială este de ordinul *doi* ($a = \ddot{x} = F/m$), deci prin integrare apar *două* constante care se determină din condițiile inițiale ca pentru $t = t_0$, coordonata (funcția) și viteza (prima derivată) să ia valori date (poziția inițială și viteza inițială).

** **1.9.70.** Vom calcula energia potențială și cinetică a sistemului resort-corp în funcție de coordonata x și viteza $\dot{x}$ a corpului.

Energia potențială :

$$E_p = -\int_0^x F\mathrm{d}x = \int_0^x kx\mathrm{d}x = \frac{1}{2}kx^2. \quad (1)$$

Alungirile $\xi(r)$ ale punctelor resortului cresc liniar de la zero la x de-a lungul resortului :

$$\xi(r) = x\frac{r}{l}, \ (0 \leqslant r \leqslant l), \tag{2}$$

de unde viteza punctelor resortului :

$$v(r) = \dot{\xi}(r) = \dot{x}\,\frac{r}{l}. \tag{3}$$

Energia cinetică a unui element de masă $\mathrm{d}m' = \frac{m'}{l}\,\mathrm{d}r$ va fi atunci

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{d}m'v^2 = \frac{1}{2}\,\frac{m'}{l}\,\mathrm{d}r\,\dot{x}^2\frac{r^2}{l^2} \tag{4}$$

și energia cinetică totală :

$$E_c = \frac{1}{2}\,m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\,\frac{m'}{l^3}\,\dot{x}^2\int_0^l r^2\,\mathrm{d}r = \frac{1}{2}\left(m + \frac{m'}{3}\right)\dot{x}^2 = \frac{1}{2}\,\mu\dot{x}^2. \tag{5}$$

Frecvența unghiulară și perioada oscilațiilor rezultă acum imediat :

$$\omega = \sqrt{k/\mu} = \sqrt{k\ :(m + m'/3)}, \quad T = 2\pi\sqrt{(m + m'/3) : k}, \tag{6}$$

ca și cum *o treime* din masa resortului se adaugă la masa corpului.

** **1.9.71.** Principiul II al dinamicii se scrie :

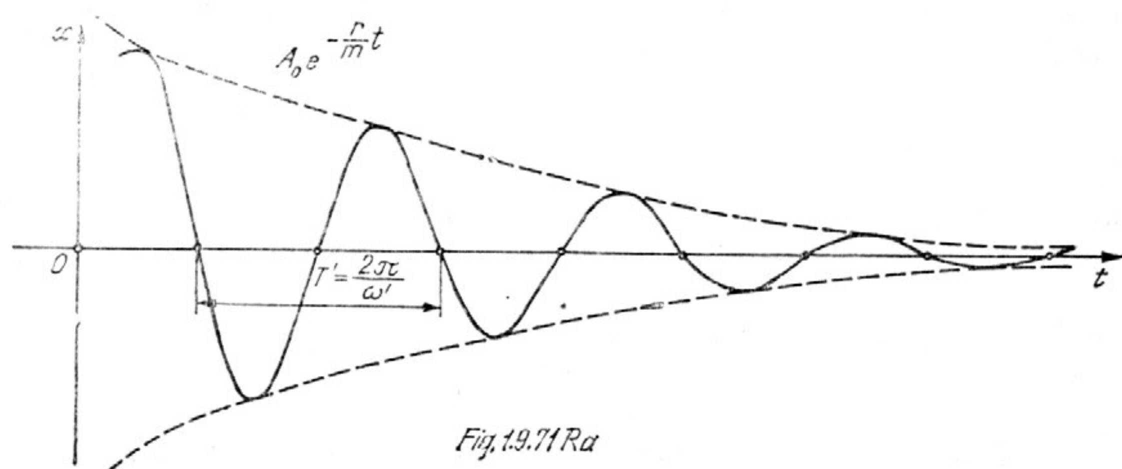


Fig. 1.9.71 Ra

$$ma = -kx - rv \ \text{ sau } \ m\,\ddot{x} + r\,\dot{x} + kx = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{r}{m}\,\dot{x} + \frac{k}{m}\,x = 0, \tag{1}$$

unde $\sqrt{k/m} = \omega$ este frecvența unghiulară a oscilatorului armonic în absența forțelor de frecare. Transcriem ecuația astfel :

$$\ddot{x} + 2\cdot\frac{r}{2m}\,x + \left(\frac{r}{2m}\right)^2 x + \left(\frac{k}{m} - \frac{r^2}{4m^2}\right)x = 0. \tag{2}$$

Primii trei termeni se pot restrînge ca derivata unui produs, în adevăr,

$$(x e^{rt/(2m)})^{\cdot\cdot} = \left(\dot{x}e^{rt/(2m)} + \frac{r}{2m}\,x\,e^{rt/(2m)}\right)^{\cdot} = \ddot{x}\,e^{rt/(2m)} + 2\,\frac{r}{2m}\,\dot{x}\,e^{rt/(2m)} + \left(\frac{r}{2m}\right)^2 x\,e^{rt/(2m)}.$$

Această derivată se poate scrie dintr-o dată cu ajutorul formulei lui Leibnitz pentru derivata de ordinul n a unui produs de două funcții. Acum

înmulţim ecuaţia (2) cu $e^{rt/(2m)}$ („factor integrant") şi obţinem

$$(x\, e^{rt/(2m)})^{\cdot\cdot} + \left(\frac{k}{m} - \frac{r^2}{4m^2}\right)(x\, e^{rt/(2m)}) = 0. \qquad (3)$$

Această ecuaţie este foarte bine cunoscută: este a oscilatorului armonic. S-o transcriem astfel:

$$(x\, e^{rt/(2m)})^{\cdot\cdot} + \left(\omega^2 - \frac{r^2}{4m^2}\right)(x\, e^{rt/(2m)}) = 0, \qquad (4)$$

$$(\ddot{y} + \omega'^2 y = 0).$$

Avem de considerat trei cazuri:

a) $$\omega^2 - \frac{r^2}{4m^2} > 0 \text{ sau } \omega'^2 = \omega^2 - \frac{r^2}{4m^2} > 0, \qquad (5)$$

$$\text{sau } r < 2\sqrt{mk},$$

avem în acest caz ecuaţia diferenţială a oscilatorului armonic cu soluţia cunoscută

$$x\, e^{rt/(2m)} = A_0 \cos(\omega' t + \alpha), \qquad (6)$$

unde A şi α sînt constantele de integrare;

$$x = A_0 e^{-rt/(2m)} \cos(\omega' t + \alpha) = A \cos(\omega' t + \alpha), \qquad (7)$$

$$A = A_0 e^{-rt/(2m)}.$$

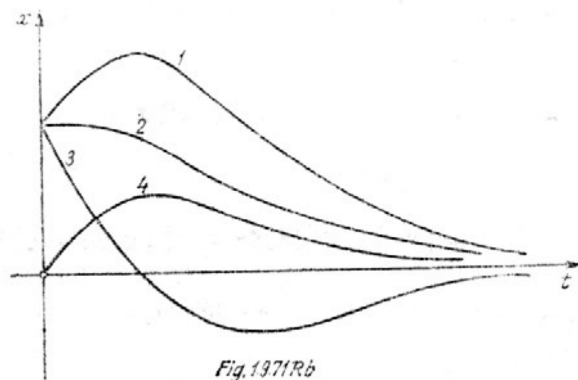
Acestea sînt oscilaţii *amortizate pseudoperiodice* cu pseudofrecvenţa unghiulară:

$$\omega' = \sqrt{\omega^2 - r^2/(4m^2)} = \sqrt{k/m - r^2/(4m^2)} \qquad (8)$$

şi cu amplitudinea descrescătoare exponenţial. Observăm că datorită frecărilor care se opun mişcării şi o întîrzie, perioada creşte, deci frecvenţa scade (8).

Se numeşte *timp de relaxare* (sau „timp de viaţă") a oscilaţiilor, timpul în care amplitudinea oscilaţiilor se reduce de $e = 2{,}718$ ori:

$$\tau = 2m/r. \qquad (9)$$



b) Cazul $\omega^2 - r^2/(4m^2) < 0$ sau $r > 2\sqrt{mk}$. (10)

În acest caz soluţia este (vd. problema 1.2.134):

$$x\, e^{rt/(2m)} = A_0 \operatorname{ch}(\sqrt{r^2/(4m^2) - \omega^2}\cdot t + \alpha) = C_1 \exp\{\sqrt{r^2/(4m^2) - \omega^2}\cdot t\} + C_2 \exp\{-\sqrt{r^2/(4m^2) - \omega^2}\cdot t\},$$

unde se poate trece uşor de la constantele de integrare A_0, α la constantele $C_{1,2}$. Mişcarea este *amortizată aperiodică* (vd. figura):

$$x = e^{-rt/(2m)}\left(C_1 e^{\sqrt{r^2/(4m^2) - \omega^2}\cdot t} + C_2 e^{-\sqrt{r^2/(4m^2) - \omega^2}\cdot t}\right). \qquad (11)$$

c) Cazul $\omega^2 - r^2/(4m^2) = 0$ sau $r = 2\sqrt{mk}$, (12)

este un caz excepţional (de interes teoretic):

$$(xe^{rt/(2m)})^{\cdot\cdot} = 0, \quad (xe^{rt/(2m)})^{\cdot} = C_1, \quad x\,e^{rt/(2m)} = C_1t + C_2,$$

$$x = (C_1t + C_2)e^{-rt/(2m)}, \tag{13}$$

unde am făcut integrări succesive. Mişcarea se numeşte *aperiodică critică* (graficele seamănă cu fig. 1.9.71 R, b).

** **1.9.72.** Conform principiului fundamental:

$$ma = -kv - rv + F_0\cos\Omega t \text{ sau } \ddot{x} + \frac{r}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m}\cos\Omega t. \tag{1}$$

Soluţia acestei ecuaţii diferenţiale liniare se compune din soluţia *generală* a ecuaţiei *fără* partea dreaptă plus o soluţie *particulară* a ecuaţiei *complete*. Soluţia generală a ecuaţiei fără partea dreaptă reprezintă oscilaţiile libere amortizate, studiate în problema precedentă **1.9.71**:

$$x = A_0e^{-rt/(2m)}\cos\left(\sqrt{k/m - r^2/(4m^2)}\cdot t + \alpha\right). \tag{2}$$

Soluţia particulară este de acelaşi tip cu partea dreaptă:

$$x = B\cos(\Omega t + \beta), \tag{3}$$

unde constantele B, β se determină din condiţia ca această soluţie să verifice ecuaţia diferenţială (1);

$$\dot{x} = -\Omega B\sin(\Omega t + \beta), \quad \ddot{x} = -\Omega^2B\cos(\Omega t + \beta),$$

$$B(k/m - \Omega^2)\cos(\Omega t + \beta) - \frac{r}{m}\Omega B\sin(\Omega t + \beta) = \frac{F_0}{m}\cos\Omega t,$$

$$(k/m - \Omega^2)\,B\cos(\Omega t + \beta) + \frac{r}{m}\Omega B\cos\left(\Omega t + \beta + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{F_0}{m}\cos\Omega t. \tag{4}$$

Cele două oscilaţii din stînga egalităţii, compuse fiind, trebuie să dea identic oscilaţia din dreapta. Ştim că

$$A_1\cos(\omega t + \alpha_1) + A_2\cos(\omega t + \alpha_2) = A\cos(\omega t + \alpha), \tag{5}$$

unde

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\alpha_1 - \alpha_2), \quad \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{A_1\sin\alpha_1 + A_2\sin\alpha_2}{A_1\cos\alpha_1 + A_2\cos\alpha_2}.$$

Aplicînd aceste formule obţinem:

$$(F_0/m)^2 = (k/m - \Omega^2)^2B^2 + (r^2/m^2)\Omega^2B^2 + 2(k/m - \Omega^2)B(r/m)\Omega B\cos\frac{\pi}{2},$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha = 0 = \frac{(k/m - \Omega^2)B\sin\beta + (r/m)\Omega B\sin(\beta + \pi/2)}{(k/m - \Omega^2)B\cos\beta + (r/m)\Omega B\cos(\beta + \pi/2)},$$

de unde rezultă

$$B = \frac{F_0}{m\sqrt{(k/m - \Omega^2)^2 + \Omega^2r^2/m^2}}, \quad \mathrm{tg}\,\beta = \frac{-\Omega r/m}{k/m - \Omega^2} \tag{7}$$

sau $$B = \frac{F_0}{\Omega\sqrt{r^2 + (\Omega m - k/\Omega)^2}} = \frac{F_0}{\Omega Z}, \quad Z = \sqrt{r^2 + (\Omega m - k/\Omega)^2}, \tag{8}$$

$$\mathrm{tg}\,\beta = \frac{r}{\Omega m - k/\Omega} = \frac{r}{X_m - X_k}, \quad X_m = \Omega m, \quad X_k = \frac{k}{\Omega}, \tag{9}$$

unde $X_m = \Omega m$ este reactanţa *inerţială* analogă reactanţei inductive $X_L = \omega L$ (masa m corespunde inductanţei L), $X_k = k/\Omega$ este reactanţa *elastică* analogă reactanţei capacitive $X_C = 1/(\omega C)$, (constanta elastică k

corespunde inversului capacității $1/C$), Z este impedanța *mecanică* analogă impedanței electrice (coeficientul de rezistență r corespunde rezistenței electrice R). Analogia dintre mărimile mecanice și cele electrice merge și mai departe: elongația x corespunde sarcinii electrice q de pe condensator, viteza $v = \dot{x}$ corespunde intensității curentului electric $i = \dot{q}$, forța f corespunde tensiunii u, etc.

Revenim la soluția generală:

$$x = A_0 e^{-rt/(2m)} \cos \left(\sqrt{k/m - r^2/(4m^2)} \cdot t + \alpha\right) + \\ + \frac{F_0}{\Omega \sqrt{r^2 + (\Omega m - k/\Omega)^2}} \cos \left(\Omega t + \operatorname{arctg} \frac{r}{\Omega m - k/\Omega}\right). \tag{10}$$

După trecerea unui timp suficient de lung, ca ordin de mărime $\tau = \frac{2m}{r}$ (timpul de relaxare sau timpul de viață), oscilațiile proprii amortizate se sting și rămîn în sistem numai oscilațiile „forțate" (3). Prin urmare, la început avem un *regim tranzitoriu* în care coexistă oscilațiile proprii cu pseudofrecvența

$$\omega' = \sqrt{k/m - r^2/(4m^2)} = \sqrt{\omega^2 - r^2/(4m^2)} \tag{11}$$

și cu *coeficientul de amortizare*

$$b = \frac{r}{2m} = \frac{1}{\tau} \tag{12}$$

și oscilațiile forțate (3). După stingerea oscilațiilor proprii rămîne *regimul permanent* sau staționar în care există numai oscilațiile *forțate* (întreținute):

$$x = \frac{F_0}{\Omega \sqrt{r^2 + (\Omega m - k/\Omega)^2}} \cos \left(\Omega t + \operatorname{arctg} \frac{r}{\Omega m - k/\Omega}\right), \tag{13}$$

$$v = \dot{x} = -\frac{F_0}{\sqrt{r^2 + (\Omega m - k/\Omega)^2}} \sin \left(\Omega t + \operatorname{arctg} \frac{r}{\Omega m - k/\Omega}\right) = \\ = \frac{F_0}{Z} \cos \left(\Omega t + \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \frac{r}{\Omega m - k/\Omega}\right) = \frac{F_0}{Z} \cos \left(\Omega t - \operatorname{arctg} \frac{\Omega m - k/\Omega}{r}\right) = \\ = \frac{F_0}{Z} \cos (\Omega t - \varphi), \text{ unde } \operatorname{tg}\varphi = \frac{\Omega m - k/\Omega}{r} = \frac{X_a - X_k}{r}. \tag{14}$$

Să studiem puțin *oscilațiile forțate*:

— Oscilațiile forțate sînt sinusoidale și *nu sînt amortizate* (sînt întreținute, au amplitudinea constantă), deși în sistem există forțe de frecare, disipative, care transformă ireversibil energia mecanică în căldură.

— Frecvența oscilațiilor forțate este egală cu frecvența forței periodice aplicate.

— Amplitudinea și defazajul oscilațiilor forțate depind de structura sistemului oscilant (m, k) și de *frecvența* forței exterioare aplicate și *nu depind* de condițiile inițiale.

Spre deosebire de acestea, oscilațiile proprii sînt amortizate, au frecvența proprie determinată de parametrii sistemului, amplitudinea și faza lor sînt determinate de condițiile inițiale.

Puterea dezvoltată de forța periodică aplicată:

$$P = f \cdot v = F_0 \cos \Omega t \cdot v_0 \cos (\Omega t - \varphi) = \frac{F_0^2}{Z} \cos \Omega t \cos (\Omega t - \varphi) \tag{15}$$

şi puterea medie (pe o perioadă):

$$\langle P\rangle = \frac{F_0^2}{Z}\langle \cos\Omega t\cdot\cos(\Omega t-\varphi)\rangle = \frac{1}{2}\frac{F_0^2}{Z}\cos\varphi, \qquad (16)$$

unde $\cos\varphi$ este „factorul de putere". Observaţi analogia cu puterea din curent alternativ.

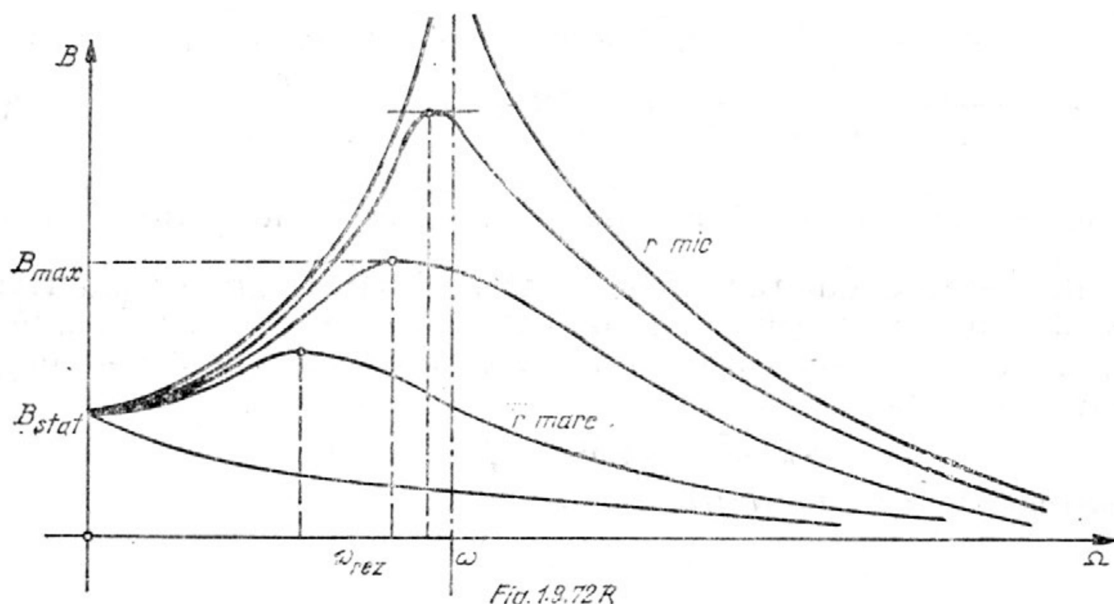


Fig. 1.9.72 R

Dacă frecvenţa Ω a forţei exterioare variază, amplitudinea oscilaţiilor forţate (7) variază şi atinge un *maxim la rezonanţă* (vd. figura). Condiţia de maxim a lui B este anularea derivatei sale. Putem deriva doar expresia de sub radical de la numitor în raport cu Ω^2:

$$\frac{d}{d(\Omega^2)}[\Omega^2 r^2 + (k-m\Omega^2)^2] = r^2 + 2(k-m\Omega^2)(-m) = 0,$$

$$\Omega = \sqrt{k/m - r^2/(2m^2)} = \omega_{rez} = \sqrt{\omega^2 - r^2/(2m^2)} < \omega = \sqrt{k/m}. \qquad (17)$$

Aceasta este *rezonanţa elongaţiilor* (analogul rezonanţei tensiunilor în curent alternativ), întrucît la această frecvenţă *amplitudinea elongaţiilor* B este maximă (atunci şi forţa elastică este maximă). Pentru aceasta trebuie ca amortizările să nu fie prea mari:

$$r < \sqrt{2mk}. \qquad (18)$$

La rezonanţa elongaţiilor amplitudinea maximă este

$$B_{max} = \frac{F_0}{r\sqrt{k/m - r^2/(4m^2)}} = \frac{F_0}{r\omega'},\ \mathrm{tg}\varphi_m = \frac{-r}{2m\omega_{rez}} < 0. \qquad (19)$$

Ca efect al rezonanţei amplitudinea oscilaţiilo este mai mare decît elongaţia statică produsă de forţa constantă F_0:

$$B_{stat} = \frac{F_0}{k},\ \frac{B_{max}}{B_{stat}} = \frac{\sqrt{mk}}{r}\frac{1}{\sqrt{1-r^2/(4mk)}} = Q\frac{1}{\sqrt{1-r^2/(4mk)}},$$

$$Q = \frac{1}{r}\sqrt{mk} = Z_0/r,\ \text{(analogul lui } Q = \frac{1}{R}\sqrt{L/C}\text{)}, \qquad (20)$$

unde Q este „factorul de calitate" al sistemului oscilant analog lui $Q = (1/R)\sqrt{L/C}$ din curent alternativ, iar $Z_0 = \sqrt{mk}$ este impedanța caracteristică a sistemului oscilant (analogul lui $Z_0 = \sqrt{L/C}$).
Dacă amortizările sînt mici, $r \ll \sqrt{mk}$, rezonanța este foarte ascuțită, B_{max} este foarte mare față de B_{stat}, ($Q \gg 1$).

După cum se vede din (14) maximul amplitudinii *vitezei* are loc pentru frecvența

$$\Omega = \omega = \sqrt{k/m}, \text{ cînd } X = X_m - X_k = \Omega m - k/\Omega = 0, \tag{21}$$

atunci

$$v_{0\,max} = \frac{F_0}{r}, \ (Z \to r), \tag{22}$$

aceasta este *rezonanța vitezelor* : amplitudinea *vitezei* este maximă, (analogul rezonanței curenților din curent alternativ), dar în acest caz amplitudinea elongațiilor B nu mai este maximă, ci

$$B_0 = \frac{F_0}{\omega r} < B_{max} = \frac{F_0}{\omega' r}, \ \omega' < \omega. \tag{23}$$

La rezonanța vitezelor :

$$\frac{B_0}{B_{stat}} = \frac{1}{r}\sqrt{mk} = Q - \text{factor de calitate.} \tag{24}$$

Prin urmare, trebuie să distingem rezonanța *elongațiilor* cînd amplitudinea B a oscilațiilor este maximă la frecvența (17) :

$$\omega_{rez} = \sqrt{k/m - r^2/(2m^2)} < \omega' = \sqrt{k/m - r^2/(4m^2)} < \omega = \sqrt{k/m} \tag{25}$$

și rezonanța *vitezelor* cînd amplitudinea v_0 a vitezei este maximă la frecvența $\Omega = \omega = \sqrt{k/m}$, egală cu frecvența oscilațiilor proprii, libere, în *absența* amortizării.

Dacă coeficientul de rezistență r este foarte mic : $r \ll \sqrt{mk}$, atunci cele două rezonanțe practic coincid și au loc pentru frecvența $\Omega \cong \omega$, maximul amplitudinii la rezonanță va fi foarte mare și curba de rezonanță va fi foarte ascuțită (pentru $r \to 0$, $B_{max} \to \infty$). Din (7) se vede că defazajul β dintre oscilațiile forțate și forța aplicată este negativ, adică oscilațiile forțate totdeauna *întîrzie* față de forța exterioară. Cînd $\Omega < \omega = \sqrt{k/m}$, defazajul β este în cadranul IV. Cînd Ω crește, defazajul β crește în modul. Cînd trecem prin rezonanța vitezelor $\Omega = \omega$, $\beta = -\pi/2$: elongația este în cuadratură cu forța, în timp ce defazajul φ (14) dintre forță și viteză este zero, adică viteza este în fază cu forța și deci puterea dezvoltată (15) este tot timpul pozitivă. Cînd $\Omega > \omega$, $\beta < -\pi/2$, β trece din cadranul IV în cadranul III, iar cînd $\Omega \to \infty$, $\beta = -\pi$, adică la frecvențe foarte înalte elongația este în opoziție de fază cu forța.

La rezonanța vitezelor ($\Omega = \omega$) *forța aplicată* $f = F_0 \cos\Omega t$ *devine egală în modul și de sens opus cu forța disipativă de frecare* $f_r = -r\dot{x} = -rv$. În adevăr, din (14) rezultă imediat

$$f_r = -rv = -r\frac{F_0}{Z}\cos\left(\Omega t - \operatorname{arctg}\frac{\Omega m - k/\Omega}{r}\right) \xrightarrow[\Omega=\omega]{} -F_0 \cos\omega t = -f.$$

Puterea dezvoltată de forța aplicată (analoagă puterii ui din curent alternativ) este (15):

$$P = fv = \frac{1}{Z} F_0^2 \cos\Omega t \cdot \cos(\Omega t - \varphi),$$

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} \frac{1}{Z} F_0^2 \cos\varphi = \frac{1}{2} r F_0^2/Z^2, \; (\cos\varphi = r/Z). \tag{26}$$

Pe de altă parte, puterea disipată (în căldură) (analogă lui Ri^2 din curent alternativ):

$$P_r = -f_r v = rv^2 = r(F_0^2/Z^2) \cos^2(\Omega t - \varphi), \tag{27}$$

$$\langle P_r \rangle = \frac{1}{2} r F_0^2/Z^2 = \langle P \rangle.$$

În regim permanent sau staționar puterea mecanică medie care intră în sistemul oscilant este egală cu puterea medie disipată sub formă de căldură. Mai mult, la *rezonanța vitezelor* puterea mecanică absorbită este *în fiecare moment* egală cu puterea disipată în acel moment:

$$P = \frac{1}{r} F_0^2 \cos^2\omega t = P_r, \; \Omega = \omega, \; f = -f_r, \tag{28}$$

și aceste puteri sînt *maxime*, ca și valorile lor medii:

$$\langle P \rangle_{\max} = \frac{1}{2} F_0^2/r = \langle P_r \rangle_{\max}, \; (Z \to r). \tag{29}$$

La *rezonanța vitezelor* sistemul oscilant se comportă ca un oscilator armonic ideal: ca și cum n-ar fi forța disipativă și nici cea externă aplicată:

$$-f_r = rv = f = F_0 \cos\Omega t, \text{ dacă } \Omega = \omega, \text{ deci } m\ddot{x} = -kx.$$

Energia cinetică și energia potențială ale sistemului:

$$E_c = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} mB^2\Omega^2 \sin^2(\Omega t + \beta),$$

$$E_p = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} mB^2 \omega^2 \cos^2(\Omega t + \beta), \tag{30}$$

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2} mB^2[\Omega^2 \sin^2(\Omega t + \beta) + \omega^2 \cos^2(\Omega t + \beta)]. \tag{31}$$

energia totală devine constantă la rezonanța vitezelor:

$$E = \frac{1}{2} mF_0^2/r^2 \text{ dacă } \Omega = \omega. \tag{32}$$

* * *

ANEXE

GENERALE

1. FORMULE DE APROXIMAȚIE

$$(1 + x)(1 + y)(1 + z) \ldots \approx 1 + x + y + z + \ldots$$

dacă

$$|x| \ll 1, \; |y| \ll 1, \; |z| \ll 1, \ldots,$$

formula se obține desfăcînd parantezele și neglijînd termenii de grad superior, care sînt mici.

$$\frac{1}{1 + x} = \frac{1 - x}{1 - x^2} \approx 1 - x, \quad \frac{1}{1 - x} = \frac{1 + x}{1 - x^2} \approx 1 + x, \text{ dacă } |x| \ll 1;$$

$$\frac{1}{a \pm b} = \frac{1}{a(1 \pm b/a)} \approx \frac{1}{a}\left(1 \mp \frac{b}{a}\right), \text{ dacă } |b| \ll |a|, \text{ adică } \left|\frac{b}{a}\right| \ll 1,$$

$$\sqrt{1 \pm x} \approx \sqrt{1 \pm x + x^2/4} = \sqrt{(1 \pm x/2)^2} = 1 \pm x/2, \text{ dacă } |x| \ll 1;$$

$$\sqrt{a \pm b} = \sqrt{a(1 \pm b/a)} \approx \sqrt{a}\left(1 \pm \frac{b}{2a}\right) = \sqrt{a} \pm \frac{b}{2\sqrt{a}},$$

dacă $|b| \ll a$, $a > 0$.

$$\frac{(1 + x_1)(1 + x_2)(1 + x_3) \ldots}{(1 + y_1)((1 + y_2)(1 + y_3) \ldots} \approx 1 + x_1 + x_2 + x_3 + \ldots - y_1 - y_2 - y_3 - \ldots,$$

dacă $|x_i| \ll 1$, $|y_k| \ll 1$.

Mai general:

$$(1 + x)^r \approx 1 + rx + \frac{1}{2} r(r - 1) x^2 \approx 1 + rx, \text{ dacă } |x| \ll 1,$$

r — număr real de ordinul unităților, de exemplu,

$$\frac{1}{\sqrt{1 - x}} = (1 - x)^{1/2} \approx 1 + \frac{x}{2}, \text{ dacă } |x| \ll 1, \; (r = -1/2).$$

Pentru alte funcţii:

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{6} \approx x;\ \cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2} \approx 1;\ \mathrm{tg}\, x \approx x + \frac{x^3}{3} \approx x,$$

unde x în radiani, $|x| \ll 1$ rad, adică $x \lesssim 6°$,

$$1 \text{ rad} = \frac{360°}{2\pi} = \frac{180°}{\pi} = 57°17'44'',8 \approx 57°.$$

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} \approx 1 + x, \text{ dacă } |x| \ll 1;$$

$$a^x = e^{x \ln a} \approx 1 + x \ln a, \text{ dacă } |x \ln a| \ll 1;$$

$$\ln(1 + x) \approx x - \frac{x^2}{2} \approx x, \text{ dacă } |x| \ll 1.$$

2. ALFABETUL GRECESC

alfa	α	A	niu	ν	N
beta	β	B	xi	ξ	Ξ
gama	γ	Γ	omicron	ο	O
delta	δ	Δ	pi	π	Π
epsilon	ε	E	ro	ρ	P
zeta	ζ	Z	sigma	σ, ς	Σ
eta	η	H	tau	τ	T
teta	θ, ϑ	Θ	ypsilon	υ	Υ
iota	ι	I	fi	φ	Φ
kapa	κ	K	hi	χ	X
lambda	λ	Λ	psi	ψ	Ψ
miu	μ	M	omega	ω	Ω

3. MULTIPLI ŞI SUBMULTIPLI

Multipli		Unităţi	Submultipli		Unităţi
deca-	da-	10	deci-	d-	10^{-1}
hecto-	h-	10^2	centi-	c-	10^{-2}
kilo-	k-	10^3	mili-	m-	10^{-3}
mega-	M-	10^6	micro-	μ-	10^{-6}
giga-	G-	10^9	nano-	n-	10^{-9}
tera-	T-	10^{12}	pico-	p-	10^{-12}
peta-	P-	10^{15}	femto-	f-	10^{-15}
exa-	E-	10^{18}	ato-	a-	10^{-18}

4. CÎTEVA UNITĂŢI DE MĂSURĂ

Litrul cu simbolul L este definit astăzi ca fiind identic cu 1 dm^3.
Anul-lumină: 1 an-lum. = $9{,}5 \cdot 10^{12}$ km.
Parsecul 1 parsec = $30{,}8 \cdot 10^{12}$ km.

Torrul sau mm Hg este presiunea exercitată de o coloană de mercur înaltă de 1 mm la temperatura de 0°C în cîmpul gravitațional normal $g_n = 9{,}80665$ m/s²:

$$1 \text{ torr} = 1 \text{ mm Hg} = [\rho g h] = 13595{,}1 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 9{,}80665 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 10^{-3} \text{ m} =$$

$$= 133{,}322 \text{ Pa} \cong 133{,}3 \text{ Pa} \cong \frac{400}{3} \text{ Pa}.$$

Densitatea mercurului la 0°C: 13595,1 kg/m³ și la 20°C: 13545,9 kg/m³.

Atmosfera fizică :

$$1 \text{ atm} = 760 \text{ torr} = 101325 \text{ Pa} \cong 1{,}013 \cdot 10^5 \text{ Pa}.$$

Milimetrul coloană de apă :

$$1 \text{ mm } H_2O \cong 9{,}8 \text{ Pa} \cong 13{,}6 \text{ torr},$$

$$1 \text{ atm} = 10{,}33 \text{ m } H_2O.$$

Caloria internațională :

$$1 \text{ cal}_{IT} = \frac{1}{860} \text{ Wh} = 4{,}1868 \text{ J} ; 1 \text{ J} \cong 0{,}24 \text{ cal}.$$

Kelvinul, unitate de temperatură termodinamică, este fracțiunea 1/273,16 din temperatura termodinamică a punctului triplu al apei.

Relația dintre scările Kelvin și Celsius :

$$T[\text{K}] = 273{,}15 + t[°\text{C}] = T_0 + t = \frac{1}{\alpha} + t,$$

unde $\alpha = 1/273{,}15 \text{ K}^{-1} = 0{,}003661 \text{ K}^{-1}$ este coeficientul de dilatare izobară a gazului perfect.

Unitatea atomică de masă :

$$1\text{u} = \frac{1}{12} \text{ masa atomului } {}^{12}_{6}\text{C} = 1{,}6605402 \cdot 10^{-27} \text{ kg} =$$

$$= 931{,}4943 \text{ MeV} = 1{,}4924191 \cdot 10^{-10} \text{ J},$$

$$1\text{u} \cong 1{,}66 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \cong 931{,}5 \text{ MeV} \cong 1{,}49 \cdot 10^{-10} \text{ J},$$

$1\text{u} = 10^{-3}/N_A$, unde $N_A = 6{,}0221367 \cdot 10^{23}$ mol⁻¹ — constanta lui Avogadro.

Molul este cantitatea de substanță (materie) a unui sistem care conține atîtea entități elementare cîți atomi există în 12 g de carbon 12. Entitățile elementare pot fi atomi, molecule, ioni, electroni, alte particule sau grupuri specificate de asemenea particule.

Masa molară μ [kg/mol] și masa moleculară M [u] sînt legate prin relația :

$$\mu[\text{kg/mol}] = 10^{-3} \, M[\text{u}].$$

Candela este intensitatea luminoasă, într-o direcție dată, a unei surse care emite o radiație monocromatică cu frecvența 540 . 10^{12} Hz și a cărei intensitate energetică în această direcție este de 1/683 W/sr.

Becquerelul este unitate SI pentru activitatea (A) unui radionuclid :

$$1\text{Bq} = 1 \text{ s}^{-1}.$$

Unitatea menținută temporar *curie* : $1\text{Ci} = 3{,}7\cdot10^{10}$ Bq.

Grayul este unitate SI pentru doza absorbită(D) de radiații ionizante :

$$1\text{Gy} = 1 \text{ J/kg}.$$

Unitatea menținută temporar : 1 rad $= 10^{-2}$ Gy.

Sievertul este unitate SI pentru echivalent de doză absorbită(B) :

$$1 \text{ Sv} = 1 \text{ J/kg}.$$

Unitatea menținută temporar : 1 rem $= 10^{-2}$ Sv.

Röntgenul este o unitate specială menținută temporar și folosită pentru a exprima expunerea la radiațiile X sau γ :

$$1 \text{ R} = 2{,}58\cdot10^{-4} \text{ C/kg}.$$

Doza echivalentă (B) servește pentru evaluarea pericolului iradierii și este egală cu doza absorbită (D) înmulțită cu *coeficientul* mediu *de calitate* Q a iradierii unui țesut biologic :

Forma radiației	Q
Raze X și γ	1
Electroni și pozitroni	1
Neutroni cu $E < 20$ keV	3
Neutroni cu 0,1 MeV $< E <$ 10 MeV	10
Radiații α	20

Fondul natural al radiației produce o putere a dozei de expunere între 1 și 5 nC/(kg.h) sau între 10 și 50 μC/(kg.an).

Doze permise maxime :

Toată viața	1 an	3 luni	1 săptămînă
300 mSv	50 mSv	30 mSv	1 mSv

5. CONSTANTE FUNDAMENTALE

Viteza luminii în vid în sisteme de referință inerțiale :

$$c = 2{,}99792458\cdot10^{8} \text{ m/s} \cong 3{,}00\cdot10^{8} \text{ m/s}.$$

Constanta lui Planck :

$$h = 6{,}6260755 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{J.s} \cong 6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{J.s},$$

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1{,}0545727 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{J.s} \cong 1{,}05 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{J.s}.$$

Sarcina elementară :

$$e = 1{,}60217733 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C} \cong 1{,}60 \cdot 10^{-19}\mathrm{C}.$$

Constanta gravitațională :

$$\gamma = 6{,}67259 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N.m^2/kg^2} \cong 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N.m^2/kg^2}.$$

Constanta lui Boltzmann :

$$k = 1{,}380658 \cdot 10^{-23}\ \mathrm{J/K} \cong 1{,}38 \cdot 10^{-23}\ \mathrm{J/K}.$$

Constanta lui Avogadro :

$$N_A = 10^{-3}/\mathrm{u} = 6{,}0221367 \cdot 10^{23}\ \mathrm{mol^{-1}} \cong 6{,}02 \cdot 10^{23}\ \mathrm{mol^{-1}}.$$

Constanta universală a gazelor :

$$R = kN_A = 8{,}314510\ \mathrm{J/(mol.K)} \cong 8{,}3\ \mathrm{J/(mol.\ K)}.$$

Condiții *normale* ale gazelor înseamnă :

temperatură normală : $T_0 = 273{,}15\ \mathrm{K} = 0{,}00°\mathrm{C}$,

presiune normală : $p_0 = 101325\ \mathrm{Pa} = 760\ \mathrm{torr} = 1\ \mathrm{atm}$.

Volumul molar al gazului perfect în condiții normale :

$$V_{\mu 0} = RT_0/p_0 = 22{,}4141 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m^3/mol} \cong 22{,}4\ \mathrm{m^3/kmol}.$$

Numărul lui Loschmidt :

$$L = p_0/(kT_0) = N_A/V_{\mu 0} = 2{,}68676 \cdot 10^{25}\ \mathrm{m^{-3}} \cong 2{,}69 \cdot 10^{25}\ \mathrm{m^{-3}}.$$

Permitivitatea vidului :

$$\varepsilon_0 = 8{,}854187817 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{F/m} \cong 8{,}85 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{F/m}.$$

Permeabilitatea vidului :

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \mathrm{H/m} \cong 1{,}26 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{H/m},\ \varepsilon_0\mu_0 = 1/c^2.$$

Constanta lui Faraday:

$$F = N_A e = 9{,}6485309 \cdot 10^4 \text{ C/Eq} \cong 96{,}5 \cdot 10^3 \text{ C/Eq}.$$

Masa de repaus a *electronului*:

$$m_e = 9{,}1093897 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cong 9{,}11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}.$$

Sarcina specifică a electronului:

$$e/m_e = 1{,}75881962 \cdot 10^{11} \text{ C/kg} \approx 1{,}76 \cdot 10^{11} \text{ C/kg}.$$

Masa de repaus a *protonului*:

$$m_p = 1{,}6726231 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \cong 1{,}67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}.$$

$$m_p/m_e = 1836{,}152701 \cong 1836.$$

Masa de repaus a *neutronului*:

$$m_n = 1{,}6749286 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \cong 1{,}67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}.$$

$$m_n/m_e = 1838{,}683662 \cong 1838{,}7.$$

Constanta lui Rydberg: $R_\infty = \dfrac{m_e e^4}{8\varepsilon_0 h^3 c} = 1{,}0973731534 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$,

$$R_H = 1{,}09677583 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1},\ R \cong 1{,}10 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}.$$

Raza primei orbite Bohr:

$$r_1 = \frac{4\pi\varepsilon_0 \hbar^2}{m_e e^2} = 5{,}29177249 \cdot 10^{-11} \text{ m} \cong 0{,}53 \cdot 10^{-11} \text{ m}.$$

Lungimea de undă *Compton*:

a electronului $\Lambda_e = \dfrac{h}{m_e c} = 2{,}42631058 \cdot 10^{-12} \text{ m} \cong 2{,}43 \cdot 10^{-12} \text{ m}$,

a protonului $\Lambda_p = \dfrac{h}{m_p c} = 1{,}32141002 \cdot 10^{-15} \text{ m} \cong 1{,}32 \cdot 10^{-15} \text{ m}$.

Raza clasică a electronului:

$$r_e = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e c^2} = 2{,}817941 \cdot 10^{-15} \text{ m} \cong 2{,}82 \cdot 10^{-15} \text{ m}.$$

Constanta structurii fine :

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar c} = \frac{1}{137,036} \cong \frac{1}{137}.$$

Magnetonul lui Bohr :

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} = 0,92740154 \cdot 10^{-23}\ \mathrm{A \cdot m^2} \cong 0,927 \cdot 10^{-23}\ \mathrm{J/T}.$$

Magnetonul nuclear :

$$\mu_N = \frac{e\hbar}{2m_p} = 5,0507866 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{A \cdot m^2} \cong 5,05 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{J/T}.$$

1. MECANICĂ

1.1. Cîteva date asupra Pămîntului

Presiunea atmosferică normală	101325 Pa
Densitatea aerului uscat în CN	1,2928 kg/m^3
Viteza sunetului în aer uscat în CN	331,4 m/s
Accelerația gravitațională: normală	9,80665 m/s^2
la nivelul mării și paralela 45°	9,80616 m/s^2
la ecuator	9,7805 m/s^2
la poli	9 8322 m/s^2
Raza ecuatorială a Pămîntului	6378 km
Raza polară a Pămîntului	6357 km
Volumul Pămîntului	1,087 $\cdot 10^{21}$ m^3
Raza medie a Pămîntului	6371 km
Densitatea medie a Pămîntului	5522 kg/m^3
Masa Pămîntului	5,983 $\cdot 10^{24}$ kg
Aria uscatului (29,2 % din suprafața terestră)	1,49 $\cdot 10^8$ km^2
Aria oceanelor (70,8 % din suprafața terestră)	3,61 $\cdot 10^8$ km^2
Volumul oceanelor	1,37 $\cdot 10^9$ km^3
Masa atmosferei	5,27 $\cdot 10^{18}$ kg
Viteza unghiulară medie de rotație a Pămîntului	7,292 $\cdot 10^{-5}$ rad/s
Perioada rotației proprii	23 h 56 min 4,1 s
Cîmpul magnetic terestru B	5,7 $\cdot 10^{-5}$ T
Momentul magnetic dipolar al Pămîntului	8,1 $\cdot 10^{22}$ A $\cdot$m^2
Viteza orbitală medie a Pămîntului	29,770 km/s
Distanța medie pînă la Soare	149,46 $\cdot 10^6$ km
Durata anului	365,26 zile
Înclinarea ecuatorului față de orbită	23° 27′
Distanța pînă la Lună	384,4 $\cdot 10^3$ km
Accelerația gravitațională, pe Lună	1,62 m/s^2
pe Soare	271 m/s^2
Densitatea fluxului de energie radiantă solară pe suprafața Pămîntului	1340 W/m^2

1.2. Densitățile unor substanțe în kg/m³

Solide (la temperatura camerei: 17÷23°C)
(ultimele două cifre nu sînt peste tot exacte)

Alamă	8400÷8500	Cuarț topit transparent	2200	Nichelina	8800
Alnico	7100	Cupru	8890	Nicrom	8300÷8400
Aluminiu	2700	Diamant	3500	Nylon	1140
Argint	10400	Duraluminiu	2800	Oțel carbon (<1% C)	7800
Asfalt	1400	Ebonită	1200	Oțel moale	7900
Aur	19300	Fier	7800	Parafină	900
,, 22 carate	17500	Fontă	7000÷7100	Permalloy	8600
,, 9 ,,	11300			Platină	21450
Azbest	2400	Gelatină	1300	Platină-iridiu (90/10)	21500
Bachelită	1250÷1340	Gheață (0°C)	917	Plexiglas	1180÷1200
Beton	2200	Grafit	2300	Plumb	11340
		Granit	2700	Plută	200÷250
Cărămidă	1800	Invar	8000	Polietilenă	920÷930
Cărbune antracit	1600	Lemn uscat:		Polistirol	1054÷1070
,, bitumen	1400	,, bambuc	400	Porțelan	2300
Cărbune de lemn	400	,, brad	600	Sare de bucătărie	2100
,, ,, retortă	1900			Smoală	1100
Cauciuc	940	Lemn uscat:		Spat de Islanda	2700
		,, cedru	550	Sticlă	2400÷2800
Ceară de albine	950	,, fag	750	Sulf (amorf)	1920
,, ,, laborator	1000	,, mesteacăn	700	Supermalloy	8900
Ceară roșie	1800	,, pin	500	Wolfram (sîrmă)	19300
Celuloid	1350÷1400	,, stejar	700÷800	Zinc	7000÷7100
Cenușă de lemn	750				
Chihlimbar	1100	Manganină	8400÷8500		
Constantan	8900	Marmură	2700		
Cositor	7300	Mercur solid (−39°C)	14190		
Cretă	2400	Mica	2800÷2900		
Cuarț cristalin	2600	Neusilber	8400		
,, topit semitransparent	2100	Nichel	8800÷8900		

Lichide (la 15°C)

Acetonă	792	Benzen	850÷880	Sulfură de carbon	1260
Acid sulfuric concentrat	1830	Benzină	700÷900	Terebentină	850÷870
Aer lichid (−194°C)	860	Eter	720÷736	Ulei animal	900
Alcool etilic	791	Glicerină	1260	,, de in	950
,, metilic	810	Lapte	1030	,, măsline	920
Anilină	1020÷1030	Petrol	800	Ulei de parafină	800
Apă de mare	1025÷1030	,, lampant (kerosin)	780÷800	,, ricin	950
Argint lichid	930				
Aur lichid	17200				

Gaze (în condiții normale)

Acetilenă	1,170	Bioxid de carbon	1,9768	Hidrogen sulfurat	1,539
Acid clorhidric	1,639	Brom	7,139	Kripton	3,68
Aer	1,2928	Clor	3,220	Metan	0,7167
Amoniac	0,7708	Fluor	1,690	Neon	0,900
Argon	1,783	Heliu	0,1785	Oxid de carbon	1,2502
Azot	1,251	Hidrogen	0,0899	Oxigen	1,429
Bioxid de azot	1,980			Xenon	5,85

1.3. Densitatea apei (în kg/m³) la diferite temperaturi

t, °C	ρ, kg/m³	t °C	ρ, kg/m³	t, °C	ρ, kg/m³
−4	999,5	3 sau 5	999,965	60	982,31
−3	999,6	4	999,973	70	977,79
−2	999,7	10	999,700	80	971,80
−1	999,8	20	998,203	90	965,31
0	999,841	30	995,646	100	958,35
1 sau 7	999,902	40	992,21	150	917,3
2 sau 6	999,941	50	988,04	200	862,8

1.4. Proprietățile elastice ale unor materiale (la 18°C)

Materialul	Modulul Young E, 10^{10} N/m²	Modulul de lunecare G, 10^{10} N/m²	Coef. Poisson μ	Modulul de compresib. K, 10^{10} N/m²
Aluminiu	7,05	2,62	0,345	7,58
Argint	8,27	3,03	0,367	10,4
Aur	7,8	2,7	0,44	21,7
Bronz (66 % Cu)	~10	~3,5	~0,37	11,2
Cauciuc	~0,00032	~0,00010	~0,47	—
Constantan (60 % Cu + 40 % Ni)	16,3	6,11	0,327	15,7
Cuarț	7,3	3,1	0,17	3,7
Cupru	12,98	4,833	0,343	13,76
Fier	21,2	8,2	0,29	16,9
Fontă	~11,5	~4,4	~0,27	9,6
Manganină	12,4	4,65	0,334	12,4
Nichel	20,4	7,9	0,280	16,1
Oțel (1 % C)	21,0	8,10	0,293	16,88
Oțel moale	21,0	8,12	0,291	16,78
Platina	16,8	6,1	0,377	22,8
Plumb	1,62	0,562	0,441	4,6
Sticlă	~6	3,1	~0,25	3,75
Zinc	9,0	3,6	0,25	6,0

Gheața (−2°C) $E = 0{,}28 \cdot 10^{10}$ N/m²; stejar $E = 1{,}3 \cdot 10^{10}$ N/m²; pin $E = 0{,}9 \cdot 10^{10}$ N/m²; mase plastice $E \sim 0{,}2 \cdot 10^{10}$ N/m².

1.5. Coeficienți de frecare la lunecare μ

Bronz pe bronz	0,20	Curea de piele pe roată de fontă	0,56
Bronz pe fontă (slab uns)	0,19	Oțel pe gheață	0,02
Lemn pe lemn (stejar)	0,50	Oțel pe oțel	0,13
Lemn pe pămînt uscat	0,71	Cărbune pe cupru	0,25
Cărămidă pe cărămidă	0,65	Fontă pe fontă (slab uns)	0,15

1.6. Viteza sunetului (în m/s)

Solide

c_l — viteza undelor longitudinale într-o bară,
c_l' — viteza undelor longitudinale într-un mediu nemărginit,
c_t — viteza undelor transversale.

	c_l	c_l'	c_t
Alamă	3400	4500	2100
Aluminiu	5240	6400	3130
Argint	2800	3700	1694
Cupru	3600	4700	—
Fier	5130	5900	—
Lemn	3600 ÷ 4000	—	—
Nichel	4900	—	—
Oţel	5100	6000	—
Platină	2800	3960	—
Sticlă (crown)	5000	5700	3300
Zinc	3800	4170	—

Valori extreme: granit 6000
cauciuc vulcanizat (0°C) 54

Lichide

Acetonă	25°C	1170	Heliu	−269,8°C	179,8
Alcool etilic	20°C	1177	Mercur	20°C	1451
,, metilic	20°C	1122	Petrol	25°C	1225
Anilină	20°C	1659	Sulfura de carbon	25°C	1149
Apă	0°C	1407	Tetraclorură de carbon	25°C	930
Benzen	25°C	1295	Toluen	25°C	1300

Gaze (0°C)

Aer (uscat)	331,46	H_2	1286	N_2	333,64
CO	337,6	O_2	315	CH_4	430
CO_2	260	NH_3	415		

BIBLIOGRAFIE

1. **A. Hristev, V. Fălie, D. Manda** — *Manual de Fizică*, cl. IX, Ed. Did. Ped., București 1980—1990.
2. **A. Hristev, D. Borșan, D. Manda, M. Sandu, L. Georgescu, N. Gherbanovschi** — *Probleme de Fizică pentru cl.* IX—X, Ed. Did. Ped., București 1983, ed. II-a, 1991.
3. **A. Hristev** — *Probleme de Termodinamică, Fizică moleculară și Căldură*, Ed. II-a, Ed. Tehnică, București 1988.
4. **A. Hristev** — *Mecanica și Acustica*, Ed. II-a, Ed. Did. Ped., București 1984.
5. **A. Hristev, V. Fălie** — *Elemente de Mecanică*, Ed. Did. Ped., București 1973.
6. **A. Hristev** — *Noțiuni de Termodinamică*, Ed. Did. Ped., București 1974.
7. **C. Plăvițu, A. Hristev, L. Georgescu, D. Borșan, V. Dima, C. Stănescu, L. Ionescu, R. Moldovan** — *Probleme de Mecanică fizică și Acustică*, Ed. II-a, Ed. Did. Ped., București 1981.
8. **C. Plăvițu, I. Petrea, A. Hristev, L. Georgescu, D. Borșan, V. Dima, R. Moldovan** — *Fizica moleculară — probeleme*, Ed. III-a, Ed. Did. Ped., București 1981.
9. **N. Bărbulescu, I. Dima, I. Petrea, M. Cojocaru, A. Hristev, L. Georgescu, D. Borșan, V. Dima, R. Moldovan, C. Stănescu** — *Teoria cinetico-moleculară a gazelor*, Ed. St., București 1972.
10. **I. Iovit Popescu, A. Hristev, N. Gherbanovschi, G. Enescu** — *Mic Memorator de Fizică*, Ed. III-a, Ed. Tehnică, București 1991.
11. **M. Gall, A. Hristev** — *Probleme date la Olimpiadele de Fizică*, Ed. Did. Ped., București 1978.
12. **A. Hristev** — *Probleme de Fizică date la examene*, Ed. Tehnică, București 1984.
13. **A. Hristev** — *Despre spin*, Gaz. Mat. Fiz., vol. VIII, nr. 7, 1956, pag. 361.
14. **A. Hristev** — *Valori îmbunătățite ale constantelor fizice*, Rev. Fiz. Chim., vol. II, nr. 8, 1965, pag. 289.
15. **A. Hristev** — *Constantele fizice*, Rev. Fiz. Chim., vol. IX, nr. 4, 1972, pag. 121.
16. Revista „*Kvant*", URSS.
17. **A. Hristev** — *Probleme de fizică pentru învățămîntul mediu*, Editura ICAR, București, 1991.
18. **A. Hristev** — *Probleme rezolvate de fizică*, Editura E.V.&A., București, 1991.

SUMAR

